الفصل الأول

اللوغاريتمات

الدالة اللوغاريتمية

الدالة الاسية $f : R \longrightarrow R^{++}$ حيث $f(x) = a^x$ حيث $a > 0$ وان $a \neq 1$ هي دالة تقابل
ولهذه الدالة دالة عكسية هي f^{-1} حيث $f^{-1} : R^{++} \longrightarrow R$ وهي ايضا دالة تقابل.
تسمى هذه الدالة العكسية بالدالة اللوغاريتمية .

تعريف

(1-1) الدالة اللوغاريتمية

يرمز للدالة العكسية للدالة الاسية $y = a^x$ بالرمز $X = \text{Log}_a y$ حيث X هو لوغاريتم العدد y للاساس a

ونعبر عن ذلك $\underbrace{\text{Log}_a y}_{\text{دالة لوغاريتمية}} \Leftrightarrow \underbrace{y = a^x}_{\text{دالة اسية}}$

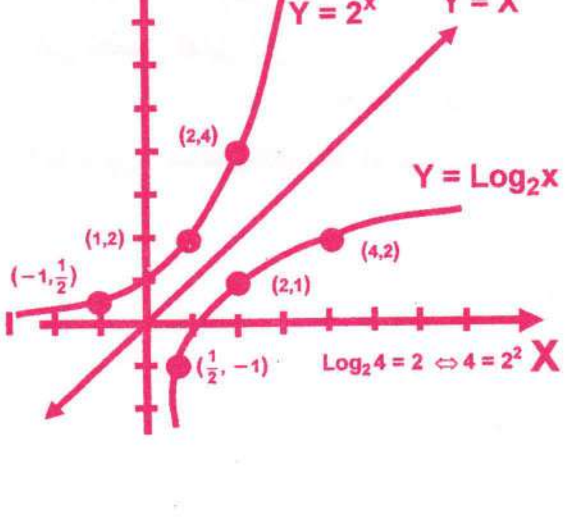
اي ان لوغاريتم العدد الموجب y للاساس a هو أس x الذي يجب ان يرفع اليه الاس a لنحصل على العدد y وكل من الجدولين التاليين يمثل بعض الازواج المرتبة للدالتين الاسية واللوغاريتمية

$y = 2^x$

X	$y = 2^x$
2	4
1	2
0	1
−1	$\frac{1}{2}$
−2	$\frac{1}{4}$

$y = \text{Log}_2 x$

X	$y = \text{Log}_2 x$
4	2
2	1
1	0
$\frac{1}{2}$	−1
$\frac{1}{4}$	−2



مثال/ تكافؤ الصيغة الاسية والصيغة اللوغاريتمية

Exponentail Form الصيغة الاسية		Logarithmic Form الصيغة اللوغاريتيمة
$8=2^3$	$\Leftrightarrow$	$Log_2 8 = 3$
$\frac{1}{9}=3^{-2}$	$\Leftrightarrow$	$Log_3 \frac{1}{9} = {}^-2$
$1=b^0$	$\Leftrightarrow$	$Log_b 1 = 0$
$a=b^c$	$\Leftrightarrow$	$Log_b a=c$

مثال1/ اكتب كلاً مما ياتي بالصورة اللوغاريتيمة .

(1) $5^3=125$ (2) $0.001=10^{-3}$ (3) $2=32^{\frac{1}{5}}$

الحل : من المعلوم ان : $b^y=x \Leftrightarrow Log_b x=y$

$125 = 5^3$ تكافئ $Log_5 125 = 3$

$0.001 = 10^{-3}$ تكافئ $Log_{10} 0.001 = -3$

$2=32^{\frac{1}{5}}$ تكافئ $Log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

مثال2/ اكتب كلاً مماياتي بالصورة الاسية .

(1) $Log_7 49$ (2) $Log_{\sqrt{2}} 64 = 12$ (3) $Log_{10} 10000 = 4$

الحل

/ من المعلوم ان :

$b^y=x \Leftrightarrow Log_b x=y$

(1) $Log_7 49 = 2 \Leftrightarrow 49 = 7^2$ (2) $Log_{\sqrt{2}} 64 = 12 \Leftrightarrow 64 = (\sqrt{2})^{12}$

(3) $Log_{10} 10000 = 4 \Leftrightarrow 10000 = 10^4$

(1-3) خواص الدالة اللوغاريتيمة .

ادناه بعض خواص الدالة اللوغاريتيمة :

(1) لكل عدد حقيقي موجب لوغارتم . **(2)** ليس للعدد الحقيقي السالب لوغاريتم .

(3) بما ان الدالة اللوغاريتيمة هي تطبيق تقابل فان :

$x=y \Leftrightarrow Log_b x=Log_b y \quad ,\forall x,y \in R^{++}$

(4) لما كان $b\neq 1, b\rangle 0$ لكل $x,y \in R^{++}$ سنقبل القواعد الاتية بدون برهان

(a) $Log_b(xy)=Log_b x+log_b y$

(b) $Log_b(\frac{x}{y})=Log_b x-Log_b y$

(c) $Log_b x^n=nLog_b x , \forall n \in R$

(d) $Log_b b=1$

(e) $Log_b 1=0$

ملاحظة :
مغالطات قواعد اللوغاريتمات

$$*Log_b(xy) \neq Log_b x . Log_b y$$
$$*Log_b(x/y) \neq \frac{Log_b x}{Log_b y}, y \neq 0$$
$$*Log_b x^n \neq (Log_b x)^n$$

لاحظ التمرين (3) من تمارين (1-1) الذي سيأتي لاحقاً يوضح هذه المغالطات .

مثال3 / اثبت ان: $Log_2(17/5) - Log_2(34/45) + 2Log_2(2/3) = 1$

(تعني متطابقة فناخذ اما الطرف الايمن او الايسر او الاثنين معا ونبسطهما)

الحل : طالما الاساس لجميع الحدود هو موحد ويساوي **2**
∴ نطبق قواعد اللوغاريتمات السابقة الذكر
الطرف الايسر : $Log_2(17/5) - Log_2(34/45) + Log_2(2/3)^2$
رجعنا الاس الى وضعه الاصلي والذي هو 2 الموجود في الحد الاخير من الطرف الايسر .

$$L.S = log_2(\frac{17}{5} \times \frac{4}{9}) \div (\frac{34}{45})$$

$$= Log_2 \frac{\cancel{17}}{\cancel{5}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{9}} \times \frac{\cancel{45}}{\underset{2}{\cancel{34}}} = Log_2 2 = 1 = R.S$$ الطرف الايمن

مثال4/ حل المعادلات الاتية

(1) $Log_3 X = 4$ (2) $Log_x 64 = 6$ (3) $Log_5 1/125 = X$ (4) $Log_x 343 = 3$

الحل :

(1) $Log_3 X = 4 \rightarrow X = 3^4 \rightarrow X = 3^2 . 3^2 = 9.9 = 81$

∴ مج الحل = {81}

---

(2) $Log_x 64 = 6 \rightarrow 64 = x^6 \rightarrow 2^6 = x^6$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

او نحلل العدد 64 الى عوامله الاولية
لماذا 2∓ لان الاس عدد زوجي

$\therefore x = \mp 2$

مج الحل = { 2 }

لماذا مجموعة الحل = { 2 } فقط ؟ لان الاساس دائما موجب

وبالتالي يهمل الحل = { 2- } لان b>0

(3) $\log_5 \frac{1}{125} = X \Leftrightarrow \frac{1}{125} = 5^x \rightarrow \frac{1}{5.25} = 5^x$

$\frac{1}{5.5.5} = 5^x \rightarrow \frac{1}{5^3} = 5^x \rightarrow 5^{-3} = 5^x$

$\rightarrow x = -3$ مج الحل ={ -3 }

(4) $\log_X 343 = 3$

343	7
49	7
7	7
1	

$X^3 = 343$

$X^3 = 7^3$

$X = 7$ باخذ الجذر التكعيبي للطرفين

مثال5/ أ / جد العدد الذي لوغاريتمه للاساس $(\frac{1}{4})$ هو $(2.5) = (2\frac{1}{2})$

ب/ جد اساس العدد (0.01) الذي لوغارتيمه (1)

ج / جد لوغاريتم العدد $\frac{1}{8}$ للاساس (2)

الحل :

(أ) نفرض العدد = X

$\log_{\frac{1}{4}} X = 2\frac{1}{2} \rightarrow X = (\frac{1}{4})^{\frac{5}{2}} \rightarrow X = \frac{1}{(2^2)^{\frac{5}{2}}} \rightarrow X = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(العدد 1 لاي اس =1)

(ب) نفرض الاساس = x

$\log_x 0.01 = 1 \rightarrow 0.01 = x^1 \rightarrow x = 0.01$

(ج) نفرض اللوغاريتم = x

$\log_2 \frac{1}{8} = X \rightarrow \frac{1}{8} = 2^x \rightarrow \frac{1}{2^3} = 2^x$

$\rightarrow 2^{-3} = 2^x \rightarrow x = -3$

اذا تساوت الاساسات تساوت الاسس .

حلول تمارين (1-1)

(1) جد قيمة x لكل مما ياتي :

(a)$Log_{10}0.00001 = X$ (b)$Log_x 16 = -4$ (c)$Log_{10}x = 5$

الحل :

(a) $\frac{0.00001}{1} = 10^x \rightarrow \frac{1}{100000} = 10^x \rightarrow 10^{-5} = 10^x \rightarrow x = -5$

(b) $16 = X^{-4} \rightarrow 2^4 = \frac{1}{x^4} \rightarrow 2^4.X^4 = 1 \rightarrow X^4 = \frac{1}{2^4} \rightarrow X^4 = 2^{-4}$

$\rightarrow X^4 = (2^{-1})^4 \rightarrow X = \mp 2^{-1} \rightarrow X = \mp\frac{1}{2} \rightarrow X = \frac{1}{2}$

(c) $X = 10^5 \rightarrow X = 100000$

---

(2) اكتب الصورة الاخرى لكل مما ياتي :

(a)$Log_{10}10000 = 4$ (b)$7^3 = 343$ (c)$Log_5 \frac{1}{25} = -2$ (d)$(0.01)^2 = 0.0001$

الحل :

(a)$10000 = 10^4$ (b)$Log_7 343 = 3$ (c)$\frac{1}{25} = 5^{-2}$ (d)$Log_{0.01}0.0001 = 2$

---

(3) فيما يلي علاقات غير صحيحية دائما . اعط x=a ، y=a ، حيث a>0 وبين ذلك .

الحل/

(a) $Log_a(x+y) \neq Log_a x + Log_a y$

$Log_a(a+a) \neq Log_a a + Log_a a$

$Log_a 2a \neq Log_a a + Log_a a$

$Log_a 2 + Log_a a \neq Log_a a + Log_a a$

$0.3010 + 1 \neq 1 + 1$

$1.3010 \neq 2$

(b) $Log_a(x-y) \neq Log_a x / Log_a y$

$Log_a(a-a) \neq \frac{Log_a a}{Log_a a}$

$Log_a 0 \neq \frac{1}{1}$

(c) $Log_a xy \neq Log_a x \times Log_a y$

$Log_a a.a \neq Log_a a \times Log_a a$

$Log_a a^2 \neq Log_a a \times Log_a a$

$2Log_a a \neq Log_a a \times Log_a a$

$2 \times 1 \neq 1 \times 1$

$2 \neq 1$

(d) $Log_a x^2 \neq \left(Log_a x\right)^2$

$2Log_a a \neq \left(Log_a a\right)^2$

$2 \times 1 \neq (1)^2$

$2 \neq 1$

---

(4) جد قيمة ما يلي

(a) $Log_{10} \frac{40}{9} + 4Log_{10} 5 + 2Log_{10} 6$

$\rightarrow \ Log_{10} \frac{40}{9} + Log_{10} 5^4 + Log_{10} 6^2$

$\rightarrow \ Log_{10} \frac{40}{9} . 5^4 . 6^2$

$\rightarrow \ Log_{10} \frac{40.625.36}{9} \rightarrow Log_{10} 100000 \rightarrow Log_{10} 10^5 \rightarrow 5Log_{10} 10$

$\rightarrow \ 5.1 = 5$

(b) $2Log_{10} 8 + Log_{10} 125 - 3Log_{10} 20$

$= Log_{10} 8^2 + Log_{10} 125 - Log_{10} 20^3$

$= Log_{10} 64 + Log_{10} 125 - Log_{10}(20.20.20)$

$= Log_{10} \frac{64.125}{20.20.20} \rightarrow Log_{10} \frac{8000}{8000}$

$= Log_{10} 1 = o$ $(a^0 = 1)$ حسب خاصية

$(c)\ Log_a(x^2-4) - 2Log_a(x-2) + Log_a\dfrac{x-2}{x+2}$

$\rightarrow\ Log_a(x^2-4) - Log_a(x-2)^2 + Log_a\dfrac{x-2}{x+2}$

$\rightarrow\ Log_a\dfrac{(x^2-4)(x-2)}{(x-2)^2(x+2)}$

$\rightarrow\ Log_a\dfrac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x-2)}\cancel{(x+2)}} \rightarrow\ Log_a 1$

$= Log_a 1 = 0$　　حسب الخاصية $(a^0=1)$

---

(5) جد قيمة كل مما ياتي اذا علمت أن : $Log_{10}3=0.4771, Log_{10}2=0.3010$

$(a)\ Log_{10}0.002$　$(b)\ Log_{10}2000$　$(c)\ Log_{10}12$

الحل:

$(a)\ Log_{10}0.002 = Log_{10}\dfrac{2}{1000}$

$\rightarrow Log_{10}2 - Log_{10}1000 \rightarrow\ 0.3010 - 3 = -3.3010$

* ستلاحظها عند دراستك للوغاريتمات العشرية .

العدد3.3010 كيف حصلنا عليه ؟ اللوغاريتم المقابل للعدد يتكون من شقين العددالبياني ($\bar{3}$) ويكون بالسالب والموجب . وهذا الشق يحدد مكان الفارزة بين ارقام العدد وفيما اذا كان العدد عشري من عدمه . $2 \neq$ **1.3010**والعدد 3010 هو الشق الثاني ويعرف بالكسر اللوغاريتمي ولا يجوز ان يكون بالسالب فمثلا في المثال السابق (0.3010) وبعد الطرح يصبح العددالصحيح 2 والكسر 6990. بالسالب **-2.6990** $\Leftarrow$ علينا ان نجعل الكسر العشري بالموجب كيف ؟ العدد الاكبر من 2.6990 هو العدد 3 $\therefore$ نضيف 3 ونطرح 3 حتى لاتتغير النتيجة هكذا :

$-2.6990 + 3 - 3 = \bar{3}.3010$

$(b)\ Log_{10}2000 \rightarrow Log_{10}(2\times1000) \rightarrow Log_{10}2 + Log_{10}1000$

$\rightarrow\ Log_{10}2 + Log_{10}10^3 \rightarrow Log_{10}2 + 3Log_{10}10 \rightarrow Log_{10}2 + (3\times1)$

$\rightarrow\ 0.3010 + 3 \rightarrow 3.3010$

$(c)\ Log_{10}12$

الحل / طريقة اولى

$Log_{10}12 = Log_{10}3\cdot2\cdot2 = Log_{10}3 + Log_{10}2 + Log_{10}2$
$= 0.4771 + 0.3010 + 0.3010 = 1.0791$

طريقة ثانية

$$Log_{10}12 = Log_{10}3\ .\ 4 = Log_{10}3 + Log_{10}4$$
$$= Log_{10}3 + Log_{10}2^2$$
$$= Log_{10}3 + 2Log_{10}2$$
$$= 0.4771 + 2(0.3010)$$
$$= 0.4771 + 0.6020 = 1.0791$$

---

(6) حل المعادلات الاتية :

(a) $Log_3(2x-1) + Log_3(x+4) = Log_3 5$

نرفع من الطرفين اللوغاريتم

$$Log_3(2x-1)(x+4) = Log_3 5$$
$$(2x-1)(x+4) = 5$$
$$2x(x+4) - 1(x+4) = 5$$
$$2x^2 + 8x - x - 4 = 5$$
$$2x^2 + 7x - 4 - 5 = 0$$
$$2x^2 + 7x - 9 = 0$$
$$(2x+9)(x-1) = 0$$

$9 = 9 \times 1$

$2x^2 = 2x.x$

2x 9

x 1

الحد الاوسط $9x-2x=7x$

الطرفين والوسطين $9x-2x=7x$

اما او

either $(x-1)=0 \rightarrow x=1$ or $(2x+9)=0 \rightarrow 2x=-9 \rightarrow x=\frac{-9}{2}$

لايجوز ان نهمل $x=\frac{-9}{2}$ لان x ضمن مقدار $(2x-1)$ و $(x+4)$ فنحقق حتى نعرف مجموعة الحل .

نكتب المعادلة الاصلية

$$Log_3(2x-1) + Log_3(x+4) = Log_3 5$$
$$Log_3(2.1-1) + Log_3(1+4) = Log_3 5$$

$$Log_3 1 + Log_3 5 = Log_3 5 \quad \left\{\begin{matrix} Log_3 1 \Leftrightarrow 1=3^0 \\ \therefore Log_3 1 = 0 \end{matrix}\right\}$$
$$0 + Log_3 5 = Log_3 5$$
$$Log_3 5 = Log_3 5$$

$\therefore$ $x=1$ يحقق الحل .

$$Log_3\ 2\times\left(-\frac{9}{2}\right) - 1 + Log_3\left(-\frac{9}{2} + 4\right) = Log_3 5$$
$$Log_3(-9-1) + Log_3(-4\frac{1}{2} + 4) = Log_3 5$$
$$Log_3(-10) + Log_3(-\frac{1}{2}) = Log_3 5$$

$\therefore$ $x=\frac{-9}{2}$ لا يحقق الحل .لان العدد السالب ليس له لوغاريتم $\therefore$ مج الحل = { 1 }

** طريقة اخرى للتحقق من الحل العدد الموجب اكبر من الصفر

$\therefore 2x-1>0 \rightarrow 2x>1 \rightarrow x>\frac{1}{2}$

$x+4>0 \rightarrow x>-4$

$\therefore \text{set of solution} = \{x: x>-4\} \cap \{x: x>\frac{1}{2}\} = \{x: x>\frac{1}{2}\}$

$\because$ مج الحل $\{x: x>\frac{1}{2}\}$ $\quad\therefore$ مج الحل = $\{1\}$ لان $x=1$ ضمن $\{x: x>\frac{1}{2}\}$

(b) $\text{Log}_2(3x+5) - \text{Log}_2(x-5) = 3$

نحول من دالة لوغاريتمية الى دالة اسية

$\text{Log}_2 \frac{3x+5}{x-5} = 3$

$\frac{3x+5}{x-5} = 2^3 \rightarrow \frac{3x+5}{x-5} = 8 \rightarrow 8x-40 = 3x+5$

$\rightarrow 8x-3x = 40+5 \rightarrow 5x = 45 \rightarrow \frac{5x}{5} = \frac{45}{5}$

$\rightarrow X = 9$ $\quad\therefore$ مج الحل $\{9\}$

(c) $\text{Log}_a \frac{6}{5} + \text{Log}_a \frac{5}{66} - \text{Log}_a \frac{132}{121} + \text{Log}_a 12 = X$

$\text{Log}_a (\frac{6}{5} \cdot \frac{5}{66} \cdot \frac{12}{1}) \div \frac{132}{121} = X$

$\text{Log}_a \frac{12}{11} \times \frac{121}{132} = X \rightarrow \text{Log}_a \frac{12}{11} \times \frac{11\times 11}{11\times 12} = X$

نحول الى دالة اسية

$\text{Log}_a 1 = X$

$1 = a$

$1 = a^0 = a^x$

$\therefore X = 0$ $\quad\therefore$ مجموعة الحل = $\{0\}$

(d) $\text{Log}_{10}(3x-7) + \text{Log}_{10}(3x+1) = 1 + \text{Log}_{10} 2$

نجعل لكل الحدود لوغاريتم فنقول ماهو العدد الذي لوغاريتميته للاساس 10 يساوي واحد من الطبيعي هو العدد 10

$\text{Log}_{10} Z = 1 \rightarrow Z = 10^1 \rightarrow Z = 10$

$\therefore \text{Log}_{10}(3x-7) + \text{Log}_{10}(3x+1) = \text{Log}_{10} 10 + \text{Log}_{10} 2$

$\text{Log}_{10}(3x-7)(3x+1) = \text{Log}_{10} 10 \times 2$

$(3x-7)(3x+1) = 10 \times 2$

$3x(3x+1) - 7(3x+1) = 20$

$9x^2 + 3x - 21x - 7 - 20 = 0$

$(9x^2 - 18x - 27 = 0) \times \frac{1}{9}$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

either $(x-3) = 0 \rightarrow X = 3$ or $x + 1 = 0 \rightarrow X = -1$

نحقق الاصلية (x=3) $Log_{10}(3.3 - 7) + Log_{10}(3.3 + 1) = 1 + Log_{10}2$

$Log_{10}2 + Log_{10}10 = 1 + Log_{10}2$

X=3 يحقق $Log_{10}2 + 1 = 1 + Log_{10}2 \rightarrow Log_{10}2 + 1 \rightarrow Log_{10}2+1$

نحقق (x = -1) الاصلية $Log_{10}(3(-1)-7) + Log_{10}(3(-1)+1) = 1 + Log_{10}2$

(x = -1) لايحقق لان العدد سالب $Log_{10}(-10) + Log_{10}(-2) \neq 1 + Log_{10}2$

ليس له لوغاريتم ولان $\frac{7}{3}$>1– التي يمكن استخراجها من الفترات كما وضحناه اعلاه .

∴ مج الحل = { 3 }

(1–4) اللوغاريتمات العشرية Decimal Logarithms

سبق ان درسنا اللوغاريتم لاي اساس b>0 ، b≠1 والان سنتعرف على لوغاريتم اساسه b=10 يسمى (اللوغاريتم العشري(Common Logarithm) وقد اتفق على عدم كتابة الاساس (10) حين استعماله . فمثلا $Log_{10}7$ يكتب Log 7 .

ومن المفيد هنا ان نذكر بعض اللوغاريتمات للقوى الصحيحية للعدد 10 معتمدين على $Log10^n = n$.

N	←	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	→
$Log10^n$	...	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	...

$10^4 = 10,000 \longrightarrow Log10,000 = 4$

$10^3 = 1,000 \longrightarrow Log1,000 = 3$

$10^2 = 100 \longrightarrow Log100 = 2$

$10^1 = 10 \longrightarrow Log10 = 1$

$10^0 = 1 \longrightarrow Log1 = 0$

$10^{-1} = \frac{1}{10} \longrightarrow Log0.1 = -1$

$10^{-2} = \frac{1}{100} \longrightarrow Log0.01 = -2$

$10^{-3} = \frac{1}{1000} \longrightarrow Log0.001 = -3$

$10^{-4} = \frac{1}{10000} \longrightarrow Log0.0001 = -4$

(1-5) اللوغاريتمات الطبيعية Natural Logarithm

تعرفت في البند (1-4) على اللوغاريتمات العشرية حيث كان الاساس (10) والان سنتعرف على اللوغاريتمات التي اساسها ""e"" حيث

e= 2.718281828459045

ويمكن ايجاده (للاطلاع) حسب

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$$

او

$$\lim_{n\to\infty}(2+(\frac{1}{2})+...+\frac{1}{nl})$$

وبالتقريب تكون e=2.71828 والتي تسمى باللوغاريتمات الطبيعية وتكتب بشكل $Log_e x$ وباللغة الانكليزية

"ln" لتميزها عن اللوغاريتم العشري "Log"

من تعريف (1-1) لو بدلنا الاساس b بالاساس e نحصل على $\boxed{y=\ln x \Leftrightarrow x=e^y}$

ملاحظة /

قواعد اللوغاريتمات الطبيعية نفس قواعد اللوغاريتمات العشرية $\boxed{\ln e^x = x \,\forall x \in R^{++}}$

نتيجة (1)

البرهان : L.S الطرف الايسر $\ln e^x = x\ln e$

$(\ln_e e=1)$ $=x(1)$

R.S الطرف الايمن $=x$

نتيجة (2) $Log_b x=\frac{Logx}{Lodb}$ $Log_b x=\frac{\ln x}{\ln b}$

قاعدة تبديل الاساس $b>0, b\neq1$

البرهان :

الطرف الايسر $*Log_b x$

نفرض ان : $y=Log_b x \rightarrow x=b^y ....(1)$

ناخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي العلاقة في (1) $\ln x = \ln b^y$

(قاعدة رقم (2) من قواعد اللوغاريتمات) $\ln x = y\ln b$

الطرف الايمن $= y=\frac{\ln x}{\ln b}$

مثال / ما قيمة

$$\frac{1}{\log_3 15}+\frac{1}{\log_5 15}$$

الحل : نحول القسمة الى ضرب

$$\frac{1}{\log_3 15}+\frac{1}{\log_5 15}=\frac{1}{\ln 15/\ln 3}+\frac{1}{\ln 15/\ln 5}$$

$$\frac{1}{\log_3 15}+\frac{1}{\log_5 15}=\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 3}}+\frac{1}{\frac{\ln 15}{\ln 5}}=\frac{\ln 3}{\ln 15}+\frac{\ln 5}{\ln 15}$$

$$=\frac{\ln 3+\ln 5}{\ln 15}=\frac{\ln 3.5}{\ln 15}=\frac{\ln 15}{\ln 15}=1$$

(و.هـ.م)

مثال / جد قيمة ما يلي : (a) $\ln e$ (b) $\ln 1$

الحل :

(a) $\ln e = 1$ كيف $(\ln_e e \rightarrow e=e^1)$

(b) $\ln 1 = 0$ كيف $(\ln_e 1 \rightarrow 1=e^0)$

مثال / حل المعادلات الاتية (a) $10^{2x}=200$ (b) $e^{3t-1}=2$

الحل : ناخذ لوغاريتم الطرفين

(a) $10^{2x}=200$

$\log_{10}10^{2x}=\log_{10}200$

$2x\cdot\log_{10}10=\log_{10}2\times 100$

$2X=\log_{10}2+\log_{10}10^2 \rightarrow 2X=\log_{10}2+2\log_{10}10$

$2x=0.3010+2\times 1$

$2X=2.3010 \rightarrow X=\frac{2.3010}{2} \rightarrow X=1.15$

الحل : ناخذ لوغاريتم الطرفين

(b) $e^{3t-1}=2$

$\ln e^{3t-1}=\ln 2$

$(3t-1)\ln e=\ln 2$

$3t-1=\ln 2$

$3t=1+\ln 2$

$t=\frac{1+\ln 2}{3} \rightarrow t\simeq 0.56$ استخدم الحاسبة

استخدام الالة الحاسبة

بعد دراستنا للوغاريتمات العشرية والطبيعية وبعض قوانين اللوغاريتمات . الان سندرس كيفية استخدام الحاسبة (calculator) لايجاد لوغاريتم عدد ولوغاريتمات الاعداد المقابلة .

اولاً / ايجاد لوغاريتم العدد :

(أ) في حالة اللوغاريتمات العشرية (Log)

*** نكتب العدد المعطى ثم نضغط على المفتاح Log فيظهر الناتج .**

مثال 1/ استخدم التك الحاسبة لتجد :

(1) Log7 (2) Log13 (3) Log0.08 (4) Log1.5

الحل /

(1) نكتب 7 ثم نضغط Log الناتج = 0.84509804

أي Log 7 = 0.84509804

(2) نكتب 13 نضغط Log الناتج = 10113941352

(3) نكتب 0.08 نضغط Log الناتج = 1.096910013–

(4) نكتب 1.5 نضغط Log الناتج = 0.176091259

(ب) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

*** نكتب العدد نضغط المفتاح Ln فيظهر الناتج**

مثال 2/ استخدم التك الحاسبة لتجد :

(1) Ln 7 (2) Ln 13 (3) Ln 0.08 (4) Ln 105

الحل /

(1) نكتب 7 نضغط Ln الناتج = 1.945910149

(2) نكتب 13 نضغط Ln الناتج = 2.564949357

(3) نكتب 0.08 نضغط Ln الناتج = 2.525728644 –

(4) نكتب 1.5 نضغط Ln الناتج = 0.405465108

ثانياً / ايجاد العدد المقابل اذا علم لوغاريتمه

(أ) في حالة اللوغاريتمات العشرية

* نكتب لوغاريتم العدد المعطى نضغط على مفتاح 2ndF ويكون لونه عادةً ((اصفر ، ازرق ...))

ثم نضغط على **Log** فيظهر العدد المطلوب .

مثال 3/ باستخدام التك الحاسبة جد الاعداد المقابلة التي لوغاريتماتها العشرية هي :

(1) 0.84509804 (2) 1.113943352 (3) - 1.096910013 (4) 0.176091259

الحل /

(1) نكتب **0.84509804** نضغط 2ndF ثم نضغط Log فيظهر 7

(2) نكتب **1.113943352** نضغط 2ndF ثم نضغط Log يظهر 12.9999999 ≅ 13

(3) نضغط مفتاح $\boxed{-}$ نكتب **0.096910013** ثم نضغط $\boxed{=}$ فيظهر **0.096910013** ثم نضغط 2ndF

ثم نضغط Log يظهر 0.08

(4) نكتب 0.176091259 نضغط 2ndF ثم Log يظهر 1.5

ملاحظة / قارن بين مثال (1) مع مثال (3)

(ب) في حالة اللوغاريتمات الطبيعية ((Ln))

* نكتب لوغاريتم العدد المعطى ثم نضغط على مفتاح 2ndF ثم نضغط Ln فيظهر العدد المطلوب

مثال 4/ جد الاعداد المقابلة للاعداد التي لوغاريتمها الطبيعي هي :

(1) 1.945910149 (2) 2.564949357 (3) - 2.525728644 (4) 0.405465108

الحل /

(1) نكتب 1.945910149 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 7

(2) نكتب 2.564949357.ثم نضغط 2ndF ثم مفتاح Ln يظهر 12.9999999 ≅ 13

(3) نضغط $\boxed{-}$ نكتب 2.525728644 ثم $\boxed{=}$ فيظهر 2.525728644 – ثم نضغط 2ndF

ثم Ln فيظهر 0.08

(4) نكتب 0.05465108 نضغط 2ndF ثم Ln فيظهر 1.5

امثلة متنوعة (استخدم آلتك الحاسبة)

مثال 1/ جد قيمة $Log_4 3$

الحل / باستخدام قاعدة تبديل الاساس

$Log_4 3 = Log3 / Log4 = 0.4771 / 0.6021 = 0.7924$

مثال 2/ جد قيمة $Log7 + Ln5$

الحل /

$Log\,7 = 0.8451$ نجد

$Ln\,5 = 1.6094$

$Log7 + Ln5 \cong 0.8451 + 1.6094$

$= 2.4545$

مثال 3/ جد قيمة $Log_5 16 - Log_5 2$

الحل /

$Log_5 16 - Log_5 2 = Log_5 16 / 2$

$= Log_5 8$ بتبديل الاساس

$= Log8 / Log5 \cong 0.9031 / 0.6999$

$\cong 1.2903$

مثال 4/ جد قيمة $x = (1.05)^{15}$ باستخدام اللوغاريتم

الحل /

$x = (1.05)^{15}$ نأخذ لوغاريتم الطرفين

$Log\,x = 15\,Log\,1.05$ باستخدام آلتك الحاسبة

$Log\,x = 15 \times 0.0212$

$Log\,x = 0.3180$

$\therefore\ x = 2.0797$

مثال 5/ في سنة **1995** حدثت هزة ارضية في احدى مدن العالم برجةبدرجة **8.0** على مقياس رختر ، وحدثت هزة ارضية اخرى في عام **2001** في مدينة اخرى من العالم وبمقدار **6.8** على مقياس رختر ايضا ، قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين .

الحل /

$$R = \frac{E \cdot 30^{8.0}}{E \cdot 30^{6.8}} = \frac{30^{8.0}}{30^{6.8}}$$

$$R = 30^{8.0-6.8} = 30^{1.2}$$

$$LogR = 1.2Log30$$

$R = 59.2$ (باستخدام الحاسبة اليدوية نجد قيمة R)

مثال 6/ جد الوسط الهندسي للاعداد : 16 ، 15 ، 14 ، 13

الحل /

الوسط الهندسي = $\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)....(x_n)}$

$$M = \sqrt[4]{(13)(14)(15)(16)}$$

$$\text{Log } M = 1/4\ [\text{Log}13 + \text{Log}14 + \text{Log}15 + \text{Log}16]$$

$$\text{Log } M = 1/4\,[1.1139 + 1.1462 + 1.1761 + 1.2041]$$

$$= 1/4 \times 4.6403$$

$$= 1.1601$$

$$\therefore M = 14.458$$

مثال 7/ اوجد الرقم الهيدروجيني لماء البحر اذا كان ايون الهيدروجين $[H^+]$ له حوالي : 3.2×10^{-9}

الحل /

$PH = -\text{Log}[H^+]$ الرقم الهيدروجيني

$$= -\text{Log } 3.2 \times 10^{-9}$$

$$= -[\text{Log}3.2 + \text{Log}10^{-9}]$$

$$= -[\text{Log}3.2 - 9\text{ Log}10]$$

$$= -[\text{Log}3.2 - 9]$$

$$= -\text{Log}3.2 + 9$$

$$= -0.5052 + 9$$

$$= 8.494$$

مثال 8/ بفرض انك تستثمر (2) مليون دينار بفائدة مركبة سنوية مستمرة قدرها 2% أوجد جملة ما ستحصل عليه بعد (10) سنوات

الحل /

قانون حساب الفائدة المركبة المستمرة هو $R = m\,e^{n.r}$

حيث m = المبلغ ، r = الفائدة ، n = عدد السنوات

$$R = 2.000.000 \times e^{\frac{2}{100}\times 10}$$

$R = 2.000.000 \times e^{1/5}$ بأخذ Ln الطرفين

$$\text{Ln } R = \text{Ln } 2.000.000 + 1/5$$

$$= 14.7087$$

$$\therefore R = 2442805$$

حلول تمارين (2-1)

الحاسبة اليدوية المستخدمة في الحل هي Casio طراز Fx-991ES

(1) جد قيمة كل من (a) $Log_{10}8$ (b) $Log_3 15$ (c) ln200

الحل : في حالة Log العشري

* اضغط مفتاح Log ثم اكتب العدد المعطى ثم = فيظهر الناتج

(a) Log ثم 8 ثم = (a) 0.903090

(b) Log(15) ثم ÷ ثم Log(3) ثم =

(b) 2.464974

عند كتابتك لاي log لاتنسى اغلاق القوس .

(c) ln ثم 200 ثم = (c) 5.298317

---

(2)جد قيمة كل من (a) $Log_2 52$-Log27 (b) Log33+$Log_8 33$+ln33

الحل : (a) Log(52) ثم ÷ ثم Log(2) ثم ÷ ثم Log(27) ثم = (a) 4.259076

عند كتابتك لاي log لاتنسى اغلاق القوس

(b) Log(33) ثم + ثم Log(33) ثم ÷ ثم Log(8) ثم + ثم ln(33) ثم = (b) 6.696486

---

(3) جد قيمة كل من (b) $(1.02)^{10}$

(a) $\sqrt[3]{(65.26)^2}$

الحل : (a) اضغط shift واكمل (b) 1.21899 (a) 16.209317

---

(4) حل المعادلات التالية (c) $(5)(2^x)=4^{1-x}$ (b) $e^{3x+1}=17$

(a) $3^x=26$

الحل : باللوغاريتمات (a) $\ln 3^x=\ln 26$

استخدم الحاسبة $x\ln 3 = \ln 26 \rightarrow x=\frac{\ln 26}{\ln 3}$

اضغط $\frac{\square}{\square}$ واكمل مج الحل = {2.965647} 2.965647

(b) $e^{3x+1}=17 \rightarrow \ln e^{3x+1}=\ln 17 \rightarrow 3x+1=\ln 17$

مج الحل {0.611071}

$\rightarrow 3x = \ln 17 - 1 \rightarrow X = \dfrac{\ln 17 - 1}{3} = 0.611071$

(c) $(5)(2^x)=4 \rightarrow (5)(2^x)=2^{2(1-x)} \rightarrow (5)(2^x)=2^{2-2x}$

$\rightarrow (5)(2^x)=\dfrac{2^2}{2^{2x}} \rightarrow (5)(2^x)(2^{2x})=(4)$

$\rightarrow 2^{3x}=\dfrac{4}{5} \rightarrow 2^{3x}=0.8 \rightarrow \ln 2^{3x}=\ln 0.8$

$3x\ln 2 = \ln 0.8 \rightarrow x\ln 2^3 = \ln 0.8$

$X\ln 8 = \ln 0.8 \rightarrow X = \dfrac{\ln 0.8}{\ln 8}$ استخدم الحاسبة

$x=0.107309$ مج الحل = {0.107309}

---

(5) جد الوسط الهندسي للاعداد التالية : 10,11,12,13,14,15

الحل :

الوسط الهندسي = $\sqrt[n]{(x_1)(x_2)(x_3)....(x_n)}$

$M=\sqrt[6]{10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 \times 15} = 43.569657 \simeq 43.5696 \simeq 43.57$

---

(6) اثبت ان (a) $\dfrac{1}{\mathrm{Log}_a abc}+\dfrac{1}{\mathrm{Log}_b abc}+\dfrac{1}{\mathrm{Log}_c abc}=1$

الحل : L.S وممكن

$$\frac{1}{\frac{\mathrm{Log}abc}{\mathrm{Log}a}}+\frac{1}{\frac{\mathrm{Log}abc}{\mathrm{Log}b}}+\frac{1}{\frac{\mathrm{Log}abc}{\mathrm{Log}c}}\left\{\mathrm{Log}_a abc=\frac{\ln abc}{\ln a}\right\}$$

$$=\frac{\mathrm{Log}_a}{\mathrm{Log}abc}+\frac{\mathrm{Log}_b}{\mathrm{Log}abc}+\frac{\mathrm{Log}_c}{\mathrm{Log}abc}=\frac{\mathrm{Log}_a+\mathrm{Log}_b+\mathrm{Log}_c}{\mathrm{Log}abc}$$

$$=\frac{\mathrm{Log}abc}{\mathrm{Log}abc}=1=R.S$$

(b) $\mathrm{Log}\dfrac{40}{9}+2(2\mathrm{Log}5+\mathrm{Log}6) = 5$

$\mathrm{Log}\dfrac{40}{9}+4\mathrm{Log}5+2\mathrm{Log}6$ الطرف الايسر

$=\mathrm{Log}\dfrac{40}{9}+\mathrm{Log}5^4+\mathrm{Log}6^2$

$=\mathrm{Log}\dfrac{40}{\cancel{9}_{1}}\times 625 \times \cancel{36}^{4}=\mathrm{Log}40\times 2500$

$=\mathrm{Log}100000=\mathrm{Log}10^5=5=$ الطرف الايسر

(7) اذا كان $b = Log_a c$, $a = Log_c b$ فان $Log_b a = \frac{1}{ab}$

الطرف الايمن $= \frac{1}{ab} = \frac{1}{Log_c b \times Log_a c} = \frac{1}{\frac{Logb}{\cancel{Logc}} \cdot \frac{\cancel{Logc}}{Loga}} = \frac{Loga}{Logb}$

الطرف الايسر $Log_b a = \frac{Loga}{Logb}$

$\therefore$ **الطرف الايمن = الطرف الايسر**

---

(8) تركيز ايون الهيدروجين [H^+] ← [علامة التركيز] في اللبن هو 2.5×10^{-7}
فجد الرقم الهيدروجيني له (ph)

القانون

$$PH = -Log\left[H^+\right]$$
$$= -Log 2.5 \times 10^{-7}$$
$$= -[\ Log2.5 + (-7Log10)\ ]$$
$$= -[Log2.5 - 7]$$
$$= 7 - Log2.5 = 6.602060$$ استخدم الحاسبة

---

(9) باستخدام قانون الفائدة المركبة $R = me^{n.r}$ مليون دينار بفائدة قدرها 2.5% ولمدة (6) سنوات
جد جملة ماسيحصل عليه .

القانون : $\boxed{R = me^{n.r}}$

$$R = 1,000,000 \times e^{\frac{25}{1000} \times 6}$$
$$R = 1,000,000 \times e^{\frac{150}{1000}}$$
$$R = 1,000,000 \times e^{\frac{3}{20}}$$ باخذ Ln للطرفين
$$LnR = ln1,000,000 + \frac{3}{20}$$
$$= 13.965511$$
$$= 1161834.243$$
$$= 1161834 \text{ dinnar}$$

---

(10) جد سرعة صاروخ نسبة كتلته نحو 10 (النسبة بدون وحدات) ، وسرعة انطلاق بخاره قدرها 3.5 كم/ثانية ، وزمن اشتعال المحرك (50 sec) .السرعة $(speed)(v \to velocity)$

<u>القانون</u>

$S = -0.0098n + VLnk$

$S = -0.0098 \times 50 + 3.5Ln10$

$S = 7.569048\ km/sec$ استخدم الحاسبة اليدوية مرة واحدة

---

(11) أي مقدار من المقادير التالية : 1) $Log\left(\frac{a}{b}\right)^2$ 2) $Log\frac{a^2}{b}$

3) $Log(ab)^2$ 4) $Loga^2 - Logb$

يكافئ المقدار $2Loga - Logb$

الحل :

$$2Loga - Logb = \underbrace{Loga^2 - Logb}_{\text{يوافق تسلسل 4}} = \underbrace{Log\frac{a^2}{b}}_{\text{يوافق تسلسل 2}}$$

∴ المقدارين (2)،(4) يكافئان المقدار المعطى

---

(12) في سنة 1997 حدثت هزة ارضية في احدى مدن العالم برجةبدرجة 4.9 على مقياس رختر، وحدثت هزة ارضية اخرى في عام 1999 في مدينة اخرى من العالم وبمقدار 7.0 على مقياس رختر ايضا ، قارن بين الطاقة المنطلقة من هاتين الهزتين .

الحل /

$$R = \frac{E \cdot 30^{7.0}}{E \cdot 30^{4.9}} = \frac{30^{7.0}}{30^{4.9}}$$

$$R = 30^{7.0-4.9} = 30^{2.1}$$

$$LogR = 2.1Log30$$

$R = 104$ (باستخدام الحاسبة اليدوية نجد قيمة R)

---

(13) اختر الاجابة الصحيحة للمقدار Loga/b ؟

(1)Loga/Logb $\boxed{\text{(2)Loga-Logb}}$ (3)Log(a-b) (4) ليس أي منها

الحل : حسب القواعد اللوغاريتيمة Loga/b=Loga-Logb

∴ التسلسل (2) هو الحل الصحيح

الفصل الثاني

المتتابعات Sequances

[1 – 2] المتتابعة كدالة وتعريف

لتكن f دالة من { 1,2,3,.......,10 } الى R مجموعة الاعداد الحقيقية .
وقاعدة اقترانها الصريحة (f(n)=5+2n) . وقد يكون لها قاعدة اقتران ضمنية (استنتاجية) او لايكون لها اية قاعدة .

$f : \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 10\} \to R$

$f(n) = 5 + 2n$

ان هذه الدالة هي دالة مجالها Z^+ او اية مجموعة جزئية منها مرتبة $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, 10\}$ ومجالها المقابل R أي انها تعين لكل عدد صحيح موجب n الصورة (5+2n) وان Z^+ تعني الاعداد الصحيحة الموجبة والتي تعني الاعداد الطبيعية عدا $\{0\}$ (ط / $\{0\}$) . ويعين مداها كمايلي :

$f(n) = 5 + 2n$

$f(1) = 5 + 2 \times 1 = 7$

$f(2) = 5 + 2 \times 2 = 9$

$f(3) = 5 + 2 \times 3 = 11$

$f(10) = 5 + 2 \times 10 = 25$

ويمكن ان نعبر عن هذه الدالة على صورة ازواج مرتبة كالاتي :

$\{(1,7), (2,9), (3,11), \ldots\ldots, (10,25)\}$

ولان مجال الدالة هو المجموعة $\{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ فانه يمكن كتابة مداها مرتبا على الصورة $\{7, 9, 11, \ldots, 25\}$ على اعتبار ان مجالها معروف هو Z^+ او اية مجموعة جزئية منها يبدأ بالعدد (1) أي ان صورة (1) = 7 وصورة (2) = 9 وهكذا .
وهذه الدالة تسمى [متتابعة] والاعداد المتتابعة تسمى [حدود المتتابعة] .

المتتابعة هي دالة مجالها Z^+ (في هذه الحالة تسمى متتابعة غير منتهية (Infinite Sequences) او أي مجموعة جزئية مرتبة ومنتهية تنتمي الى Z^+ تبدأ بالعدد (1) او على الصورة $\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$ (في هذه الحالة تسمى متتابعة منتهية) ومجالها المقابل R

الدالة $f = \{(1,3), (2,7), (5,4), (6,10), (7,9)\}$ لا تسمى متتابعة لان مجالها $\{1, 2, 5, 6, 7\}$ وليس $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ أي ان مجالها ليس مجموعة جزئية مرتبة ومتتابعة من Z^+ تبدأ بالرقم ١ .

مثال1/ لتكن $f(n) = \frac{1}{n}, n \in Z^+$ اكتب المتتابعة ؟

الحل / مستمرة : ...... , $f(3) = \frac{1}{3}$ ، $f(2) = \frac{1}{2}$ ، $f(1) = \frac{1}{1} = 1$ **وتكتب بالشكل الاتي**

$$\left\langle 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots \right\rangle$$

مثال3/ لتكن $f(n) = n , n \in R$ هل تمثل متتابعة ؟

الحل / ليست متتابعة لان مجالها هو R وليس Z^+ او أي مجموعة مرتبة منها على صورة $\{1 , 2 , 3 , ... , n\}$

ملاحظة / اذا لم يحدد مجال المتتابعة نعتبره Z^+

[2 – 2] الحد العام للمتتابعة General Term For Sequences

الحد العام او (الحد النوني) هو قاعدة عامة يمكن منها ايجاد كل حدود المتتابعة .

فمثلا متتابعة الاعداد الزوجية : ......,2,4,6,8 حدها العام هو : $\boxed{f(n) = 2n , n \in Z^+}$

نرمز للحد العام بالرمز u_n فيكون u_n $F(n) = 2n$ بمعنى

$u_1 = f(1) = 2 \times 1 = 2 \quad , \quad u_2 = F(2) = 2 \times 2 = 4$ وهكذا .

وسنستخدم الرمز u_n لتعني المتتابعة التي حدها العام u_n وتكتب .... , u_n ...... u_1 u_2

حدها العام $n \in Z^+$ حيث ان (where as) $u_n = 2n - 1$ هي متتابعة الاعداد الفردية

للفردية $u_n = 2n - 1$ (حيث مجال الدلة Z^+) $u_n = 2n$ للزوجية

مثال4/ اكتب الثلاثة حدود الاولى من المتتابعة التي حدها العام $u_n = 3$ ؟

الحل / $u_1 = 3$ ، $u_2 = 3$ ، $u_3 = 3$

∴ المتتابعة $< 3 , 3 , 3 >$

ملاحظات

1. المتتابعة التي حدودها متساوية تسمى [المتتابعة الثابتة] .
2. ترتيب الحدود يُعد خاصية مميزة للمتابعة ولذلك فان المتتابعتين :

$< f_n > = < 3,2,7,9,4 >$ ، $< H_n > = < 3,7,2,9,4 >$ مختلفتان لان بينهما

بينما

$f_2 = 2$ While $H_2 = 7$

في حين ان

$f_3 = 7$ while $H_3 = 2$

3. قد لا تكون لبعض المتتابعات قاعدة لحدها العام فمثلاً

المتتابعة $< 2,3,5,7,11,13,17,19,........ >$ تعرف بمجموعة العوامل الاولية

ليس لحدها العام قاعدة حيث لا يمكن ايجاد صورة عامة يمكن بواسطتها ايجاد كل حدود هذه المتتابعة

حلول تمارين (1-2)

(1) أي من العبارات التالية صحيحة وايها خاطئة :

أ/ كل دالة مجالها Z^+ هي متتابعة . (صح)

ب/ كل دالة مداها Z^+ هي متتابعة . (خطأ) بعضها صح

ج/ كل دالة مجالها $\{3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8\}$ هي متتابعة . (خطأ) لان $1 , 2 \notin (n)$

د/ كل دالة مجالها Z هي متتابعة . (خطأ) لانه يجب ان يكون مجالها Z^+

هـ/ كل دالة مجالها $\{1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7\}$ هي متتابعة منتهية . (صح)

و/ كل دالة مجالها $\{1 , 2 , 3 , 4 , 6 , 7 , 8 , 9\}$ هي متتابعة . (خطأ) لان $5 \notin$ domain

ز/ الحد الرابع في المتتابعة $\langle \sqrt{n} / n + 1 \rangle$ يساوي $\frac{2}{5}$. (صح)

الحل / نكتب المجال $\{1 , 2 , 3 , 4 , ...\}$ $u_4 \frac{\sqrt{n}}{n+1}$

$$u_4 = \frac{\sqrt{4}}{4+1} = \frac{2}{5}$$

ح/ مجال المتتابعة $\langle 2,4,6,....,96 \rangle$ هو Z^+ . (خطأ)

المتتابعة اعلاه منتهية فان مجالها هو مجموعة جزئية من Z^+ وليس كل Z^+

ط/ في المتتابعة $\langle u_n \rangle$ حيث . u_{n+1} n u_n فان الحدان الاول والثاني مختلفان عندما (n=1) .(خطأ) لماذا خاطئة

(n=1)

$$u_{n+1} = n\, u_n$$

$$u_{1+1} = 1 \times u_1$$

$$u_2 = u_1$$

لان الحدان الاول والثاني متساويان

ي/ في المتتابعة $\langle n^2 \rangle$ يكون $u_{n+1} \langle u_n$.(خطأ) والصحيح هو $\boxed{u_{n+1} > u_n}$

الاكبر – الاصغر = عدد موجب $u_n - u_{n+1} > 0$

$n^2 - (n+1)^2 > 0$

$n^2 - (n^2 + 2n + 1) > 0$

$n^2 - n^2 - 2n - 1 > 0$

$-2n - 1 > 0$ عبارة خاطئة

$$u_{n+1} > u_n$$

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

$$(n+1)^2 - n^2 > 0$$

$$n^2+2n+1-n^2 > 0$$

$$(n+1)^2 - n^2 > 0$$

$2n+1 > 0$ عبارة صحيحة

(2) اكتب كلاً من المتتابعات الاتية مكتفياً بذكر الحدود الستة الاولى :

(a) $u_n = n^2 - 2n$

الحل /

$u_1 = 1^2 - 2 \times 1 = 1 - 2 = \underline{-1}$, $u_2 = 2^2 - 2 \times 2 = 4 - 4 = \underline{0}$

$u_3 = 3^2 - 2 \times 3 = \underline{3}$, $u_4 = 4^2 - 2 \times 4 = \underline{8}$

$u_5 = 5^2 - 2 \times 5 = \underline{15}$, $u_6 = 6^2 - 2 \times 6 = 36 - 12 = \underline{24}$

$\langle u_n \rangle = \langle -1, 0, 3, 8, 15, 24, \ldots\ldots \rangle$

(b) $u_n = 2$

$\langle u_n \rangle = \langle 2, 2, 2, 2, 2, 2, \ldots\ldots \rangle$

(c) $u_n = \frac{6}{n}$

$u_1 = \frac{6}{1} = \underline{6}$, $u_2 = \frac{6}{2} = \underline{3}$, $u_3 = \frac{6}{3} = \underline{2}$, $u_4 = \frac{6}{4} = \underline{\frac{3}{2}}$, $u_5 = \underline{\frac{6}{5}}$, $u_6 = \frac{6}{6} = \underline{1}$

$\langle u_n \rangle = \langle 6, 3, 2, \frac{3}{2}, \frac{6}{5}, 1, \ldots\ldots \rangle$

(d) $u_{n+1} = \frac{4}{1 + u_n}$, $u_1 = 1$

الحل / عندما $n=1$ $u_{1+1} = \frac{4}{1 + u_1} \rightarrow u_2 = \frac{4}{1+1} = \frac{4}{2} = 2$

عندما $n=2$ $u_{2+1} = \frac{4}{1 + u_2} \rightarrow u_3 = \frac{4}{1+2} = \frac{4}{3}$

عندما $n=3$ $u_{3+1} = \frac{4}{1 + u_3} \rightarrow u_4 = \frac{4}{1 + \frac{4}{3}} = \frac{4}{\frac{7}{3}} = \frac{12}{7}$

عندما $n=4$ $u_{4+1} = \frac{4}{1 + u_4} \rightarrow u_5 = \frac{4}{1 + \frac{12}{7}} = \frac{4}{\frac{19}{7}} = \frac{28}{19}$

عندما $n=5$ $u_{5+1} = \frac{4}{1 + u_5} \rightarrow u_6 = \frac{4}{1 + \frac{28}{19}} = \frac{4}{\frac{47}{19}} = \frac{76}{47}$

اذن المتتابعة هي $\langle 1, 2, \frac{4}{3}, \frac{12}{7}, \frac{28}{19}, \frac{76}{47}, \ldots\ldots \rangle$

ملاحظة / $1 + \frac{4}{3} = 1\frac{4}{3} = \frac{3 \times 1 + 4}{3} = \frac{3+4}{3} = \frac{7}{3}$

وهكذا $1 + \frac{12}{7} = 1\frac{12}{7} = \frac{7 \times 1 + 12}{7} = \frac{7+12}{7} = \frac{19}{7}$

(e) $u_n = 1 - \frac{2}{n}$

$u_1 = 1 - \frac{2}{1} = \underline{-1}$, $u_2 = 1 - \frac{2}{2} = 0$, $u_3 = 1 - \frac{2}{3} = \underline{\frac{1}{3}}$ واحد - ثلثين=ثلث

$u_4 = 1 - \frac{2}{4} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ واحد – نصف = نصف

$u_5 = 1 - \frac{2}{5} = \underline{\frac{3}{5}}$ الواحد مقسم الى خمسة اقسام

$u_6 = 1 - \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$ واحد – ثلث = ثلثين

$\therefore \ < u_n > = < -1 , 0 , \frac{1}{3} , \frac{1}{2} , \frac{3}{5} , \frac{2}{3} , ... >$

(f) $u_n = (-1)^2$

$u_1 = (-1)^1 = \underline{-1}$, $u_2 = (-1)^2 = \underline{1}$ (الاسس الزوجية) يعكس الاشارة

$u_3 = (-1)^3 = \underline{-1}$ (الاسس الفردية) لايعكس الاشارة يبقيها

$u_4 = (-1)^4 = \underline{1}$, $u_5 = (-1)^5 = \underline{-1}$, $u_6 = (-1)^6 = \underline{1}$

$< u_n > = < -1 , 1 , -1 , 1 , -1 , 1 , ... >$

(g) $u_n = 2^{n-1}$

$u_1 = 2^{1-1} = 2^0 = \underline{1}$, $u_2 = 2^{2-1} = 2^1 = 2$, $u_3 = 2^{3-1} = 2^2 = \underline{4}$

$u_4 = 2^{4-1} = 2^3 = \underline{8}$, $u_5 = 2^{5-1} = 2^4 = \underline{16}$, $u_6 = 2^{6-1} = 2^5 = \underline{32}$

$< u_n > = < 1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 , ... >$ متتابعة هندسية

(h) 1 .... Odd   n فردية
2 .... even   n زوجية

اعداد المجال الفردية واعداد المجال الزوجية نكتب مجموعة المجال

$\text{Domain} = \{ \underline{1 , 2^* , 3 , 4^* , 5 , 6^* , 7 , 8^* , ...} \}$

* زوجية even — فردية odd

$u_1 = 1$, $u_3 = 1$, $u_5 = 1$, $u_7 = 1$ الفردية

$u_2 = 2$, $u_4 = 2$, $u_6 = 2$, $u_8 = 2$ الزوجية

$< u_n > = < 1 , 2 , 1 , 2 , 1 , 2 , ... >$

(3) في المتتابعة $\langle u_n \rangle$ حيث $u_n = n^2 + 2n$ اثبت ان $u_{n+1} > u_n$ ؟

في المعادلة $u_n = n^2 + 2n$ مرة نعوض عن n بـ n . ومرة اخرى نعوض عن n بـ n+1

$n = n \ , \ u_n = n^2 + 2n$

$n = n + 1 \ , \ u_{n+1} = (n+1)^2 + 2(n+1)$

البرهان

$u_{n+1} > u_n$ mean $u_{n+1} - u_n > 0$

$(n+1)^2 + 2(n+1) - (n^2 + 2n) > 0$

$(n+1)^2 + 2n + 2 - n^2 - 2n > 0$

$\cancel{n^2} + 2n + 1 + \cancel{2n} + 2 - \cancel{n^2} - \cancel{2n} > 0$

$2n + 3 > 0$ n هو من Z^+

يعني موجب ∴ المتراجحة $u_{n+1} > u_n$ صحيحة

---

(4) اكتب ثمانية حدود من المتتابعة بفرض ان :

$$f : Z^+ \to R \quad , \quad u_n = \begin{cases} n + 2 \ \ldots\ldots \ n & \text{odd} \\ \dfrac{4}{n} \ \ldots\ldots\ldots\ldots \ n & \text{even} \end{cases}$$

الزوجي $n = 2,4,6,8,$ الفردي $n = 1,3,5,7,9$

$\boxed{u_n = n + 2}$ $u_1 = 1 + 2 = \underline{3} \ , \ u_3 = 3 + 2 = \underline{5} , u_5 = 5 + 2 = \underline{7} , \ u_7 = 7 + 2 = \underline{9}$ الفردية

$\boxed{u_n = \frac{4}{n}}$ $u_2 = \frac{4}{2} = \underline{2} \ , \ u_4 = \frac{4}{4} = \underline{1} , u_6 = \frac{4}{6} = \underline{\frac{2}{3}} , \ u_8 = \frac{4}{8} = \underline{\frac{1}{2}}$ الزوجية

$$< u_n > = \left\{ < 3 , 2 , 5 , 1 , 7 , \frac{2}{3} , 9 , \frac{1}{2} , \ldots > \right\}$$

المتتابعة الحسابية (العددية) / هي متتابعة يكون فيها ناتج طرح كل حد فيها من الحد الذي يليه مباشرة يساوي عدد ثابت يسمى اساس المتتابعة رمزهُ d حيث $d=u_{n+1} - u_n$.

ويمكن لتعيين المتتابعة الحسابية معرفة حدها الاول a وأساسها d فعند اضافة الاساس للحد الاول نحصل على الحد الثاني وباضافة الاساس للحد الثاني نحصل على الحد الثالث وهكذا .

فالمتتابعة الحسابية التي حدها الاول a=2 وأساسها d=3 هي $\langle\, 2 , 5 , 8 , 11 , \dots \,\rangle$

والمتتابعة الحسابية التي حدها الاول a وأساسها d هي $\langle\, a , a+d , a+2d , a+3d , \dots \,\rangle$

لنلاحظ في المثال الاول / ① $\langle U_n \rangle = \langle\, 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22 \,\rangle$

هي مجموعة من الاعداد مرتبة بالشكل 1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22

1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22

3 3 3 3

ما بين العدد 4 والعدد 7 كم سيكون = $\boxed{3}$ ، ما بين العدد 7 والعدد 10 كم سيكون = $\boxed{3}$ ،

ما بين العدد 10 والعدد 13 كم سيكون = $\boxed{3}$ ، ما بين العدد 16 والعدد 19 كم سيكون = $\boxed{3}$ ،

اذن العدد $\boxed{3}$ سيكون اساس المتتابعة ولو فرضنا رمز الاساس d فيكون d = 3

ويمكن ان يكون الاساس موجب ، ويمكن الاساس ان يكون سالب . مثل d = 3 أو $d = \boxed{-3}$

مثال/ أوجد اساس المتتابعة 22 , 16 , 10 , 4

كم سيكون اساس المتتابعة ؟ اذن اساس المتتابعة سيكون = 6

لو قلنا : اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة ؟ ستكون الحدود هي 40 , 34 , 28

ويكون السؤال بالشكل

مثال/ اكمل ثلاثة حدود للمتتابعة 22 , 16 , 10 , 4

الحل / الاساس = $\boxed{6}$ = d

الحدود الثلاثة هي 40= 6 + 34 , 34= 6 + 28 , 28 = 6 + 22

اذن المتتابعة هي 36 , 34 , 28 , 22 , 16 , 10 , 4

مثال/ أوجد ثلاثة حدود للمتتابعة 36 − , 23 − , 10 − , 3

الحل / الاساس = $\boxed{-13}$ = d

ثلاثة حدود متتابعة هي $-36 - 13 = \boxed{-49}$, $-49 - 13 = \boxed{-62}$, $-62 - 13 = \boxed{-75}$

اذن المتتابعة هي 75 − , 62 − , 49 − , 36 − , 23 − , 10 − , 3

الحد النوني / نلاحظ ان الحد الأول في المثال ①

U_1 U_2 U_3 U_4 U_5 U_6 U_7 U_8

1 , 4 , 7 , 10 , 13 , 16 , 19 , 22

3 3 3 3

فالحد النهائي (الاخير) = الحد الأول a + (عدد الحدود n − 1) × الأساس d

فالحد النوني
$$\underset{\text{الحد الاخير}}{U_n} = \underset{\text{الحد الاول}}{a} + (\underset{\text{عدد الحدود}}{n} - 1)\underset{\text{الاساس}}{d}$$

امثلة الكتاب /

مثال (1) / أكتب المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 7 ، واساسها = 3− مكتفيا بالحدود الستة الاولى منها.

$$\left\langle 7 \xrightarrow{+(-3)} 4 \xrightarrow{+(-3)} 1 , -2 , -5 , -8 , \ldots \right\rangle$$

الحل / المتتابعة الحسابية هي : $\left\langle 7 , 4 , 1 , -2 , -5 , -8 , \ldots \right\rangle$

مثال (2) / أوجد الحد العاشر من المتتابعة الحسابية : $\left\langle 4 , 9 , 14 , \ldots \right\rangle$

الحل / نستخدم قانون الحد العام : $d = \boxed{5} , a = \boxed{4}$

$$U_n = a + (n-1)\,d$$

$$U_{10} = 4 + (10-1) \times 5 \rightarrow U_{10} = 4 + 9 \times 5 = 49$$

مثال (3) / أكتب المتتابعة الحسابية التي حدها السابع = 36 ، واساسها = 4

الحل / نستخدم قانون الحد العام : $d = \boxed{5} , a = \boxed{4}$

$$U_n = a + (n-1)\,d$$

$$36 = a + (7-1) \times 4 \rightarrow 36 = a + 6 \times 4$$

$$36 = a + 24 \rightarrow a = 36 - 24 = 12$$

اذن المتتابعة الحسابية هي : $\left\langle 12 , 16 , 20 , 24 , \ldots \right\rangle$

مثال (4) / متتابعة حسابية حدها الثالث = 9 وحدها السابع = 3− ، أوجد حدود المتتابعة بين U_7 , U_3

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ،

الاساس = $d = \boxed{?}$ وحدها الثالث $U_3 = \boxed{9}$ وحدها السابع $U_7 = \boxed{-3}$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_3 = a + (3-1)d$$

$$9 = a + 2d \quad \text{----------} \ (1)$$

$$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_7 = a + (7-1)d$$

$$-3 = a + 6d \quad \text{----------} \ (2)$$

$$9 = \cancel{a} + 2d \text{ ----------- } (1)$$

$$\pm 3 = \mp \cancel{a} \mp 6d \text{ ----------- } (2)$$

بالطرح

$$12 = -4d$$

$$d = \frac{12}{-4} = -3$$ الاساس

نعوض (d) في معادلة (1) لايجاد قيمة (a)

$$9 = a + (2 \times -3)$$

$$-\cancel{9} + \cancel{9} = a - 6 - 9$$

$$0 = a - 15 \rightarrow -a = -15 \rightarrow a = 15$$ الحد الاول

الحد الرابع $U_4 = a + (4-1)d \rightarrow U_4 = 15 + (3 \times -3) \rightarrow U_4 = 15 - 9 = 6$

الحد الخامس $U_5 = a + (5-1)d \rightarrow U_5 = 15 + (4 \times -3) \rightarrow U_5 = 15 - 12 = 3$

الحد السادس $U_6 = a + (6-1)d \rightarrow U_6 = 15 + (5 \times -3) \rightarrow U_6 = 15 - 15 = 0$

اذن المتتابعة $\langle U_n \rangle = \langle 15, 12, 9, 6, 3, 0 \rangle$

مثال (5) / أوجد الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس = -4 واساسها = 12

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ،

الاساس $d = \boxed{12}$ وحدها الخامس $U_5 = \boxed{-4}$ ، $U_{200} = \boxed{?}$

$U_n = a + (n-1)d \rightarrow U_5 = a + (5-1)d$

$U_5 = a + 4d \rightarrow -4 = a + 4 \times 12 \rightarrow a = -4 - 48 = -52$

$U_{200} = a + 4d \rightarrow U_{200} = -52 + (199 \times 12) \rightarrow U_{200} = 2336$

مثال (6) / أوجد عدد حدود المتتابعة الحسابية $\langle U_n \rangle = \langle -7, -4, -1, \dots, 113 \rangle$

الحل / $\boxed{U_n = a + (n-1)d}$ ،

الاساس $d = \boxed{3}$ والحد الاول $a = \boxed{-7}$ ، $U_n = \boxed{113}$

$U_n = a + (n-1)d \rightarrow 113 = -7 + (n-1) \times 3$

$113 = -7 + 3n - 3 \rightarrow 113 = -10 + 3n$

$3n = 113 + 10 \rightarrow 3n = 123$

$n = \frac{123}{3} \rightarrow n = 41$ عدد حدود المتتابعة

الأوساط الحسابية

اذا كانت الاعداد الحقيقية b,c,a متتابعة حسابية فان : $c-a=b-c \Rightarrow c+c-a=b$

يسمى c الوسط الحسابي للعددين b,a $\quad 2c=a+b \Rightarrow \therefore c=\dfrac{a+b}{2}$

مثال/ اذا ادخلنا 6 اوساط حسابية بين 38,10 فانه تتكون متتابعة حسابية عدد حدودها =8(2+6=8)

فيصبح لدينا a=10 ، n=8 ، u_8 38 ، d=?

$u_8=a+7d$

$38=10+7d$

$7d=38-10$

$7d=28 \Rightarrow d=\dfrac{28}{7}=4$

الحد الاول		الحد الثاني
First Term	—	d = second
Second Term	—	d = third $\to 0$
Third Term	—	d = 4th $\to 0$
4th Term	—	d = 5th $\to 0$
and so on وهكذا		

2 4 6

الاوساط الحسابية هي 10 [14 , 18 , 22 , 26 , 30 , 34] 38

1 3 5

$\dfrac{18+10}{2}=14$

[1-3-3] مجموع المتتابعة الحسابية Sum Of Arithmetic Sequences

لاحظ المتتابعة التالية

$2+5=7$

$\langle \overset{a}{1}, 2, 3, 4, 5, \overset{U_n}{6} \rangle$

$3+4=7$

$1+6=7$

$a+u_n=7$

الثاني + ماقبل الاخير =7

نرمز لمجموع n من حدود المتتابعة الحسابية بالرمز S_n

$S_n=7+7+7=3\times 7$

$\to (a+u_n)=1+6=7$

$\to \dfrac{\text{عدد الحدود}}{2}=\dfrac{n}{2}=\dfrac{6}{2}=3$

قانون المجوع بدلالة الحد الاول والاخير

$$\boxed{\therefore S_n=\frac{n}{2}(a+u_n)}$$

فان القانون اعلاه يكتب كما يلي

$\because u_n=a+(n-1)d$

بدلالة الحد الاول والاساس

$$\boxed{\therefore S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]}$$

خواص المتتابعة الحسابية :

1- اذا اضيفت كمية ثابتة الى كل حد من حدود المتتابعة ، او طرحت كمية ثابتة من حدود المتتابعة الحسابية ، كانت الكميات الناتجة مكونة متتابعة حسابية ايضا اساسها اساس المتتابعة الاصلية .

2- اذا ضرب كل حد من حدود متتابعة حسابية في مقدار ثابت او قُسم على مقدار ثابت تصبح الكميات الناتجة متتابعة حسابية ايضا باساس مختلف عن المتتابعة الاصلية .

3- حاصل جمع او صرح متتابعتين حسابيتين يكون متتابعة حسابية اساسها هو المجموع او الفرق بين اساسي المتتابعتين .

مثال (1) / أوجد مجموع اربعة حدود من المتتابعة الحسابية التي حدها الاول = 2 وحدها الرابع = 5

الحل / الاساس $\boxed{4}$ = n والحد الاول $\boxed{2}$ = a ، والحد الرابع $\boxed{5}$ = U_4 ، $S_n = \boxed{?}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right] \rightarrow S_n = \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}\left[2+5\right] \rightarrow S_n = 2\times\left[7\right] \rightarrow S_n = 14$$

مثال (2) / أوجد مجموع حدود المتتابعة الحسابية $\langle U_n \rangle = \langle 1, 2, 3, \dots, 100 \rangle$

الحل / الاساس $\boxed{100}$ = n والحد الاول $\boxed{1}$ = a ، والحد الاخير $\boxed{100}$ = U_n ، $S_{100} = \boxed{?}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right] \rightarrow S_n = \frac{\cancel{100}^{\,50}}{\cancel{2}}\left[1+100\right] \rightarrow S_n = 50\times\left[101\right] \rightarrow S_n = 5050$$

مثال (3) / متتابعة حسابية حدها الثاني =4 وحدها ما قبل الاخير =22 وعدد حدودها 12 حدا. جد مجموعها

الحل / الحد الاول + الحد الاخير = الحد الثاني + الحد ما قبل الاخير

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a + U_n\right] \rightarrow S_n = \frac{\cancel{12}^{\,6}}{\cancel{2}}\left[4+22\right] \rightarrow S_n = 6\times\left[26\right] \rightarrow S_n = 156$$

مثال (4) / جد مجموع ثمان حدود من المتتابعة الحسابية $\langle U_n \rangle = \langle -4, 1, 6, \dots \rangle$

الحل / الاساس $\boxed{8}$ = n والحد الاول $\boxed{-4}$ = a ، والاساس $\boxed{5}$ = d ، $S_8 = \boxed{?}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] \rightarrow S_8 = \frac{\cancel{8}^{\,4}}{\cancel{2}}\left[2(-4) + (8-1)\times 5\right]$$

$$S_8 = 4\left[-8 + (7\times5)\right] \rightarrow S_8 = 4\left[-8+35\right]$$

$$S_8 = 4\left[27\right] \rightarrow S_8 = 108$$

حلول تمارين (2-2)

(1) لكل فقرة اربع اجابات واحدة منها فقط صحيحة ، اختر الاجابة الصحيحة :

اولا: المتتابعة الحسابية <2n+1> .

الحل / $u_n = 2n + 1 \rightarrow u_n = 2\times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$

$u_2 = 2\times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$

$d = u_2 - u_1 = 5 - 3 = 2$

$u_{10} = a + (10-1)d = 3 + 9 \times 2 = 3 + 18 = 21$

∴ الفقرة ج تطابق ∴ (ج) صحيحة

ثانيا: اذا كان <.......,8,x,2,-1> متتابعة حسابية فان x=............ :

الحل / معادلة الاساس $u_4 - u_3 = u_3 - u_2$

$-1 - 2 = 2 - X$

$X = 2 + 1 + 2 = 5$ ∴ (ج) صحيحة

ثالثا: اذا كان <3,x,11-> متتابعة حسابية فان x=............ :

الحل /

$11-x=x-(-3)$

$11-x=x+3$

$11-3=x+x$

$2x=8$

$x = \frac{8}{2} = 4$ ∴ (ب) صحيحة

رابعا: في المتتابعة الحسابية <3,7,11,........,n,63> فان $u_n =$ .... :

الحل/ $7-3=63-n \rightarrow 4=63-n \rightarrow n=63-4$

$n=59$ ∴ (ج) صحيحية

---

(2) اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الحسابية التي فيها :

اولا . $a=-5 \ , \ d=3$

$u_2 = -5 + 3 = -2 \ , \ u_3 = -2 + 3 = 1 \ , \ u_4 = 1 + 3 = 4 \ , \ u_5 = 4 + 3 = 7$

$<-5,-2,1,4,7,.........>$

ثانيا: $a=-20 \ , \ d=-4$

$u_2 = -20 + (-4) = -24 \ , \ u_3 = -24 + (-4) = -28 \ ,$

$u_4 = -28 + (-4) = -32 \ , \ u_5 = -32 + (-4) = -36$

$<-20,-24,-28,-32,-36,.......>$

ثالثا: $a=-3 \quad , \quad u_{n+1} = u_n + 4$

الحل / هناك حلان

الحل الثاني	الحل الاول
$u_{n+1} - u_n = 4$ $u_{1+1} = u_1 + 4$ $u_2 = u_1 + 4$ $\boxed{u_1 = -3}$ معطى $u_2 = -3 + 4 = 1$ $u_3 = u_2 + 4 = 1 + 4 = 5$ $u_4 = 5 + 4 = 9$ $u_5 = 9 + 4 = 13$	الاساس = الفرق بين حدين متتاليين $d = u_{n+1} - u_n$ من المعادلة المعطاة في المسألة نستخرج قيمة $u_{n+1} - u_n$ نكتب المعادلة $u_{n+1} = u_n + 4$ $u_{n+1} - u_n = 4$ $d = u_{n+1} - u_n \rightarrow d=4$ $<-3,1,5,9,13,........>$ بمعلومية الحد الاول والاساس نستطيع ان نكتب المتتابعة اعلاه وكما في الا السابقة .

رابعا: $u_n = (5n - 9)$

$u_1 = 5\times1 - 9 = 5 - 9 = \underline{-4} \quad , \quad u_2 = 5 \times 2 - 9 = \underline{1} \quad , \quad u_3 = 5 \times 3 - 9 = \underline{6} \quad ,$

$u_4 = 5 \times 4 - 9 = \underline{11} \quad , \quad u_5 = 5 \times 5 - 9 = \underline{16}$

$<-4,1,6,11,16,........>$

(3) جد الحد السابع عشر من المتتابعة الحسابية $<-15,-12,-9,......>$:

الحل/

$d=u_2 - u_1 \rightarrow d=-12-(-15) =-12+15$

$=15-12$

$=3$

$a=-15 \quad , \quad d=3 \quad , \quad u_{17} = a+16d$

$= -15 + 16 \times 3$

$=-15+48$

$=48-15 \rightarrow u_{17} = \boxed{33}$

---

(4) جد عدد حدود المتتابعة الحسابية $<-20,-17,-14,........,55>$:

الحل/ نستخرج الاساس

$d=-17-(-20)=-17+20$

$d=20-17=\boxed{3}$

من المسالة $a=-20$ ، $u_n = 55$

نطبق القانون

$u_n = a + (n - 1)d$

$55=-20+(n-1)\times 3$

$55+20=3n-3$

$3n=75+3 \rightarrow 3n=78 \rightarrow n=\frac{78}{3}=26$

(و.هـ.م)

---

(5) $< \underbrace{X^2 + 1}_{n_1} , \underbrace{2X^2 + 1}_{n_2} , \underbrace{2X^2 + X + 3}_{n_3} , ... >$ فما قيمة X ؟ وما حدها السابع ؟

الحل /

$n_2 - n_1 = n_3 - n_2$

$2x^2+1 - (x^2+1) = 2x^2 + x + 3 - (2x^2+1)$

$2x^2 \cancel{+1} -x^2 \cancel{-1} = \cancel{2x^2} +x+3 \cancel{-2x^2} -1$

$x^2 = x + 2 \rightarrow x^2-x-2 =0$

$(x-2)(x+1)=0$

$(x-2)=0$ OR $(x+1)=0$

$x=2$ OR $x=-1$

$\therefore$ مجموعة الحل $X = \{ -1 , 2 \}$

نعوض مجموعة الحل في المتتابعة الاصلية $\langle x^2+1,2x^2+1,2x^2+x+3,............\rangle$ فتظهر لنا متتابعتان

المتتابعة الاولى	المتتابعة الثانية
$x=-1$	$x=2$
$<1+1,2+1,2-1+3,........>$	$<5,9,13,......>$
$<2,3,4,.........>$	$a=5 \quad , \quad d=4$
$a=2 \quad , \quad d=1$	$u_7= 5 + 6 \times 4$
$u_7 = a + 6d$	$=5+24 = 29$
$= \boxed{2 + 6} \times 1 = 8$	

---

(6) اذا ادخلنا ستة اوساط حسابية بين 30 ، 2 فما هذه الاوساط :

الحل/ الحدود الجديدة = **6**

الحدود القديمة = **2**

الكلية = **8** ∴ حدود المتتابعة **8** حدود

$a=2 \quad , \quad u_8 = 30$

$\therefore u_8 = a + 7d$

$30=2+7d$

$30-2=7d$

$28=7d$

$\frac{28}{7}=d$

$a=2 \qquad 4=d \rightarrow d=4$

$\therefore u_n = \langle 2,[6,10,14,18,22,26],30\rangle$

(و.هـ.م)

---

(7) جد المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس =8 وحدها الثامن عشر =13-:

الحل / معادلتين آنيتين

$u_5 = a + 4d = 8 \ldots\ldots\ldots\ldots \boxed{1}$

بالطرح $\underline{u_{18} = a + 17d = -31 \ldots\ldots \boxed{2}}$

$0-13d=39$

$d=\frac{39}{-13}=-3$

نعوض عن d=-3 في المعادلة رقم **(1)** $a+4(-3)=8$

$a-12=8 \rightarrow a=8+12=20$

$\boxed{d = -3 , a = 20}$

$<20,17,14,11,8,\ldots\ldots\ldots>$

---

(8) أي حد في المتتابعة الحسابية <.....,-1,-5,-9> يكون مساويا 87 ،

هل يوجد حد في هذه المتتابعة =333؟

الحل / $d=-5-(-9)=-5+9=9-5=4 \quad , a=-9$

$u_n = a + (n - 1) \times 4$

$87=-9+4n-4 \rightarrow 87+9+4=4n \rightarrow 100=4n$

الحد الخامس والعشرون (u_{25}) $n=\frac{100}{4}=25$ الذي قيمته (78)

$333=-9+4n-4 \rightarrow 333+9+4=4n \rightarrow 346=4n$

$n=\frac{346}{4}=86\frac{1}{2} \notin Z^+$

∴ لا يوجد حد قيمته (333)

(9) متتابعة حسابية حدها الرابع =1- وحاصل ضرب حديها الثاني والثالث يساوي 10 فما حدها العاشر؟

الحل /

$u_4 = a+3d=-1 .... \boxed{1}$

$u_2 \times u_3 = (a+d)(a+2d)=10 .... \boxed{2}$

من معادلة (1) $a = -1 - 3d$ ----------- (3)

$\therefore (-1-3d+d)(-1-3d+2d)=10$

$(-2d-1)(-d-1)=10$

$-(2d+1)(-)(d+1)=10$

$(2d+1)(d+1)=10$

$2^2+3d+1=10 \rightarrow 2d^2+3d+1-10=0$

$\rightarrow 2d^2+3d-9=0 \rightarrow (2d-3)(d+3)=0$

either $2d-3=0 \rightarrow 2d=3 \rightarrow \boxed{d=\frac{3}{2}}$

or $d+3=0 \rightarrow \boxed{d=-3}$

$a=-1-3\times -3$

$a=-1+9$ نعوضها في (3)

$a=8$

$u_{10} = a+9d = 8+9(-3) = 8-27 = -19$

عندما $d=\frac{3}{2}$

$a = -1-3\times\frac{3}{2}$ نعوضها في (3)

$a=-1-\frac{9}{2}=-1-4\frac{1}{2}=-5\frac{1}{2}=-\frac{11}{2}$

$u_{10}=a+9d=-\frac{11}{2}+9\times\frac{3}{2}=\frac{27}{2}-\frac{11}{2}=\frac{16}{2}=8$

المتتابعة الاولى .	$a=8$, $d=-3$, $u_{10}=-19$
$\langle 8, 5, 2, -1, ..., -19\rangle$	
المتتابعة الثانية	$a=-\frac{11}{2}$, $d=\frac{3}{2}$, $u_{10}=8$
$\left\langle -\frac{11}{2}, -\frac{8}{2}, -\frac{5}{2}, ..., 8\right\rangle$	

(10) اذا كانت <A,7,.....,B,25> متتابعة حسابية وكانت B=5A+2 فما قيمة A,B ؟ وماعدد حدود المتتابعة ؟

الحل/

$7-A=25-B \rightarrow B=A+18.......\quad(1)$

معطى $B=5A+2$

$\therefore 5A+2=A+18$

$5A-A=18-2$

$4A=16$

$A=4$ (نعوضها في (1) لاستخراج قيمة B)

$\therefore B=4+18=22$

المطلوب الاول المتتابعة الحسابية $\therefore <4,7,.......,22,25>$

المطلوب الثاني $a=4 \quad , \quad d=7-4=3 \quad , \quad u_n=25$

$25=4+(n-1)\times 3 \quad \rightarrow \quad 25=4+3$

$25-4=3(n-1) \quad \rightarrow \quad 21=3(n-1)$

$\rightarrow \quad \frac{21}{3}=\frac{3}{3}(n-1) \qquad 7=(n-1)$

عدد الحدود $n=8$

(و.هـ.م)

---

(11) اثبت ان مجموع n حداً الاولى من الاعداد الفردية الموجبة للمتتابعة الحسابية <1,3,5,....,2n-1,...> هو n^2 :

الحل / $a=1 \quad , \quad d=3-1=2$

قانون الحد الاخير $u_n=a+(n-1)d$

$u_n=1+(n-1)\times 2 \quad \rightarrow \quad u_n=1+2n-2$

$S=\frac{n}{2}(a+u_n) \qquad =2n-1$

$S=\frac{n}{2}(1+2n-1) \quad \rightarrow \quad S=\frac{n}{\cancel{2}}\times \cancel{2}n \quad \rightarrow \quad S=n^2$

او $S=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \rightarrow \quad S=\frac{n}{2}[2\times 1+(n-1)\times 2]$

$S=\frac{n}{2}(2+2n-2) \quad \rightarrow \quad S=\frac{n}{\cancel{2}}\times \cancel{2}n=n^2$

---

(12) كم حداً يؤخذ من المتتابعة الحسابية <......,25,21,17> ابتداء من حدها الاول ليكون مجموعها =14-

الحل/ $a=25$, $d=21-25=-4$ $S=-14$ $n=?$

$$S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

$$-14=\frac{n}{2}[2\times 25+(n-1)(-4)]$$

$$-2\times 14=n(50-4(n-1))$$

$$-28=n(50-4n+4) \rightarrow -28=n(54-4n)$$

$$-28=54n-4n^2 \rightarrow 4n^2-54n-28=0$$

$$\frac{1}{2}(4n^2-54n-28)=0 \rightarrow 2n^2-27n-14=0$$

$$(2n+1)(n-14)=0$$

$2n+1=0 \rightarrow n\frac{-1}{2} \notin$ لانه عدد الحدود بالسالب

$n-14=0 \rightarrow n=14$ عدد الحدود 14

عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمدها مدرس المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا

(13) جد مجموع الاعداد الصحيحة المحصورة بين 100,400 وتقبل القسمة على 3 وبدون باق ؟

الحل /

$\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$

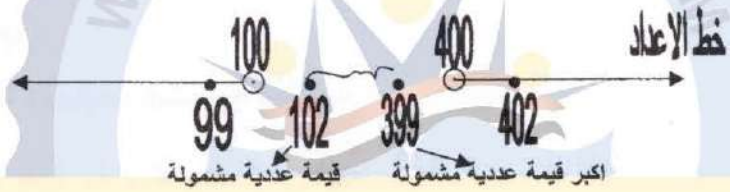
$33 \times 3 = 99 < 100$ يهمل

$34 \times 3 = 102 > 100$ المشمولة

$133 \times 3 = 399 < 400$ المشمولة

$\frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}$

$134 \times 3 = 402 > 400$ يهمل



∴

المتتابعة الحسابية هي $<102,\ldots\ldots,\ldots\ldots,399>$

تقبل القسمة على 3 يعني الاساس 3 $<102,105,108,\ldots\ldots,399>$

$a=102 \quad , \quad d=3 \quad , \quad u_n = 399$

$u_n = a+(n-1)d \rightarrow 399 = 102+3(n-1)$

$399=102+3n-3$

$399=99+3n$

$3n=399-99$

$n=\frac{300}{3}=100$ حدا (عدد الحدود)

$S_n=\frac{100}{2}[102+399] \rightarrow S_n=50\times 501$ (مجموع حدود المتتابعة)

$S_n = 25050$

المتتابعة الهندسية Geometric Sequences

وهي متتابعة ليس فيها حد يساوي الصفر ، وناتج قسمة كل حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عدداً حقيقيا ثابتاً وهذا العدد يسمى اساس (النسبة المشتركة Common Ratio) المتتابعة الهندسية ويرمز له بالرمز $r = u_{n+1}/u_n$

فالمتتابعة (u_n) تسمى هندسية اذا كان $u_n \neq 0$ ثم $u_{n+1}/u_n = r$ لكل n,n+1 تنتمي لمجال المتتابعة حيث r عدد حقيقي .

$$<2, 4, 8> \rightarrow r = \frac{4}{2} = \frac{8}{4} = 2$$

$$<2, -4, 8> \rightarrow r = \frac{-4}{2} = \frac{8}{-4} = -2$$

1- اذا كان (a) موجب

وان $r \langle 1$ (موجب) متتابعة هندسية تنازلية

مثال / $< 4, 2, 1, 1/2, \dots >$ حيث $a = 4, r = 1/2$

$r = 1$ (موجب) متتابعة هندسية ثابتة

مثال / $< 4, 4, 4, 4, \dots >$ حيث $a = 4, r = 1$

$r > 1$ (موجب) متتابعة هندسية تصاعدية

مثال / $< 4, 8, 16, 32, \dots >$ حيث $a = 4, r > 1$

$r < 1$ (سالب) متتابعة هندسية متناوبة الاشارة الاول موجب والثاني سالب وهكذا

مثال / $< 4, -2, 1, -1/2, \dots >$ حيث $a = 4, r > 1$

2- اذا كان (a) سالب

وان $r < 1$ (موجب) متتابعة هندسية تصاعدية

مثال / $< -4, -2, -1, -1/2, \dots >$ حيث $a = -4, r = 1/2$

$r = 1$ (موجب) متتابعة هندسية ثابتة

مثال / $< -4, -4, -4, -4, \dots >$ حيث $a = -4, r = 1$

$r > 1$ (موجب) متتابعة هندسية تنازلية

مثال / $< -4 , -8 , -16 , -32 , \ldots >$ حيث $a = -4 , r > 2$

$r < 1$ (سالب) متتابعة هندسية متناوبة الاشارة الاول سالب والثاني موجب وهكذا

مثال / $< -4 , 2 , -1 , 1/2 , \ldots >$ حيث $a = -4 , r = -1/2$

الحد العام **Genral Term**

المتتابعة الهندسية التي حدها الاول $= a$ واساسها $= r$ هي : $< a , ar , ar^2 , ar^3 , ar^4 , \ldots >$ ويكون :

$u_1 = a = ar^0 = ar^{(1-1)} \rightarrow u_2 = ar^1 = ar^{2-1}$

$u_3 = ar^2 = ar^{(3-1)} \rightarrow u_4 = ar^3 = ar^{(4-1)}$

∴ قانون الحد العام للمتتابعة الهندسية $\boxed{u_n = ar^{n-1}}$

ملاحظة / عزيزي الطالب لاحظ تسلسل ترتيب الحدود لغرض تسهيل الحل

$\boxed{a , ar , ar^2}$ OR $\boxed{\frac{a}{r} , a , ar}$

مثال 1 / أكتب الحدود الستة الاولى من المتتابعة الهندسية التي حدها الاول $= 64$ واساسها $= -1/2$

الحل / $a = 64$ (الحد الاول) $, n = 6 , r = -1/2$

$u_1 = a , u_2 = ar , u_3 = ar^2 , \ldots , u_6 = ar^5$

$u_1 = 64 , u_2 = 64 \times -1/2 = -32$

$u_3 = 64 \times (-1/2)^2 = 16 , u_6 = 64 \times (-1/2)^5 = -2$

المتتابعة الهندسية هي $< 64 , -32 , 16 , -8 , 4 , -2 >$

مثال 2 / جد الحد السابع من متتابعة هندسية حدها الاول $= -1/4$ واساسها $= 2$

الحل / $a = -1/4$ (الحد الاول) $, U_7 = ? , r = 2$

$$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$$

$$u_7 = -1/4(2)^{7-1} \rightarrow u_7 = -1/4(2)^6$$

$$u_7 = -1/4 \times (64) \rightarrow u_7 = -16$$

مثال 3 / متتابعة هندسية حدها الاول = 3 وحدها الخامس = 48 جد حدها الثامن ؟

الحل / $a = 3$ (الحد الاول) , $U_5 = 43$

$$\boxed{u_n = ar^{n-1}}$$

$u_5 = a(r)^{5-1} \rightarrow 48 = 3 \times (r)^4$

$r^4 = \frac{48}{3} \rightarrow r^4 = 16 \rightarrow r = \mp 2$

عندما $r = 2$

$u_8 = a(r)^7 \rightarrow u_8 = 3(2)^7 \rightarrow u_8 = 384$

عندما $r = -2$

$u_8 = a(r)^7 \rightarrow u_8 = 3(-2)^7 \rightarrow u_8 = -384$

مثال 4 / مجموع الحدود الثلاثة الاولى من متتابعة هندسية حدوها = 7 وحدها الثالث = 1
فما حدها السادس ؟

الحل / $u_1 + u_2 + u_3 = 7$

$a + ar + ar^2 = 7$

$a(1 + r + r^2) = 7$ .... (1)

$u_3 = 1 \rightarrow ar^2 = 1$

$a = 1 / r^2$ .... (1)

$\frac{1}{r^2}(1 + r + r^2) = 7$

بتعويض معادلة (2) في معادلة (1) $\frac{1}{r^2}(1 + r + r^2) = 7 \rightarrow 1 + r + r^2 = 7r^2$

$6r^2 - r - 1 = 0 \rightarrow (3r + 1)(2r - 1) = 0$

اما $(3r + 1) = 0 \rightarrow r = -1/3$ يهمل

وأ $(2r - 1) = 0 \rightarrow r = 1/2 \rightarrow a = 4$

$u_6 = a(r)^5 \rightarrow u_6 = 4 \times (1/2)^5$

$u_6 = 4 \times (1/32) \rightarrow u_6 = 1/8$

الاوساط الهندسية :

اذا كان لدينا العددان a,f وادخلنا الاعداد المرتبة b,c,d,…e بحيث <a,b,c,d,….e,f> تكون متتابعة هندسية فان الاعداد(b,c,d,….e) تسمى اوساط هندسية بين a,f ويكون عدد حدود المتتابعة الهندسية =(عدد الاوساط + 2) .

مثال / ادخل اربعة اوساط هندسية بين العددين 4 ، 128 :

الحل / عدد الحدود = 4 + 2 $\quad u_6 = 4 \quad , n=6 \quad a=128$

$u_6 = ar^{n-1} \rightarrow u_6 = ar^5 \rightarrow 4 = 128r^5 \rightarrow r^5 = \frac{4}{128}$

$r^5 = \frac{1}{32} \rightarrow r^5 = \frac{1}{2^5} \rightarrow r^5 = (\frac{1}{2})^5$

$\therefore r = \frac{1}{2}$

∴ الاوساط الهندسية هي : 8 , 16 , 32 , 64

المتتابعة الهندسية هي : < 4 , 8 , 16 , 32 , 64 , 128>

مجموع المتتابعة الهندسية **Sum Of a Geometric Sequences**

اذا كان	الاساس	عدد الحدود	الحد الاول
	r = common ratio $\frac{a_2}{a_1}$	n=number of terms,	$u_1 = a$,

$$(1)\ S_n = \begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1 \\ na & r = 1 \end{cases}$$

؟كيف

حالة خاصة

$\frac{a}{1-r}$ (2) $-1 < r < 1$

قانون مجموع (م.هـ) الانهائية حالة خاصة

كيف هكذا

$S_n = a+ar+ar^2+......+an^{n-1}......$

اذا كان r=1 فانها تصبح هكذا

$S_n = a+a.1+a.1^2+.......+a.1^{n-1}$

$S_n = a + a + a + ...+ a +.......$

∴ المجموع يساوي (n من الحدود مضروبة في الحد الاول) $\boxed{\therefore S_n = na}$ (first term)

$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ....$r \neq 1$ قانون المجموع

---

(2) المتتابعة الهندسية اللانهائية Infinite Geometric Sequences

قانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية (2)

$$\boxed{S_n = \frac{a}{1-r}}$$

البرهان /

ان التعريف الذي اعطي لمجموع حدود المتتابعة يصلح لكل المتتابعات المنتهية وغير المنتهية على حد سواء وفي حالة المتتابعات الحسابية غير المنتهية فاننا لانستطيع ايجاد المجموع لحدودها كافة لان المجموع يكون اما كبير جداً $(+\infty)$ او صغير جداً $(-\infty)$ فمثلا اننا لا نستطيع ايجاد :

$1+5+9+13+17+........$ او $-1-2-3-4-5-.......$

اما بالنسبة للمتتابعة الهندسية غير المنتهية (اللانهائية) فان الامر مختلف كلياً :

حيث $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a - ar^n}{1-r}$ نجزئ الكسر $S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$

وعندما $-1 < r < 1$ فان (r^n) تقترب من الصفر كلما زادت n زيادة كبيرة غير محددة . لان العدد r هو عدد كسري فمثلا $r = \frac{1}{2}$ فان $r^n = \frac{1^n}{2^2}$ واذا كانت $n = \infty$ فان $\frac{1}{2^\infty}$ يقترب من الصفر ولذلك نعتبره صفر وبذلك يصبح $\frac{ar^n}{1-r} = \frac{a\times\frac{1}{2}}{1-r} = \frac{a\times 0}{1-\frac{1}{2}} = \frac{0}{\frac{1}{2}} = 0$ حيث $(r=\frac{1}{2})$

وبذلك يصبح قانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية كما يلي : $\boxed{S_n = \frac{a}{1-r}}$

ويعرف بقانون مجموع المتتابعة الهندسية اللانهائية

يصلح هذا القانون فقط عندما $-1 < r < 1$ ولايصلح هذا القانون عندما $r \geq 1$ او $r \leq -1$

مثال (1) / جد $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$

الحل / الاساس $r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ والحد الاول $a = \boxed{\frac{1}{2}}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{0.5}{0.5} = 1$$

مثال (2) / جد مجموع $0.4 + 0.04 + 0.004 + \ldots$

الحل / الاساس $0.1 = \frac{1.04}{0.40} = \frac{0.04}{0.4} = r$ والحد الاول $a = \boxed{0.4}$

المراتب العشرية متساوية ترفع الفارزة

$$S_\infty = \frac{0.4}{1-0.1} = \frac{0.4}{0.9} = \frac{4}{9}$$

مثال (3) / جد ناتج $64 - 16 + 4 - 1 + \ldots$

الحل / الاساس $r = \frac{-1}{4}$ والحد الاول $a = \boxed{64}$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{64}{1+\frac{1}{4}} = \frac{64}{\frac{5}{4}} = 64 \times \frac{4}{5} = \frac{256}{5}$$

حلول تمارين (3-2)

(1) أي من العبارات الاتية صحيحة وايها خاطئة :

(أ) اذا كان r اساس المتتابعة الهندسية $\langle u_n \rangle$ فان $u_5 = r^2 u_3$.

الحل / $u_5 = ar^4 = ar^2r^2 \qquad (r^4 = r^2 \times r^2)$

$u_5 = r^2 \underline{ar^2}$

$\because u_3 = ar^2 \qquad \therefore u_5 = r^2 u_3$ ∴ العبارة صحيحة

(ب) اساس (متتابعة هندسية) $<1,-1,1,-1,......>$ هو (1) العبارة خاطئة لان $r = -1$

(ج) اذا كانت $< ......, \frac{-1}{2}, 2, a, 32 >$ (متتابعة هندسية) فان $a = -8$.

الحل / $r = \frac{a}{32} = \frac{-1}{2} \rightarrow \frac{a}{32} = \frac{-1}{2} \times \frac{1}{2} \rightarrow \frac{a}{32} = \frac{-1}{4} \rightarrow 4a = -32 \rightarrow a = \frac{-32}{4} = -8$

∴ العبارة صحيحة

(د) اذا كان اساس (متتابعة هندسية) (r) موجباً فان جميع حدودها موجبة .

الحل / اشارة الحدود جميعها تعتمد على اشارة الحد الاول a فقد تكون اشارة a سالبة فتكون اشارة جميع الحدود سالبة اذا كان r موجباً

∴ العبارة خاطئة

(هـ) اذا كانت $< 16, x, 4 >$ (متتابعة هندسية) فان $x=-8$.

الحل / $\frac{x}{4} = \frac{16}{x} \rightarrow x^2 = 4 \times 16 \rightarrow x^2 = 64 \rightarrow x = \mp 8$

∴ العبارة خاطئة لان مج الحل { 8 , 8- } فقد تكون X سالبة وقد تكون x موجبة

(و) اذا كانت $< a_1, a_2, a_3, a_4, ... >$ (متتابعة هندسية) فان $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$

الحل / اذا كان المقصود تناسب (صحيحة)

اما اذا كان المقصود استخراج الاساس (خاطئة)

(ز) اذا كان $u_n = 3u_{n+1}$ (متتابعة هندسية) فان اساسها = 3

الحل / الحدان هما متتابعان من رقم دليليهما $(n,n+1)$

∴ الاساس = $\frac{\text{الاخير}}{\text{ما قبل الاخير}}$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ، لدينا المساواة $u_n = 3u_{n+1}$ منها نستخرج قيمة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ هكذا :

$$\frac{3u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} \rightarrow \frac{3u_{n+1}}{u_n} = 1 \rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{3}$$ (ضربنا الطرفين $\times \frac{1}{3}$)

∴ الاساس $(r) = \frac{1}{3}$

∴ العبارة خاطئة عندما $r = 3$

(2) اكتب الحدود الخمسة الاولى لكل من المتتابعات الهندسية الاتية التي فيها :

(أ) $a = 81 ، r = \frac{1}{3}$

3	81
3	27
3	9
3	3
	1

الحل الاول / نحلل العدد 81

$< 81 , 27 , 9 , 3 , 1 , ... >$

الحل الثاني / $a_1 = 81 ، a_2 = 81 \times \frac{1}{3} = 27 ، a_3 = 27 \times \frac{1}{3} = 9$

$a_4 = 9 \times \frac{1}{3} = 3 ، a_5 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$

(ب) $a = \frac{1}{32} ، r = -2$

الحل / $a_1 = \frac{1}{32} , a_2 = \frac{1}{32} \times -2 = \frac{-1}{16} , a_3 = \frac{-1}{16} \times -2 = \frac{1}{8} ,$

$a_4 = \frac{1}{8} \times -2 = \frac{-1}{4} , a_5 = \frac{-1}{4} \times -2 = \frac{1}{2}$

$< \frac{1}{32} , -\frac{1}{16} , \frac{1}{8} , \frac{-1}{4} , \frac{1}{2} , ... >$

(ج) $<27,-18,12,-8,\frac{16}{3},.......>$ $a=27$ ، $r=-\frac{2}{3}$

(د) $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n$ ، $a=-8$

الحل / $<-8,-4,-2,-1,-\frac{1}{2},.......>$ $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{2}=r$

(هـ) $<2,4,8,16,32,.....>$ $a=2$, $r=2$

---

(3) جد الحد الثامن من (المتتابعة الهندسية) $<2,1,\frac{1}{2},.......>$

الحل / $a=2$, $r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{1}{2}$, $n=8$, $u_8=ar^7$

$u_8=2(\frac{1}{2})^7 \rightarrow u_8=\frac{2}{2^7}=\frac{1}{2^6}=\frac{1}{64}$ (بالقسمة تطرح الاسس)

(4) متتابعة هندسية حدها الرابع =8- وحدها السابع =64- فما حدها الاول ما اساسها ؟

الحل / $u_4=ar^3$ ، $u_7=ar^6$

$-64=ar^6$ .... (1)

$-8=ar^3$ .... (2) بقسمة (1) على (2)

$8=r^3$ عند القسمة تطرح الاسس

$2^3=r^3$ باخذ الجذر التكعيبي للطرفين

$2=r$ الاساس

$-64=ar^6$ نعوض قيمة r في معادلة (1)

$-64=a(2)^6$

$-64=64a$

$a=\frac{-64}{64}=-1$ الحد الاول

---

(5) ادخل 9 اعداد بين 96 ، 3 بحيث تكون مع هذين العددين (متتابعة هندسية) ؟

الحل $u_{11} = 96$, $n = 9 + 2 = 11$, $a=3$

$96=ar^{10} \rightarrow 96=3r^{10} \rightarrow r^{10}=32 \rightarrow {}^{5}(r^{2})=2^{5}$

$r^{10}=2^{5} \rightarrow r^{2}=2 \rightarrow r=\mp\sqrt{2}$

∴ (المتتابعة الهندسية الاولى) هي $<3,3\sqrt{2},6,6\sqrt{2},12,12\sqrt{2}......,96>$ عند $r=\sqrt{2}$

∴ (المتتابعة الهندسية الثانية) هي $<3,-3\sqrt{2},6,-6\sqrt{2},12,-12\sqrt{2},..........,96>$ عند $r=-\sqrt{2}$

---

(6) مجموع الحدين الاول والثاني من (متتابعة هندسية) = 32– مجموع حديها الرابع والخامس يساوي 4 – فما حدها السابع ؟

الحل /

$a_1=a \quad a_2=ar$

$a_4=ar^3 \quad a_5=ar^4$

$a+ar=-32 \rightarrow a(1+r)=-32 \quad (1)$

$ar^3+ar^4=-4 \rightarrow ar^3(1+r)=-4 \quad (2)$ بالقسمة

$\frac{a(1+r)}{ar^3(1+r)}=\frac{-32}{-4} \rightarrow \frac{1}{r^3}=8 \rightarrow 8r^3=1 \rightarrow r^3=\frac{1}{8}$

$r^3=\frac{1}{2^3} \rightarrow r^3=(\frac{1}{2})^3 \rightarrow r=\frac{1}{2}$ نعوض عن قيمة r في (1)

$a(1+r)=-32 \rightarrow a(1+\frac{1}{2})=-32 \rightarrow a(1\frac{1}{2})=-32$

$\rightarrow a\times\frac{3}{2}=-32 \rightarrow a=\frac{2}{3}\times-32=\frac{-64}{3}$

$a_7=ar^6 \rightarrow a_7=\frac{-64}{3}\times(\frac{1}{2})^6=\frac{\cancel{-64}^{1}}{3\times\cancel{64}}=-\frac{1}{3}$

(7) اكتب المتتابعة الهندسية التي مجموع الحدود الستة الاولى منها 504 واساسها =2 ؟

الحل /

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r} \rightarrow 504=\frac{a(1-r^6)}{1-r} \rightarrow 504=\frac{a(1-2^6)}{1-2} \rightarrow 504=\frac{a(1-64)}{1-2} \rightarrow 504=\frac{-63a}{-1} \rightarrow 504=63a$$

$\rightarrow \quad a=\frac{504}{63}=8$ <8,16,32,64,128,256>

التحقيق 8+16+32+64+128+256=504

---

(8) اذا كان مجموع متتابعة هندسية اساسها =3 هو 728 وحدها الاخير هو 486 حد حدها الاول وعدد حدودها ؟

الحل / قانون الحد الاخير $u_n=ar^{n-1}$

$\boxed{486=a3^{n-1}}$ ....(1)

قانون المجموع العام $S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}$

$\boxed{728=\frac{a(1-3^n)}{1-3}}$ ....(2)

من المعادلة (1) نستخرج قيمة a بدلالة 3^n

$$486=a3^{n-1} \rightarrow 486=a\times3^n\times3^{-1} \rightarrow 486=\frac{a\times3^n}{3} \rightarrow a\times3^n=3\times486 \rightarrow a\times3^n=1458$$

$\rightarrow \quad a=\frac{1458}{3^n}$ ....(3)

نعوض عن قيمة a في المعادلة (2) $728=\frac{a(1-3^n)}{-2}$

3	729
3	243
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

$728\times-2=a(1-3^n) \rightarrow a(1-3^n)=-1456$

$\rightarrow \frac{1458}{3^n}(1-3^n)=-1456$

$\frac{1458}{3^n}-1458=-1456$

$\frac{1458}{3^n}=1458-1456$

$$\frac{1458}{3^n}=2 \rightarrow 2\times3^n=1458 \rightarrow 3^n=\frac{1458}{2} \rightarrow 3^n=729 \rightarrow 3^n=3^6 \rightarrow n=6$$

نعوض عن n=6 في (3) لاستخراج قيمة الحد الاول (a)

$$a=\frac{1458}{3^6}=\frac{1458}{3^2.3^2.3^2}=\frac{1458}{9.9.9}=\frac{1458}{81\times9}=\frac{1458}{729}=2$$

a=2 , n=6 , r=3

التحقيق <2,6,18,54,162,486>

$S_n=2+6+18+54+162+486=728$

(9) متتابعة هندسية موجبة الحدود حاصل ضرب حدودها الثلاثة الاولى $\frac{1}{27}$ ومجموع حدودها الثاني والثالث والرابع $\frac{13}{27}$ اوجد المتتابعة ؟ ثم جد مجموعها الى ما لانهاية ؟

حاصل الجمع

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots\ldots$

حاصل الضرب

الحل / $a \times ar \times ar^2 = \frac{1}{27} \ldots\ldots (1)$

$ar + ar^2 + ar^3 = \frac{13}{27} \ldots\ldots (2)$

$$a \times ar \times ar^2 = \frac{1}{27} \rightarrow 27a^3r^3 = 1$$

$$\rightarrow a^3 = \frac{1}{27r^3} \rightarrow \boxed{a = \frac{1}{3r}} \quad \ldots\ldots(3)$$

نعوض عن a في (2)

$$ar + ar^2 + ar^3 = \frac{13}{27} \rightarrow \frac{1}{3r} \times r + \frac{1}{3r} r^2 + \frac{1}{3r} r^3 = \frac{13}{27}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{r}{3} + \frac{r^2}{3} = \frac{13}{27}\right) \times 3 \rightarrow 1 + r + r^2 = \frac{13}{9}$$

$$\rightarrow 9r^2 + 9r + 9 = 13 \rightarrow 9r^2 + 9r + 9 - 13 = 0 \rightarrow 9r^2 - 9r - 4 = 0$$

$$\rightarrow (3r+4)(3r-1) = 0 \rightarrow 3r + 4 = 0 \rightarrow 3r = -4 \rightarrow r = \frac{-4}{3}$$

يهمل لان المتتابعة موجبة الحدود فرضاً (معطيات المسألة)

$$3r - 1 = 0 \rightarrow 3r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{3}$$

نعوض عن r في المعادلة (3) ينتج :

$$a = \frac{1}{3r} \rightarrow a = \frac{1}{3 \times \frac{1}{3}} = 1$$

∴ (م.هـ) هي

$$<1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}>$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1 \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

(10) ثلاثة اعداد مكونة متتابعة حسابية مجموعها 18 ولو اضيفت الاعداد 7 , 2 , 1 الى حدودها على الترتيب لتالف من الاعداد الناتجة متتابعة هندسية . فما هذه الاعداد ؟

الحل / نفرض ان الاعداد المؤلفة للمتابعة الحسابية هي : $a , a + d , a + 2d$

$$[a + a + d + a + 2d] = 18$$

$$[3a + 3d] = 18$$

$[a + d] = 6$ بقسمة الطرفين على 3

$$A = 6 - d \quad .... (1)$$

نقوم باضافة الاعداد 7 , 2 , 1 الى حدود المتتابعة الحسابية لتصبح متتابعة هندسية وكالاتي :

$\langle a + 1 , a + d + 2 , a + 2d + 7 , ... \rangle$ متتابعة هندسية

$$\frac{a + d + 2}{a + 1} = \frac{a + 2d + 7}{a + d + 2} \quad .... (2)$$

نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$$\frac{6 - \cancel{d} + \cancel{d} + 2}{6 - d + 1} = \frac{6 - d + 2d + 7}{6 - \cancel{d} + \cancel{d} + 2}$$

$$\frac{8}{7 - d} = \frac{13 + d}{8}$$

$(7 - d)(13 + d) = 64$ حاصل ضرب الطرفين يساوي حاصل ضرب الوسطين

$$91 + 7d - 13d - d^2 - 64 = 0$$

$$d^2 + 6d - 27 = 0$$

$$(d + 9)(d - 3) = 0$$

eiter $d + 9 = 0 \Rightarrow d = -9 \longrightarrow a = 6 + 9 = 15$

or $d - 3 = 0 \Rightarrow d = 3 \longrightarrow a = 6 - 3 = 3$

∴ الاعداد هي $(3 , 6 , 9)$ أو $(15 , 6 , -3)$

(11) اذا كان مجموع ثلاث اعداد تؤلف متتابعة هندسية يساوي 70 فاذا ضربنا كل من حدها الاول والثالث في 4 وحدها الثاني في 5 كانت الاعداد الناتجة تؤلف متتابعة حسابية . فما هذه الاعداد ؟

الحل / نفرض ان الاعداد هي: a , ar , ar^2

$$a + ar + ar^2 = 70$$

$$a(1 + r + r^2) = 70$$

$$a = \frac{70}{1 + r + r^2} \quad \ldots\ldots (1)$$

عندما نضرب الحد الاول والحد الثالث في 4 وكذلك الحد الثاني نضربه في 5

تصبح لدينا متتابعة حسابية وكالاتي:

متتابعة حسابية $\langle 4a , 5ar , 4ar^2 , \ldots \rangle$

$$5ar - 4a = 4ar^2 - 5ar$$

$$[\,4ar^2 - 10ar + 4a = 0\,] \div 2$$

$$2ar^2 - 5ar + 2a = 0$$

$$a(2r^2 - 5r + 2) = 0$$

either $a = 0$ (وهذا غير ممكن لان جميع حدود المتتابعة سوف تصبح صفرا)

Or $2r^2 - 5r + 2 = 0$

$$(2r - 1)(r - 2) = 0$$

$$2r - 1 = 0 \rightarrow 2r = 1 \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$r - 2 = 0 \rightarrow r = 2$$

عندما $r = \frac{1}{2}$ فان $a = \dfrac{70}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}} = \dfrac{70}{\frac{7}{4}} = 70 \times \dfrac{4}{7} = 40$

عندما $r = 2$ فان $a = \dfrac{70}{1 + 2 + 4} = \dfrac{70}{7} = 10$

∴ الاعداد هي أما $(10 , 20 , 40)$ أو $(40 , 20 , 10)$

الفصل الثالث

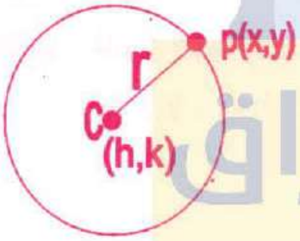
القطوع المخروطية Conic Sections

1- الدائرة Circle
2- القطع المكافئ Parabola
3- القطع الناقص Ellipse
4- القطع الزائد Hyper bola

[3-1] الدائرة Circle

هي المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها من نقطة ثابتة تسمى (المركز Center) يساوي مقداراً ثابتاً يسمى (نصف القطر Radius) لذا سنرمز لمركز الدائرة بالرمز c(h,k) ، ونرمز لنصف القطر بالرمز (r) أي ان الدائرة بلغة المجموعات

$$\boxed{Circle = \{P,\ Pc = r,\ r > 0\}}$$



حيث p(x,y) هي نقطة (point) في المستوي (plane)

[3-2] معادلة الدائرة القياسية Characteristic equation of circle

دائرة مركزها c(h,k) ونصف قطرها (r) من الوحدات حيث r>0 والنقطة p(x,y) نقطة في المستوى الاحداثي فان

$Pc = r$

وتربيع الطرفين $\Rightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = r$

الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة $\boxed{\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$

حالة خاصة

في حالة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل $(0^h,0^k)$ ونصف قطرها (r) تصبح الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة هي : $\boxed{x^2+y^2 = r^2}$

امثلـــــــة :

مثال1/ جد معادلة الدائرة التي مركزها (5,3) ونصف قطرها (4) وحدات :

الحل / نطبق الصيغة القياسية لمعادلة الدائرة :

$$c(h,k) = c(5,3)\ ,\ r=4$$

$\because (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\therefore (x-5)^2+(y-3)^2=4^2$

معادلة الدائرة هي : $(x-5)^2+(y-3)^3=16$

مثال2/ جد معادلة الدائرة التي مركزها (1,5-) ونصف قطرها (6) وحدات :

الحل /

$c(h,k) = c(-5,1)$ ، $r=6$ (units) وحدات

$\because (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$\therefore (x-(-5))^2+(y-1)^2=6 \rightarrow (x+5)^2(y-1)^2 = 36$

مثال3/ اوجد مركز ونصف قطر الدائرة التي معادلتها $(x-5)^2+(y+3)^2 = 49$:

الحل / بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$c(h,k)=c(5,-3)$

$r^2 = 49 \rightarrow r = \sqrt{49} = 7$ وحدات

ملاحظة1/ لقد تعلمت في الصف الرابع العلمي بعض القوانين منها :

اولاً . قانون المسافة بين نقطتين $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ يعطى بالعلاقة $P_1P_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

ثانياً . قانون البعد (المسافة الرأسية) بين المستقيم L الذي معادلته : $Ax+By+c=0$ والنقطة الخارجة عنه $P(x_1 , y_1)$ يعطى حسب العلاقة :

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ثالثاً . تنصيف قطعة مستقيم $\overline{P_1P_2}$ حيث $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ في المستوي الاحداثي المتعامد ويعطى حسب العلاقة

$$X = \frac{x_1+x_2}{2} , y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

$\therefore P(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2} , \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ احداثيات نقطة التنصيف

امثلـــــة

مثال1/ جد معادلة الدائرة التي مركزها c(4,3) وتمر بالنقطة P(2,1) ؟

الحل / معادلة الدائرة تتطلب معرفة طول r واحداثيات نقطة المركز c (نفكر كيف نجدهما من معطيات المسائلة)

احداثيات المركز معطاة $\therefore$ نفكر كيف نجد طول r

$Pc = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

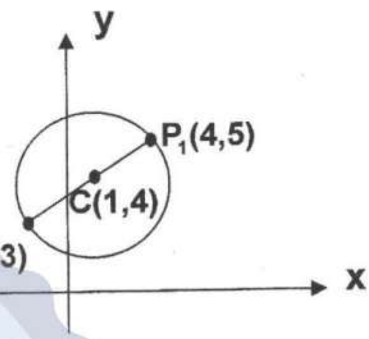
$Pc = \sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$

$r = Pc = \sqrt{8}$

$\therefore$ المعادلة القياسية للدائرة هي $\therefore (x- 4)^2+(y-3)^2 = 8$

مثال2/ جد معادلة الدائرة التي نهايتي احد اقطارها النقطتان $P_1(4,5)$, $P_2(-2,3)$

الحل / النقطة $c(x,y)$ هي منتصف $\overline{P_1P_2}$



$$C(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{4+(-2)}{2}\ ,\ \frac{5+3}{2}\right)$$

$$C = \left(\frac{4-2}{2}\ ,\ \frac{8}{2}\right) = \left(\frac{2}{2}\ ,\ \frac{8}{2}\right) = (1,4)$$

$$r = P_1C = \sqrt{(4-1)^2+(5-4)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \text{ units}$$

المعادلة القياسية

$$(x-1)^2+(y-4)^2 = 10$$

ملاحظة 2/ طريقة ثانية في ايجاد معادلة الدائرة عن طريق استخدام القاعدة التالية اذا كانت $P_1(x_1,y_1)$ ، $P_2(x_2,y_2)$ هي احداثيات نهايتي قطر فيها فان معادلة الدائرة هي :

$$\boxed{x^2+y^2-x(x_1+x_2)-y(y_1+y_2)+x_1x_2+y_1y_2 = 0}$$

فيكون حل المثال السابق (**مثال2**) هو :

$$x^2+y^2-x(4+(-2))-y(5+3)+4(-2)+5(3) = 0$$

$$x^2+y^2-2x-8y-8+15 = 0$$

$$\underline{x^2+y^2-2x-8y+7 = 0}$$

لاحظ المعادلة القياسية في الحل الاول للمثال (2) هي :

$(x-1)^2+(y-4)^2 = 10$ وبتبسيط المعادلة

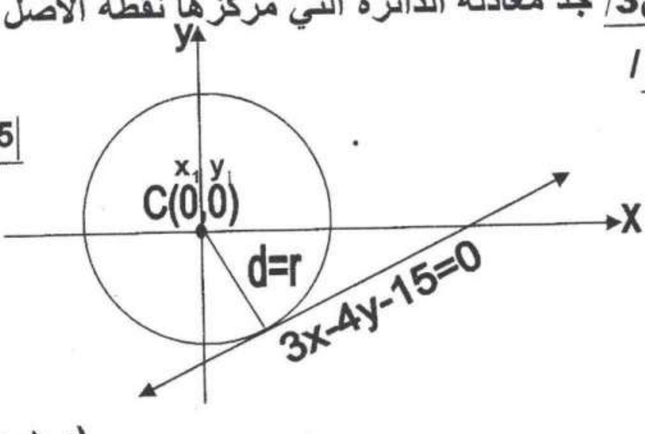
$x^2-2x+1+y^2-8y+16-10 = 0$ نحصل على نفس

$x^2+y^2-2x-8y+17-10 = 0$ حل القانون

$\underline{x^2+y^2-2x-8y+7 = 0}$ السابق

مثال3/ جد معادلة الدائرة التي مركزها نقطة الاصل وتمس المستقيم $3x-4y-15=0$ ؟

الحل /



$$d = \frac{|3x_1-4y_1-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|(3)(0)-(4)(0)-15|}{\sqrt{9+16}}$$

$$= \frac{|-15|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3 \text{ units}$$

$$\therefore d = r = 3 \text{ units}$$

$$x^2+y^2 = 9$$

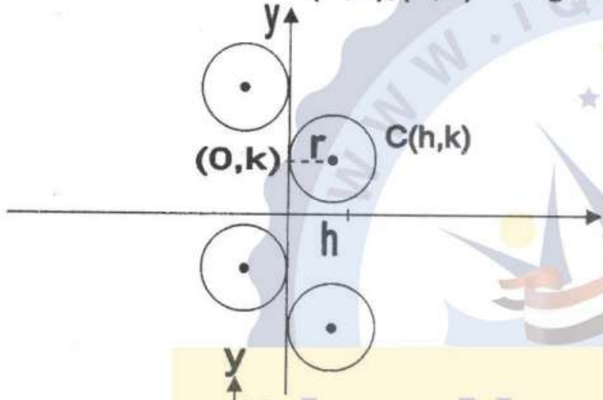
(و.هـ.م)

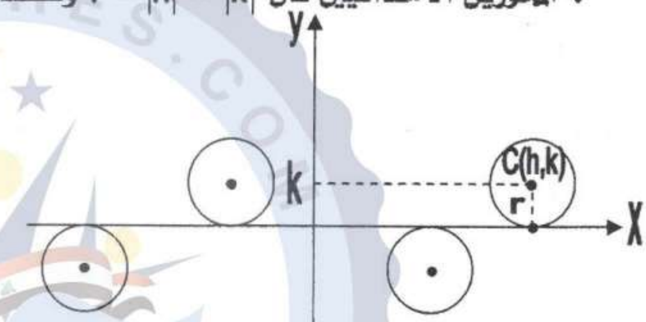
[3-2-1] معادلة الدائرة

اذا مست احد المحورين او مع كليهما اذا علم احداثيات المركز ونصف قطر الدائرة .

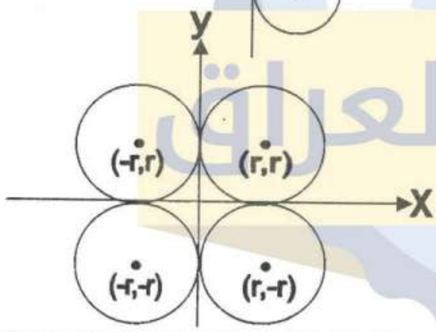
اذا مست الدائرة التي مركزها $C(h,k)$ ونصف قطرها r

- محور السينات فان $r = |k|$ ونقطة التماس هي $(h,0)$
- محور الصادات فان $r = |h|$ ونقطة التماس هي $(0,k)$
- المحورين الاحداثيين فان $r = |h| = |k|$ ونقطتا التماس هما $(h,0),(0,k)$





فاذا الدائرة تمس المحورين وتقع في



اولا. الربع الاول يكون مركزها (r,r)
ثانيا. الربع الثاني يكون مركزها $(-r,r)$
ثالثا. الربع الثالث يكون مركزها $(-r,-r)$
رابعا. الربع الرابع يكون مركزها $(r,-r)$

امثلـــــة

مثال 1/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني ومركزها $(3,2)$ ؟

الحل / $\because$ الدائرة تمس المحور السيني (x)

$\therefore r = |k| = |2| = 2\,unite$

$\therefore (x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$\therefore (x-3)^2+(y-2)^2 = 4$

وبتبسيط المعادلة نحصل على $x^2+y^2-6x-4y+9+4 = 4$

$x^2+y^2-6x-4y+9+4-4 = 0$

المعادلة العامة $x^2+y^2-6x-4y+9 = 0$

ملاحظة 1/ ممكن ايجاد معادلة الدائرة التي تمس المحور السيني بطريقة اخرى حسب القاعدة

$$\boxed{x^2+y^2-2hx-2ky+h^2 = 0}$$

حيث يكون الحل حسب هذه القاعدة للمثال الاول

$x^2+y^2-2(3)x-2(2)y+3^2 = 0$

المعادلة $x^2+y^2-6x-4y+9 = 0$

مثال2/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي ومركزها $(4,-1)$ ؟

الحل / بما ان الدائرة تمس المحور الصادي (y)

$\therefore r = |h| = |4| = 4units$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$(x-4)^2+(y-(-1))^2 = 16 \rightarrow (x-4)^2+(y+1)^2 = 16$

$x^2-2\times 4x+16+y^2+2y+1 = 16 \rightarrow x^2+y^2-8x+2y+17-16 = 0 \rightarrow x^2+y^2-8x+2y+1 = 0$

ملاحظة 2/ ممكن ايجاد معادلة الدائرة التي تمس المحور الصادي بطريقة اخرى حسب القاعدة

$\boxed{x^2+y^2-2hx-2ky+k^2 = 0}$

فيكون الحل حسب القاعدة :

$x^2+y^2-2hx-2ky+k^2 = 0$

$x^2+y^2-2(4x)-2(-1)y+(-1)^2 = 0$

$x^2+y^2-8x+2y+1 = 0$

مثال3/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين ومركزها $(4,-4)$ ؟

الحل / بما ان الدائرة تمس المحورين

$\therefore r = |h| = |k| \rightarrow r = |4| = |-4| = 4units$

$\therefore r = 4units$

$(x-4)^2+(y-(-4))^2 = 16 \rightarrow (x-4)^2+(y+4)^2 = 16$ المعادلة القياسية

$x^2-8x+16+y^2+8y+16 = 16$

$x^2+y^2-8x+8y+16 = 16-16$

$x^2+y^2-8x+8y+16 = 0$ المعادلة القياسية

ملاحظة 3/ ممكن ايجاد معادلة الدائرة بطريقة اخرى بتطبيق القاعدة في الملاحظة **(1)** و**(2)**حيث نحصل على المعادلة .

$x^2+y^2-2(4x)-2(-4)y+16 = 0$

$x^2+y^2-8x+8y+16 = 0$

مثال4/ جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتقع في الربع الثالث ونصف قطرها 5 وحدات ؟

الحل / الاشارة بالسالب للاحداثيين لانها تقع في الربع الثالث من ملاحظة اشارة الاحداثي السيني x و الاحداثي الصادي y

$C = (-r,-r) = (\overset{h}{-5},\overset{k}{-5})$

$(x+5)^2+(y+5)^2 = 25$ المعادلة القياسية وبالتبسيط

$x^2+y^2+10x+10y+25 = 0$

[3-2-2] المعادلة العامة للدائرة General Equation Of Circle

معادلة الدائرة بصورتها العامة ناتجة من تبسيط المعادلة القياسية :-

المعادلة القياسية $\boxed{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$

$$x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 = r^2$$

$$x^2+y^2-\underline{2h}x-\underline{2k}y+\underline{h^2+k^2-r^2} = 0$$

واذا فرضنا أن $\underline{A=-2h}$, $\underline{B=-2k}$, $\underline{C=h^2+k^2-r^2}$

تصبح معادلة الدائرة بالصورة

$\boxed{x^2+y^2+Ax+By+C = 0}$ ((المعادلة العامة))

أي أن قيم h , k , r^2 نستخرجها من الفرضية المذكورة اعلاه لان نصف القطر عبارة عن مسافة والمسافة دائماً بالموجب فأنها $r^2 = h^2+k^2-C > 0$ اكبر من صفر

$\boxed{h = \frac{-A}{2}}$ $\boxed{k = \frac{-B}{2}}$

ملاحظة / من المعادلة العامة للدائرة نلاحظ أن :

* معادلة من الدرجة الثانية للمتغيرين y,x
* معامل x^2 = معامل y^2 ((الافضل ان يكون ١))
* المعادلة خالية من الحد xy
* $r>0$ أي أن $\sqrt{h^2+k^2-C} > 0$

امثلـــــــــــة

مثال1/ أي من المعادلات الاتية يمثل معادلة دائرة :

(a) $x^3+y^3-2x+6y-9 = 0$

(b) $3x^2-5y^2-2x+6y-19 = 0$

(c) $x^2+y^2-5xy-2x+6y-19 = 0$

(d) $x^2+y^2-\underline{2x}+\underline{6y}+\underline{19} = 0$

(e) $x^2+y^2-2x+6y-19 = 0$

الحل / (a) لاتمثل معادلة دائرة لانها معادلة من الدرجة الثالثة .

(b) لا تمثل معادلة دائرة لان معامل $x^2 \neq$ معامل y^2 .

(c) لاتمثل معادلة دائرة لانها تحتوي على الحد xy .

(d) لاتمثل معادلة دائرة حيث :

$$h = \frac{-(-2)}{2} = 1 \quad , \quad k = \frac{-6}{2} = -3 \quad , \quad C = 19$$

$$r = \sqrt{h^2+k^2-C} = \sqrt{1+9-19} = \sqrt{10-19} = \sqrt{-9} \notin R$$

∴ لاتمثل معادلة دائرة

(e) تمثل معادلة دائرة حيث :

$$h=1 \quad , \quad k=-3 \quad , \quad c=-19$$

$$r\sqrt{h^2+k^2-C} = \sqrt{1+9+19} = \sqrt{29} > 0$$

مثال2/ جد احداثي مركز ونصف قطر الدائرة $2x^2+2y^2+12x-8y+6=0$

الحل / نجعل معامل x^2 يساوي معامل y^2 ويساوي 1

$$\therefore \left[2x^2+2y^2+12x-8y+6=0\right] \div 2$$

$$x^2+y^2+6x-4y+3=0$$

$$\therefore C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) = C\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = C(-3, 2)$$

$\therefore C(-3, 2)$ مركز الدائرة هو :

$$\therefore r = \sqrt{h^2+K^2-C} = \sqrt{(-3)^2+(2)^2-3} = \sqrt{9+4-3} = \sqrt{10}$$

$$\therefore r = \sqrt{10} \text{ units}$$

مثال3/ اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها $C(1,-3)$ ، وحدات $r=2$.

الحل /

$r=2 \quad , \quad c(1,-3)$

$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$

$(x-1)^2+(y+3)^2 = 2^2$

$(x-1)^2+(y+3)^2 = 4$ نبسط المعادلة

$x^2-2x+1+y^2+6y+9=4$

$x^2-2x+y^2+6y+6=0$ المعادلة العامة للدائرة :

مثال4/

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(1,-2)$ ، $P_2(4,-3)$ ويقع مركزها على محور الصادات .

الحل / بما ان الدائرة يقع مركزها على محور الصادات

$\therefore C(0, k)$

$\therefore r = P_1C = \sqrt{(0-1)^2+(k+2)^2} = \sqrt{1+(k+2)^2}$

$\therefore r = P_2C = \sqrt{(0-4)^2+(k+3)^2} = \sqrt{16+(k+3)^2}$

انصاف اقطار الدائرة الواحدة متساوية

$\therefore \sqrt{1+(k+2)^2} = \sqrt{16+(k+3)^2}$

$\therefore 1+(k+2)^2 = 16+(k+3)^2$ بتربيع الطرفين

بالتبسيط $\therefore\ 1 + k^2 + 4k + 4 = 16 + k^2 + 6k + 9$

$1 + \cancel{k^2} + 4k + 4 = 16 + \cancel{k^2} + 6k + 9$

$2k = -20$

$k = \frac{-20}{2} = -10$

$\therefore\ k = -10$

$\therefore\ C(0\ ,\ -10)$

$r = \sqrt{1 + (-10 + 2)^2} = \sqrt{65}$ units

معادلة الدائرة هي : $\therefore\ X^2 + (y + 10)^2 = 65$

مثال5/ جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $P_1(0\ ,0)$ ، $P_2(2\ ,0)$ ، $P_3(3\ ,-1)$

الحل / المعادلة العامة للدائرة $X^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ ---------(1

$P_1(0\ ,0)$ تحقق المعادلة رقم (1)

$(0)^2 + (0)^2 + A(0) + B(0) + C = 0$

$C = 0$ ------------------------------(2

$P_2(2\ ,0)$ تحقق المعادلة رقم (1)

$(2)^2 + (0)^2 + A(2) + B(0) + (0) = 0$

$4 + 0 + 2A + 0 + 0 = 0$

$2A = -4$

$A = -2$ ------------------------------ (3

$P_3(3\ ,-1)$ تحقق المعادلة رقم (1)

$(3)^2 + (-1)^2 + A(3) + B(-1) + C = 0$ ------------------------------ (4

نعوض قيم A ، C في معادلة (4)

$10 + 3(-2) - B + 0 = 0$

$10 - 6 - B = 0$

$4 - B = 0$

$B = 4$

معادلة الدائرة هي : $X^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

مثال6/

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(2\ ,1)$ ، $P_2(-1\ ,1)$ ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته $2X - 4y - 5 = 0$

الحل /

المعادلة العامة للدائرة $X^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$P_1(2, 1)$ تحقق المعادلة العامة

$4 + 1 + 2A + B + C = 0$

$5 + 2A + B + C = 0$ ---------------- (1

$P_2(-1, 1)$ تحقق المعادلة العامة

$2 - A + B + C = 0$ ---------------- (2

نحل المعادلتين (1) والمعادلة (2) آنيا وكالتالي :

$+5 + 2A + B + C = 0$ .... (1

$\mp 2 \pm A \mp B \mp C = 0$ .... (2

بالطرح

$3 + 3A = 0$

$3A = -3$

$A = \frac{-3}{3} = -1$

$\therefore A = -1$ ---------------- (3

مركز الدائرة $\therefore C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$

مركز الدائرة يحقق معادلة المستقيم $2X - 4y - 5 = 0$

$-A + 2B - 5 = 0$ ---------------- (4

نعوض معادلة (3) في معادلة (4)

$1 + 2B - 5 = 0$

$2B = 4$

$B = 2$

$5 + 2(-1) + 2 + C = 0$

$5 + C = 0$

$C = -5$

معادلة الدائرة هي : $X^2 + y^2 - x + 2y - 5 = 0$

حلول تمارين (1-3)

الدائرة

(1) بين أي من المعادلات الاتية تمثل معادلة دائرة ؟

(a) $x^2+3y^2-2x+3y=0$

الحل / لا تمثل معادلة دائرة لان معامل $x^2 \neq$ معامل y^2 $(3\neq 1)$.

(b) $x^2+y^2+4x-6y=12$

الحل / تمثل معادلة دائرة حيث : نحولها الى الصيغة القياسية لاستخراج r واحداثيات المركز

بطريقة اكمال المربع

$x^2+4x+y^2-6y=12$

$(\frac{4}{2})^2 , (\frac{6}{2})^2$

$x^2+4x+4+y^2-6y+9=12+4+9$

$(x+2)^2+(y-3)^2=25$ $\quad r=5$ units $\quad C(-2,3)$

موجب موجب موجب

(c) $x^2+y^2+2xy=1$

الحل / لاتمثل معادلة دائرة لانها تحتوي على الحد xy

(d) $x^2+y^2=0$

الحل / لاتمثل معادلة دائرة لان r=0 فهي معادلة نقطة الاصل (0,0)

(e) $y=-2x$

الحل / لاتمثل معادلة دائرة لانها معادلة من الدرجة الاولى

---

(2) جد معادلة الدائرة في كل حالة من الحالات الاتية :

(أ) مركزها $C(3,-2)$, وحدة طول $r=5$

(a) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$

(ب) مركزها نقطة الاصل وتمر بالنقطة $P(-4,3)$

(b) $Pc\sqrt{(-4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$ وحدة طول

$x^2+y^2=25$

(ج) مركزها $C(-1,5)$ وتمر بالنقطة $P(4,3)$

$Pc=\sqrt{(4-(-1))^2+(3-5)^2} \rightarrow Pc=\sqrt{(4+1)^2+(-2)^2}$

$Pc=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$(x+1)^2+(y-5)^2=29$

---

(3) جد معادلة الدائرة التي نهايتي قطر فيها $P_1(2,-3)$, $P_2(4,1)$ بثلاثة طرق مختلفة ؟

الطريقة الاولى /

$$h=\frac{x_1+x_2}{2}\ ,\ k=\frac{y_1+y_2}{2}\qquad C(h,k)$$

$$h=\frac{2+4}{2}\ ,\ k=\frac{-3+1}{2}\rightarrow h=\frac{6}{2}\ ,\ k=\frac{-2}{2}$$

$$C(3,-1)\ ,\ P_2(4,1)\ .\ P_2C=\sqrt{(4-3)^2+(1-(-1))^2}$$

$$P_2c=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

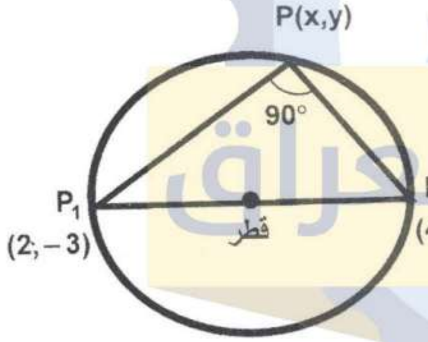
$$(x-3)^2+(y+1)^2=5\ \rightarrow\ x^2-6x+9+y^2+2y+1=0\ \rightarrow\ x^2+y^2-6x+2y+5=0$$

طريقة ثانية طريقة الصيغة (القاعدة)

$$x^2+y^2-x(\overset{4}{x_1}+\overset{2}{x_2})-y(\overset{1}{y_1}+\overset{(-3)}{y_2})+\overset{8}{x_1x_2}+\overset{-3}{y_1y_2}=0\ \rightarrow\ x^2+y^2-x(6)-y(1-3)+8-3=0$$

$$\boxed{x^2+y^2-6x+2y+5=0}\ (1)$$

طريقة ثالثة / ناخذ نقطة مثل $p(x,y)$ على الدائرة



$\because$ $\overline{P_1P_2}$ قطر دائرة

$m\measuredangle P_1PP_2=90°$ (محيطية في نصف دائرة)

في ΔP_1PP_2 القائم الزاوية في P

$(PP_1)^2+(PP_2)^2=(P_1P_2)^2$ (مبرهنة فيثاغورس)

$$(x-2)^2+(y+3)^2+(x-4)^2+(y-1)^2=(2-4)^2+(-3-1)^2$$

$$x^2-4x+4+y^2+6y+9+x^2-8x+16+y^2-2y+1=4+16$$

$$2x^2+2y^2-12x+4y+30=20$$

$$\left[2x^2+2y^2-12x+4y+10=0\right]\div 2$$

$x^2+y^2-6x+2y+5=0$ معادلة الدائرة المطلوبة

(4) جد احداثيات المركز ونق الدوائر الاتية :

(a) $(x+5)^2+(y-4)^2=36$

$C(-5,4)\ ,\ r=6$

(b) $(x-2)^2+y^2=9\ \rightarrow\ (x-2)^2+(y-0)^2=9$

$C(2,0)\ ,\ r=3$

(c) $2x^2+2y^2+3x+4y=0$

$$(2x^2+2y^2+3x+4y=0)\times\frac{1}{2}$$

$$x^2+y^2+\frac{3}{2}x+2y=0$$

$$c(-\frac{3}{4},-1)\ ,\ r=\frac{5}{4}$$

$$h=\frac{-A}{2}=\frac{-3}{4}\ ,\ k=\frac{-B}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

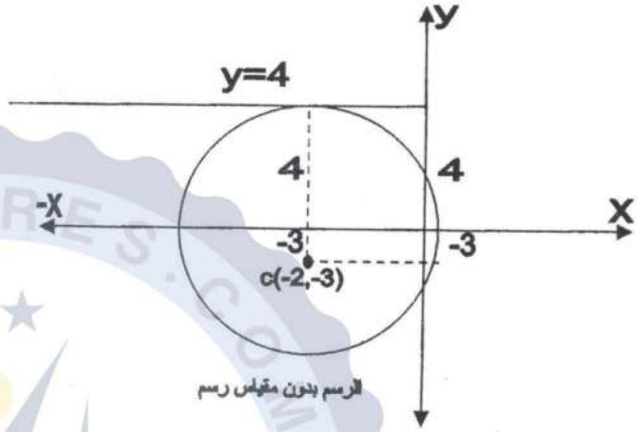
$$r=\sqrt{(\frac{-3}{4})^2+(-1)^2+(0)^2}$$

$$r=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$$

(5) جد معادلة الدائرة التي تمس المستقيم $y=4$ ومركزها $c(-2,-3)$ ؟

الحل /

$y_1=4\ ,\ k=-3\ ,\ r=?$



من الرسم المسافة على خط الاعداد تكون بالمطلق لان المسافة بالموجب

$r=|k-y_1|=|y_1-k|$

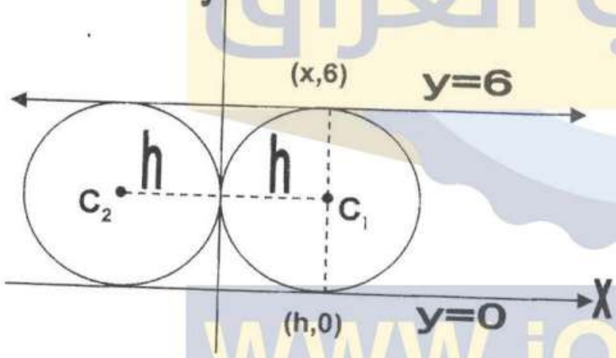
$=|-3-4|=|4-(-3)|$

$=|-7|=|7|=7\text{units}$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=49$

(6) جد معادلة الدائرة التي تمس المحورين الاحداثيين وتمس المستقيم $y=6$ ؟

الحل / هنا المسافة بين العددين على خط الاعداد



هي قطر الدائرة $r=\frac{D}{2}$

$\therefore r=\frac{|6-0|}{2}=\frac{|0-6|}{2}=3\text{units}$

نقطة المنتصف $k=\frac{6+0}{2}=3\text{units}$

$h=\mp r=\mp 3$

$r=3$, $C_2(-3,3)$, $C_1(3,3)$ تتكون لدينا معادلتين هما

$(1)(x-3)^2+(y-3)^2=9$ $\quad$ $(2)(x+3)^2+(y-3)^2=9$

(7) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطة $(-3,6)$ وتمس المحورين الاحداثيين ؟

الحل / الدائرة تقع في الربع الثاني لانها تمر بالنقطة $(-3,6)$

ومن ملاحظة اشارة المحاور فان $h=-r$ ، $k=r$

$\therefore C(-r,r)$

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

$\because (-3,6)\in \text{circle}$ $\quad$ $\therefore (-3+r)^2+(6-r)^2=r^2$

$\therefore (-3+r)^2+(6-r)^2=r^2 \rightarrow 2r^2-r^2-18r+45=0$

$r^2-18r+45=0$

$(r-3)(r-15)=0$

$r-3=0 \rightarrow r=3$

$r-15=0 \rightarrow r=15$

$C(-15,15)$, $C_2(-3,3)(r=3)$

$(x+15)^2 \overset{\text{equation1}}{+} (y-15)^2=225$

$(x+3)^2 \overset{\text{equation2}}{+} (y-3)^2=9$

(8) جد معادلة الدائرة التي نصف قطرها 5 وحدات وتمس المحورين الاحداثيين والواقعة :

(أ) في الربع الثاني (ب) في الربع الرابع (ج) في الربع الاول

الحل / (أ) في الربع الثاني

$C(-5,5) \quad , \quad r=5$

$(x+5)^2+(y-5)^2=25$

(ب) في الربع الرابع

$C(5,-5) \quad , \quad r=5$

$(x-5)^2+(y+5)^2=25$

(ج) في الربع الاول

$C(5,5) \quad , \quad r=5$

$(x-5)^2+(y-5)^2=25$

---

(9) اكتب المعادلة العامة للدائرة التي مركزها C(2,-3) ونصف قطرها 4 وحدات ؟

الحل /

$(x-2)^2+(y+3)^2=16$

$x^2-4x+4+y^2+6y+9=16$

$x^2+y^2-4x+6y+13-16=0$

$x^2+y^2-4x+6y-3=0$

---

(10) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين $P_1(3,-1)$, $P_2(5,1)$ ويقع مركزها على محور السينات ؟

الحل /

$\because C \in x\text{-axis} \rightarrow C(h,0)$

حسب التعريف (تعريف الدائرة)

$P_1C=r \quad , \quad P_2C=r$

$\therefore P_1C=P_2C$

$$\sqrt{\overset{(3,-1)}{(h-3)^2+(0-(-1))^2}}=\sqrt{\overset{5,1}{(h-5)^2+(0-(-1))^2}}$$

بالتربيع والتبسيط

$\cancel{h^2}-6h+9+\cancel{1}=\cancel{h^2}-10h+25+\cancel{1}$

$-6h+10h=25-9$

$4h=16$

$h=4 \qquad \therefore C(4,0)\ ,\ P_2(5,1)$

$P_2C=r=\sqrt{(5-4)^2+(1-0)^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

$C(4,0) \quad , \quad r=\sqrt{2} \quad , \quad (x-4)^2+(y-0)^2=2$

$(x-4)^2+y^2=2$

(11) جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقاط $P_1(1,0)$, $P_2(0,1)$, $P_3(3,4)$ ؟

الحل / معادلة الدائرة العامة $x^2+y^2+Ax+By+C = 0$ ....(1)

$P_1(1,0)$ تحقق المعادلة (1)

$1+0+A+0+C=0$

$\boxed{A+C+1 = 0 \text{ ....(2)}}$

$P_2(0,1)$ تحقق المعادلة (1)

$0+1+0+B+C=0$

$\boxed{B+C+1 = 0 \text{ ....(3)}}$

$A+\cancel{C}+1 = 0$........(2)

$B+\cancel{C}+1 = 0$............(3) بالطرح

$A-B=0$

$A=B$.............................(4)

$P_3(3,4)$ تحقق المعادلة (1)

$9+16+3A+4B+C=0$

نعوض معادلة (4) في هذه المعادلة فتصبح

$25+3B+4B+C=0$

$7B+C+25 = 0$.............(5)

$-B-C-1= 0$ ....(3) بالطرح

$6B+24=0 \rightarrow 6B=-24$

$B = \frac{-24}{6} = -4 \rightarrow \boxed{B = -4}$

$A=B \quad \therefore A = -4$

$A+C+1= 0$

من (٢) نستخرج قيمة C بدلالة A

$-4+C+1=0$

$C = 4-1= 3$

$\therefore x^2+y^2-4x-4y+3 = 0$

المعادلة العامة للدائرة

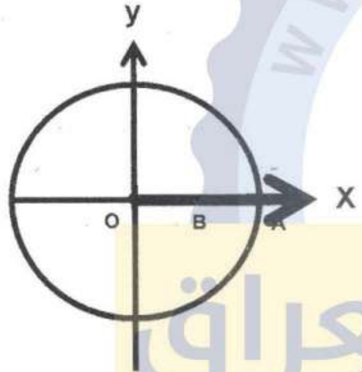
الفصل الرابع

الدوال الدائرية

[4-2] التطبيق اللاف   The Winding Mapping

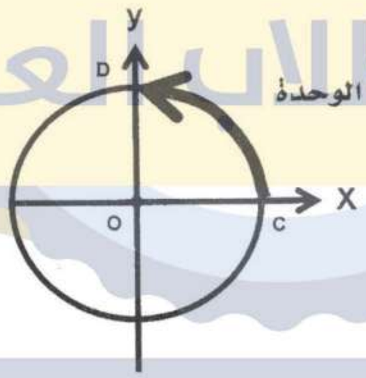
هو التطبيق الذي يقرن أي عدد حقيقي بنقطة من دائرة الوحدة (أو بزاوية موجهة بالوضع القياسي) .

لكل زاوية موجهة نقطة مثلثية واحدة وواحدة فقط . ففي الشكل المجاور النقطة المثلثية للزاوية الموجهة $\overrightarrow{AoB}$ هي A وهي تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة (دائرة نصف قطرها = 1 وحدة طول) .



$\because$ A تقع على الجزء الموجب من محور $\overrightarrow{AoB}$

$r = oA$ ، $r=1$ $\therefore A = (\underset{x}{1} , \underset{y}{0})$

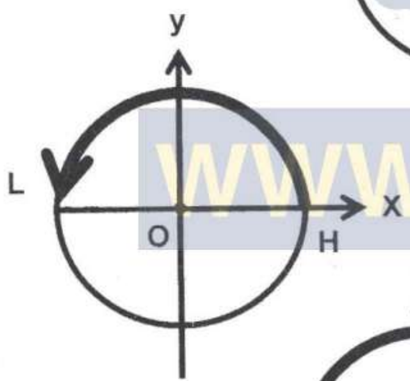


النقطة المثلية للزاوية $\overrightarrow{CoD}$ هي D

وهي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة

$\because$ D تقع على الجزء الموجب من محور $\overleftrightarrow{y}$

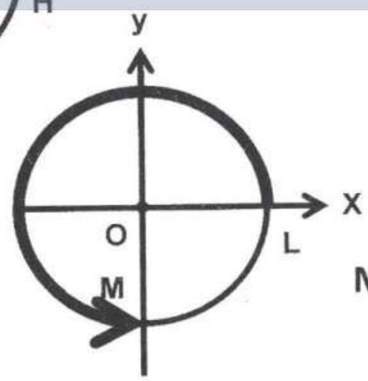
$\therefore D = (\underset{x}{0} , \underset{y}{1})$



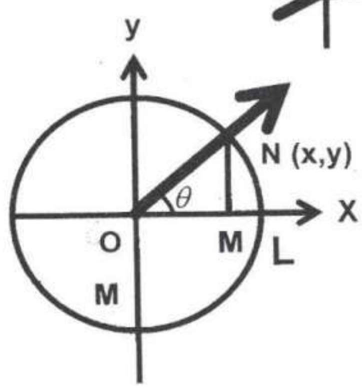
والنقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{HoL}$ هي L وهي نقطة تقاطع الضلع النهائي للزاوية مع دائرة الوحدة .

$\because$ L تقع على الجزء السالب من المحور $\overleftrightarrow{X}$

$\therefore L = (-1 , 0)$



وبالمثل النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{LoM}$ هي $M=(0,-1)$



وفي الشكل المجاور النقطة المثلثية للزاوية $\overrightarrow{LoN}$ هي N

حيث $N=(x,y)$ مثلا $N=\left(\underset{\cos\theta}{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{x} , \underset{\sin\theta}{\frac{1}{2}}^{y}\right)$

فاذا كانت θ عدداً حقيقياً ، وكانت $N=(x,y)$ النقطة الواقعة على دائرة الوحدة الموافقة للعدد θ فان العدد x هو cosine θ ويرمز له cos θ حيث θ قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها الابتدائي من N .

اما العدد y هو sine θ ويرمز له sin θ حيث θ قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي الذي يمر ضلعها النهائي من N .

وبهذا نكون قد عرفنا دالتين sin θ , cos θ مجال كل منهما R (مجموعة الاعداد الحقيقية) والمجال المقابل لكل منهما $[1 , -1]$ وذلك لانه مهما يكون $\theta \in R$ فان

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

فمثلا الزاوية $\theta = \frac{\pi}{2}$ = العدد $\frac{3.14}{2} = 1.57$ فيكون الزوج المرتب $(1 , \frac{\pi}{2})$ $(\frac{\pi}{2} , \sin\theta)$.

تعريف

الجيب (sine) دالة مجالها R ومجالها المقابل $[1 , -1]$ بحيث : $\forall \theta \in R : \sin\theta = y$ حيث y الاحداثي الصادي للنقطة المثلثية .
الجيب تمام (cosine) دالة مجالها R ومجالها المقابل $[1 , -1]$ بحيث $\forall \theta \in R : \cos\theta = x$

القياس الرئيس للزاوية

ان اية زاوية موجهة بالوضع القياسي تقترن بمجموعة غير منتهية من الاعداد يدعى كل منها قياساً لهذه الزاوية . وقد جرت العادة على اعتبار القياس الدائري الذي يحقق العلاقة $0 \le \theta < 2\pi$. او القياس الستيني الذي يحقق العلاقة $0 \le \theta < 360°$ هو القياس الرئيس للزاوية واضح ان هذا القياس وحيد ، وان بقية القياسات تنتج باضافة $(2k\pi)$ حيث (k) عدد صحيح ،الى القياس الرئيس

امثلــــــــة

مثال 1/ اوجد القياس الرئيس لكل من الزوايا الاتية ؟

(a) 8.75π , (b) 66

الحل / طالما العدد 8 زوجي ومقرون بـ π فاننا نستطيع ان نضيف او نطرح عدد من اللفات الدائرية والتي كل لفة منها = 2π لغرض تحويل الزاوية الى القياس الرئيس .

$$(a)\ 8.75\pi - 8\pi = 0.75\pi = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{or } 8.75\pi = \underbrace{8\pi}_{2k\pi} + 0.75\pi = \boxed{\frac{3}{4}\pi} \text{ القياس الرئيس } \quad \left(0.75 = \frac{\cancel{75}^{3}}{\cancel{100}_{4}} = \frac{3}{4}\right)$$

(b) 66

هنالك حلان

الحل الاول (1) $66 = 66 \times 1 = 66 \times \frac{\pi}{\pi} \quad (1 = \frac{\pi}{\pi})$

$$= 66 \times \frac{\pi}{\frac{22}{7}} = \cancel{66}_3\, \pi \frac{7}{\cancel{22}_1} = 21\pi$$

21π هو قياس من بقية القياسات عليه نحوله الى القياس الرئيس كيف ؟

ان العدد 20 هو اقرب عدد زوجي من البايات الى العدد الفردي **21** لذلك نرفع عدد اللفات الزائدة وهي 20π

القياس الرئيس $21\pi = 21\pi - 20\pi = \pi$

---

(2) الحل الثاني / الـ **66** ناتجة عن حاصل ضرب عدد × π نستخرج قيمة العدد هكذا :

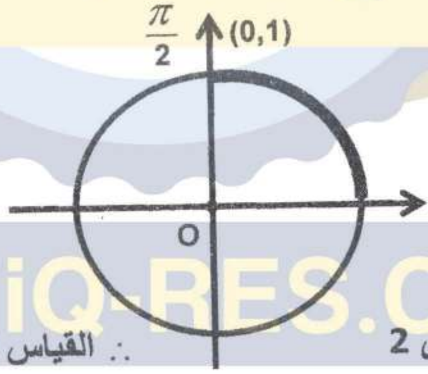
$66 = a\pi$

$a = \frac{66}{\pi} = \frac{66}{3.14} = 21 \qquad \boxed{\therefore 66 = 21\pi}$

الان نطرح اللفات الزائدة الموجودة في 21π هكذا

القياس الرئيس $21\pi = 21\pi - 20\pi = \pi$

مثال 2/ احسب $\sin(\frac{-7\pi}{2})$



الحل / $\frac{7}{2} = 3.5$

$a > 3.5$

$a = 4$

ولان السبعة مقسومة على 2

$a = 4 \times 2 = 8$

$\therefore$ القياس الرئيس للزاوية $\frac{-7\pi}{2}$ هو $\frac{\pi}{2}$

$(\frac{\pi}{2} = \frac{180}{2} = 90°)$

$\therefore \sin(\frac{-7\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$

$\sin 90° = 1$

او بواسطة رسم دائرة الوحدة

وكذلك بواسطة منحني الجيب الذي سندرسه لاحقاً تستطيع ان تستخرج $\sin\frac{\pi}{2}$

حل ثاني / $\theta = \frac{-7\pi}{2} + 4\pi = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \sin\frac{\pi}{2} = 1$

حلول تمارين (1-4)

(1) جد القياسات الرئيسية لكل من الزاوايا التي قياساتها الاتية :

(a) 21π

$21\pi - 20\pi = \pi$ القياس الرئيس

طريقة اخرى للتاكد من الحل وهي التحويل من القياس النصف قطري الى الستيني

$21\cancel{\pi}\frac{180°}{\cancel{\pi}} = 21\times180 = 3780 - 3600$ (10 لفات)

$= 180 = \pi$

$21\pi = 21\times180$ أو

$= 3780 - 3600 = 180° = \pi$

(b) $\frac{-15}{2}\pi$

$\frac{15}{2} = 7.5 < 8$

$8 \times 2 = 16$

$\frac{16\pi}{2} - \frac{15\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\frac{-15}{2} \times 180 = -15 \times 90$ التاكد من الحل

$= -1350 + 1440$ $(1440 = 4\times360)$

$= 90°$ (4 لفات)

(و.هـ.م)

---

(2) جد الاعداد الحقيقية الاتية :

(a) $\sin\frac{\pi}{3} \rightarrow \sin\frac{180}{3} \rightarrow \sin 60°$

الحل/ من الزوايا الخاصة $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1.732}{2} = 0.866$

(b) $\cos\frac{19\pi}{6}$

عدد غير زوجي $19 \div 6 = 3$

الاقل منه 2 زوجي

$\cos(\frac{19\pi}{6} - \frac{12\pi}{6}) \rightarrow \cos\frac{7\pi}{6}$ $(\frac{\cancel{180}^{30}}{\cancel{6}_{1}}\times7 = 210)$

التعامل مع عدد زوج من التسعينات لايغير تسميه الـcos

$\cos 210 = \cos(180 + 30) = -\cos 30$

الزاوية تقع في الربع الثالث

جيب فقط الـ (sin موجب)	كل النسب موجبة Sin , cos , tan
ظله فقط الـ (tan موجب)	جيب تمام فقط الـ (cos موجب)

$-\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.866$

$\therefore \cos\frac{19\pi}{6} = -0.866$

(c) $\cos 24\pi$

$\cos(24\pi - 24\pi) \rightarrow \cos 0 \rightarrow \cos 0 = 1$

[4-3] دالة الظل (tangent)

تعريف

دالة الظل : tan

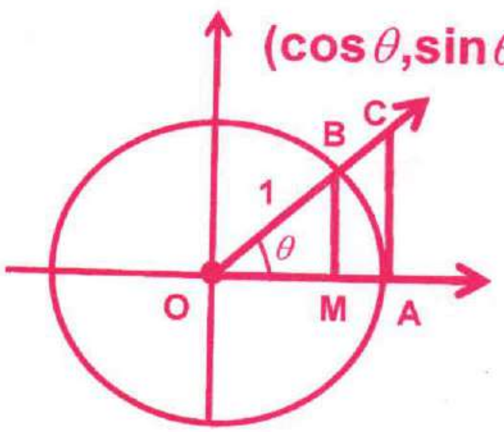
$\tan : \{\theta : \theta \in R , \cos\theta \neq 0\} \rightarrow R$

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

نلاحظ ان دالة الظل (tan) دالة ناتجة من قسمة $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

لتكن C دائرة الوحدة في الشكل المجاور

B هي النقطة المثلثية للزاوية θ احداثياً



B هي : $(\cos\theta , \sin\theta)$

نلاحظ ان r=oB=1

$\frac{BM}{oB} = \sin\theta$

$\frac{BM}{1} = \sin\theta$

$\therefore BM = \sin\theta$

وبالمثل $oM = \cos\theta$

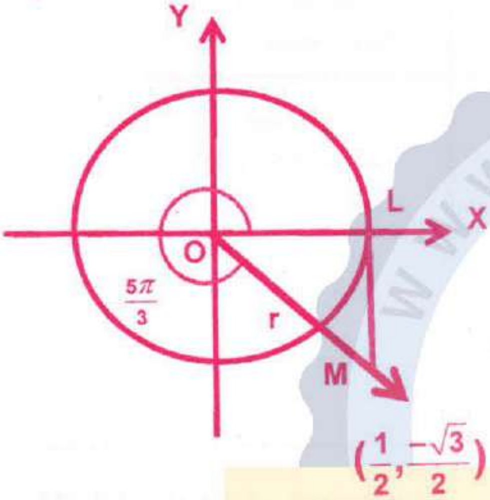
∵ المثلث OMP قائم الزاوية في M . حسب مبرهنة فيثاغورس نستنتج ان :

$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$

ملاحظة / نكتب عادة $\sin^2\theta$ بدلاً من $[\sin\theta]^2$ وكذلك نكتب $\cos^2\theta$ بدلاً من $[\cos\theta]^2$ وبالمثل نكتب $\sin^3\theta$ بدلاً من $[\sin\theta]^3$ وهكذا .

أي ان القاعدة السابقة يمكن ان تكتب $\boxed{\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1}$

مثال 3/ جد $\tan\frac{5\pi}{3}$



فكريا الزاوية = 300° $\therefore$ تقع في الربع الرابع من المثلث OML ان

$$\tan\frac{5\pi}{3} = \frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\frac{5\pi}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} \approx 1.732$$

مثال 4/ اذا كانت θ هي قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي وكان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد قيمة $\cos\theta$ و $\tan\theta$ علماً ان ضلع الزاوية النهائي التي قياسها θ يقع في الربع الثاني .

الحل /

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$\therefore \cos\theta = \pm\frac{4}{5}$

$\because$ θ تقع في الربع الثاني (كل جيب ظله جيب تمام)

$\therefore \cos\theta < 0 \rightarrow \cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$\therefore \tan\theta = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{-4}{5}}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{5} \times \frac{-5}{4}$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{-3}{4}$$

ملاحظة/ الزوايا المذكورة في هذا التمرين هي 37° و 53° وتستخدم في علم الفيزياء بكثرة وتعتبر من الزوايا الخاصة واضلاع المثلث متسلسلة 3,4,5

حلول تمارين (2-4)

(1) أوجد sin x , cos x , tan x

اذا علمت ان الضلع النهائي للزاوية (x) الموجهة في الوضع القياسي يقطع دائرة الوحدة في النقط المثلثية الاتية :

(a) $(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}})$, $\sin x = \frac{-2}{\sqrt{5}}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \div \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = -2$

(b) $(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{3})$, $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{6}}{3} \div \frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3} \times \frac{-2}{\sqrt{3}} = \frac{-2\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{2}}{3\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$

(c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 = \sqrt{3}$

(d) (0.88 , -0.48) , $\sin x = -0.48$, $\cos x = 0.88$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-0.48}{0.88} = -0.54$

---

(2) جد مايأتي :

(a) $\sin(30\pi) = \sin(30\pi - 30\pi) = \sin 0 = 0$

من دائرة الوحدة $(\underset{\cos}{1}, \underset{\sin}{0})$

(b) $\cos(-\frac{13\pi}{6})$ $13 \div 6 = 2.1$ نفتش عن عدد زوجي اكبر من 2

هو ٤ $(24 = 6 \times 4)$

$\cos(-\frac{13\pi}{6}) = \cos(\frac{24\pi}{6} - \frac{13\pi}{6}) = \cos\frac{11\pi}{6}$ $(30 \times 11 = 330°)$

$\cos\frac{11\pi}{6} = \cos(2\pi - \frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $\tan(\frac{4\pi}{3}) = \tan\frac{4\pi}{3} = \tan(\pi + \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$ → $\begin{cases} 60° \text{ الاول} \\ 240° \text{ الثالث} \end{cases}$

(d) $\cos(30\pi - 30\pi) = \cos 0 = 1$

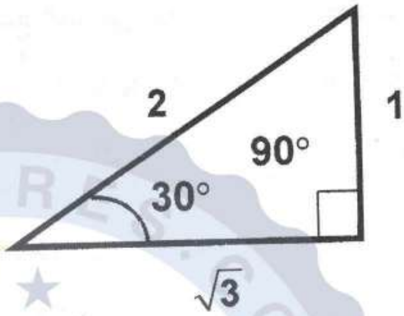
(3) جد قيمة مايأتي :

(a) $\sin^2 3 + \cos^2 3 = ?$

(b) $\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = ?$

الحل /

حسب القاعدة



(a) $\sin^2 3 + \cos^2 3 = 1$

(b) $\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6} = (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

---

(4) تحقق مما يأتي

$\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{2}$

$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}+\frac{3}{4} = 1$ left side

$\sin\frac{\pi}{2} = 1$ $(\frac{0}{\cos}, \frac{1}{\sin})$ right side

$\therefore$ الطرف الايسر = الطرف الايمن

القوانين المستخدمة في الدوال الدائرية

القوانين العامة

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

القوانين الخاصة

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$	$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$
$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$	$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$	$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$
$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$	$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$

الدوال الدائرية لمضاعفات الزوايا

$\sin 2x = 2\sin x \cos x$	$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$	$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

الدوال الدائرية لمجموع زاويتين والفرق بينهما

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ $\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$	$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$ $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$ $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$	

لكل عدد حقيقي فأن :

(1) $\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$

(2) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$ (3) $\tan^2\frac{x}{2} = \frac{1-\sin x}{1+\cos x}$

الدوال الدائرية لانصاف الزوايا

$\sin x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2x)}$ $\cos\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

$\sin\frac{x}{2} = \mp\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$ $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$

$\cos x = \mp\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2x)}$

[4-4] دوال دائرية اخرى

عرفنا في البنود السابقة الدوال الدائرية sin , cos , tan وباستخدام هذه الدوال يمكننا ان نعرف دوال اخرى وذلك كم يأتي :

(1) الدالة cotangent (ظل تمام) ويرمز لها cot وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة (الظل) tan (مقلوب reciprocal) أي ان

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \qquad \cot x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x}$$

تعريف [4-4-1]

دالة ظل التمام cot

$$\cot : \{\theta : \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \to R$$

$$\cot = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

أي ان الدالة cot تعرف لكل الاعداد الحقيقية بشرط $(\sin\theta \neq 0)$

(2) الدالة secant (قاطع) ويرمز لها sec وهي الدالة الناتجة من مقلوب الدالة cos ان

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية x بشرط $(\cos x \neq 0)$

تعريف [4-4-2]

دالة القاطع : sec

$$\sec : \{\theta : \theta \in R , \cos\theta \neq 0\} \to R$$

$$\text{Sec}\ \theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

(3) الدالة cosecant (القاطع تمام) ويرمز لها csc وهي الدالة الناتجة من مقلوب (reciprocal) الدالة (sin) أي ان

$$\csc = \frac{1}{\sin x}$$

وهي تعرف لكل الاعداد الحقيقية x بشرط $(\sin x \neq 0)$

تعريف [4-4-3]

دالة قاطع التمام : csc θ

$$\csc : \{\theta : \theta \in R , \sin\theta \neq 0\} \to R$$

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

[4-5] العلاقات بين الدوال الدائرية

مبرهنة [4-5-1]

المتطابقة الفيثاغورسية

(1) $\sin^2x+\cos^2x=1 \quad \forall x \in R$

(2) $\tan^2x+1=\sec^2x \quad \forall x,\ x \neq (2n+1)\cdot\frac{\pi}{2}$

حيث n أي عدد صحيح

(3) $1+\cot^2x=\csc^2x \quad \forall x,\ x \neq n\pi$

حيث n أي عدد صحيح

(1) لقد سبق برهنتها في البنود السابقة.

(2) اذا كان x أي عدد حقيقي ماعدا المضاعفات الفردية لـ $\frac{\pi}{2}$ (عدد فرد من التسعينات) والتي تجعل $(\cos x = 0)$ لان $\sec x = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف.

فاننا نقسم طرفي المتطابقة (1) على $\cos^2x$ لنحصل على :

$$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{\cos x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$$

$$\tan^2x+1=\sec^2x \quad , \forall x, x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

حيث n عدد صحيح ولان

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \sec=\frac{1}{\cos x}$$

(3) وبالطريقة السابقة نفسها اذا كان $x \neq 2\pi$ حيث n عدد صحيح ، وذلك لان

$\csc x = \frac{1}{\sin\pi} = \frac{1}{\sin 180^\circ} = \frac{1}{0} = \infty$ غير معرف ، فانه يمكن قسمة طرفي

المتطابقة (1) على $\sin^2x$ فنحصل على :

$$\left(\frac{\sin x}{\sin x}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^2$$

$$1 + \cot^2x = \csc^2x \quad , \quad \forall x,\ x \neq n\pi$$

حيث n عدد صحيح ولان

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

مثال 6/ اثبت صحة المتطابقة الاتية :

$\sec^2x + \csc^2x = \sec^2x \csc^2x$, $\forall x , x \neq n\frac{\pi}{2}$ حيث n عدد صحيح

الاثبات / الطرف الايسر

$$\sec^2x + \csc^2x = \frac{1}{\cos^2x} + \frac{1}{\sin^2x}$$
$$= \frac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x \sin^2x} = \frac{1}{\cos^2x \sin^2x}$$
$$= \frac{1}{\cos^2x} \cdot \frac{1}{\sin^2x}$$
$$= \sec^2x \csc^2x$$ = الطرف الايمن

حلول تمارين (3-4)

(1) اذا كان $(3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi)$ واكن $(\cos x = \frac{2}{3})$ فجد قيمة مايلي : $\csc x , \sec x , \cot x$

الحل / كل-جيب ظله جيب تمام x تنتمي للربع الرابع .

Ans $x \in 4^{th}$ qu

$$\sin^2x = 1-\cos^2x$$
$$= 1-\frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\sin x = \boxed{\frac{-\sqrt{5}}{3}} \rightarrow \csc = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{\frac{-\sqrt{5}}{3}} = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

$$\cos x = \boxed{\frac{2}{3}} \rightarrow \sec = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2}{3} \div \frac{-\sqrt{5}}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{-3}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

---

(2) اذا كان $(\pi < x < 3\frac{\pi}{2})$ وكان $(\tan x = \frac{7}{3})$ فجد قيمة مايلي : $\csc x , \sec x , \cot x$

الحل / من اشارة الظل فان x تقع في الربع الثالث $\frac{\text{كل}}{1}$ $\frac{\text{جيب } csc}{2}$ $\frac{\text{+ظله}}{3}$ $\frac{\text{جيب تمام } sec}{4}$

$\tan x = \frac{7}{3} \rightarrow \boxed{\cot = \frac{3}{7}}$ * مقلوب الظل reciprocal tan

$$\csc^2x = 1+\cot^2x$$
$$\csc^2x = 1+\frac{9}{49} = \frac{49+9}{49} = \frac{58}{49}$$

$$\boxed{\therefore \csc x = \frac{-\sqrt{58}}{7}}$$

$$\sec^2 x = 1+\tan^2 x = 1+\frac{49}{9} = \frac{9+49}{9} = \frac{58}{9}$$

$$\boxed{\therefore \sec = \frac{-\sqrt{58}}{3}}$$

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = 1\div\tan x = 1\div\frac{7}{3} = 1\times\frac{3}{7} = \boxed{\frac{3}{7}}\ *$$

وهو محلول ضمن المطلوب الاول

---

(3) اثبت صحة المتطابقات الاتية :

(a) $\tan x = \sin x \sec x$

right side = $\sin x \sec x$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{ lift side}$$

(b) $\sec^2 x = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{1 - \sin^2 x}$

$$\text{right side } = \frac{1}{\cos^2 x} = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2 = \sec^2 x = \text{ lift side}$$

(c) $(1 - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) = 1$

$$\text{right side} = (1 - \sin^2 x)(1 + \tan^2 x) = \cos^2 x \sec^2 x = \cancel{\cos^2 x}\frac{1}{\cancel{\cos^2 x}} = 1 = \text{L.S}$$

(d) $\dfrac{1 - \cos^2 x}{\tan x} = \sin x \cdot \cos x$

$$\text{right side} = \frac{1 - \cos^2 x}{\tan x} = \frac{\sin^2 x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \sin^{\cancel{2}} x \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\sin x}} = \sin x \cos x = \text{L.S}$$

(e) $\dfrac{1 + \sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \cos x + \tan x$

الحل/

$$\text{lift side} = \frac{1 + \sin x - \sin^2 x}{\cos x} = \frac{1 - \sin^2 x + \sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin x}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{\cos x}} + \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x + \tan x = \text{ right side}$$

[7 - 4] الزاوية المنتسبة

تعريف / اذا كان θ قياس لزاوية حادة فأي زاوية قياسها على الصورة $(n \times 90° \pm \theta)$ ، حيث n عدد صحيح (غير سالب) تسمى زاوية منتسبة للزاوية الحادة التى قياسها θ

فمثلاً / الزاوية التي قياسها $(150°)$ منتسبة للزاوية الحادة $(30°)$ لان :

$$(150°) = (2 \times 90° - 30°) = (180° - 30°)$$

والزاوية $(240°)$ منتسبة للزاوية $(60°)$ لان :

$$(240°) = (2 \times 90° + 60°) = (180° + 60°)$$

والزاوية $(300°)$ منتسبة للزاوية $(60°)$ لان :

$$(300°) = (4 \times 90° - 60°) = (360° - 60°)$$

والزاوية $30°$ - هي زاوية منتسبة للزاوية $30°$ لان : $(-30°) = (0 \times 90° - 30°) = (-30°)$

واستنادا الى التعريف السابق فانه اذا كانت θ قياس زاوية حادة فان الزوايا التي قياساتها :

$$(180°-\theta),(180°+\theta),(360°-\theta),(360°+\theta),(90°-\theta),(90°+\theta),(0+\theta),(0-\theta)(270°-\theta),(270°+\theta)$$

هي زوايا منتسبة للزاوية θ

فمثلاً /

$240°=(180°+60°)$ or $240°=(270°-30°)$

$135°=(180°-45°)$ or $135°=(90°+45°)$

$300°=(360°-60°)$ or $300°=(270°+30°)$

$330°=(360°-30°)$ or $330°=(270°+60°)$

ملاحظة / اذا كان قياس الزاوية اكبر من $360°$ (او اكبر من 2π) نبدأ بطرح $360°$ او مضاعفاتها (مضاعفات $360°$ او مضاعفات 2π) لكي يصبح القياس رئيسياً أي يصبح قياس الزاوية ينتمي الى $[0,360]$ او ينتمي الة $[0,2\pi]$.

ايجاد قيم الدوال الدائرية

لايجاد قيم الدوال الدائرية لاية زاوية نتبع الاتي :

(1) نجد القياس الرئيس للزاوية ، اذا كان قياسها اكبر من $360°$ او اكبر من 2π .

(2) اذا تعاملنا مع عدد زوج من التسعينات $180°,360°$ فان اسم النسب المثلثية لايتغير أي يبقى على حاله فمثلاً sin يبقى sin و cos يبقى cos .
اما اذا تعاملنا مع عدد فرد من التسعينات $90°,270°$ فان اسم النسب المثلثية يتغير باضافة CO (كو) اليه او حذف co منه . فمثلاً cosin تصبح sin و tan تصبح cotan وهكذا ....
انظر الى (الشكل المجاور) حيث تلاحظ انه من الافضل اسقاط ضلع الزاوية الدائر الذي هو الوتر (دائما اشارته موجبة) على المحور السيني وبذلك نكون قد تعاملنا مع عدد زوج من التسعينات .
اما اذا اسقطناه على المحور الصادي فنكون قد تعاملنا مع عدد فرد من التسعينات وستلاحظ ان النسب المثلثية بتغير اسمها باضافة او حذف co لان زاويتا المثلث القائم هما متتامتان مثلا $(\cos 30 = \sin 60)$.

(3) يجب مراعاة اشارة الدالة في الربع الذي تعق فيه الزاوية اما بواسطة (كل ..جيب..ظله..جيب تمام) او من اشارة محاور الربع الذي ينتهي فيه ضلع الزاوية الدائرية (الوتر) .

الدوال الدائرية

الدوال الدائرية لأية زاوية حادة وعلاقتها بالزاوية الربعية

الدوال الدائرية $(90° - \theta)$ تقع في الربع الاول

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$	$\cot(90° - \theta) = \tan\theta$
$\cos(90° - \theta) = \sin\theta$	$\sec(90° - \theta) = \csc\theta$
$\tan(90° - \theta) = \cot\theta$	$\csc(90° - \theta) = \sec\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(90° + \theta)$ تقع في الربع الثاني

$\sin(90° + \theta) = \cos\theta$	$\cot(90° + \theta) = -\tan\theta$
$\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$	$\sec(90° + \theta) = -\csc\theta$
$\tan(90° + \theta) = -\cot\theta$	$\csc(90° + \theta) = \sec\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(180° - \theta)$ تقع في الربع الثاني -

$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\cot(180° - \theta) = -\cot\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180° - \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\csc(180° - \theta) = \csc\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(180° + \theta)$ تقع في الربع الثالث

$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\cot(180° + \theta) = \cot\theta$
$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\sec(180° + \theta) = -\sec\theta$
$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$	$\csc(180° + \theta) = -\csc\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(270° - \theta)$ تقع في الربع الثالث

$\sin(270° - \theta) = -\cos\theta$	$\cot(270° - \theta) = \tan\theta$
$\cos(270° - \theta) = -\sin\theta$	$\sec(270° - \theta) = -\csc\theta$
$\tan(270° - \theta) = \cot\theta$	$\csc(270° - \theta) = -\sec\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(270° + \theta)$ تقع في الربع الرابع

$\sin(270° + \theta) = -\cos\theta$	$\cot(270° + \theta) = -\tan\theta$
$\cos(270° + \theta) = \sin\theta$	$\sec(270° + \theta) = \csc\theta$
$\tan(270° + \theta) = -\cot\theta$	$\csc(270° + \theta) = -\csc$

الدوال الدائرية للزاوية $(360° - \theta)$ تقع في الربع الرابع

$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\cot(360° - \theta) = -\cot\theta$
$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$	$\sec(360° - \theta) = \sec\theta$
$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$	$\csc(360° - \theta) = -\csc\theta$

الدوال الدائرية للزاوية $(360° + \theta)$ تقع في الربع الاول

$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$	$\cot(360° + \theta) = \cot\theta$
$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$	$\sec(360° + \theta) = \sec\theta$
$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$	$\csc(360° + \theta) = \csc\theta$

مثال 11/ جد قيم الدوال الدائرية للزوايا التي قياساتها : $30°$, $150°$, $210°$, $330°$, $420°$

الحل / أ) الزاوية التي قياسها $30°$ تقع في الربع الاول

$\therefore \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\csc 30° = 2$, $\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cot 30° = \sqrt{3}$

ب) الزاوية التي قياسها $150°$ تقع في الربع الثاني

$\therefore \sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$ OR $\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ OR $\cos 150° = \cos(90° + 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ OR $\tan 150^\circ = \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 150^\circ = \cot(180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ = -\sqrt{3}$ OR $\cot 150^\circ = \cot(90^\circ + 60^\circ) = -\tan 60^\circ = -\sqrt{3}$

$\sec 150^\circ = \sec(180^\circ - 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ OR $\sec 150^\circ = \sec(90^\circ + 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc 150^\circ = \csc(180^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = 2$ OR $\csc 150^\circ = \csc(90^\circ + 60^\circ) = \sec 60^\circ = 2$

(ج) الزاوية التي قياسها 210° تقع في الربع الثالث

$\therefore \sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$ OR $\sin 210^\circ = \sin(270^\circ - 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{1}{2}$

$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ + 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ OR $\cos 210^\circ = \cos(270^\circ - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 210^\circ = \tan(180^\circ + 30^\circ) = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ OR $\tan 210^\circ = \tan(270^\circ - 60^\circ) = \cot 60^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot 210^\circ = \cot(180^\circ + 30^\circ) = \cot 30^\circ = \sqrt{3}$ OR $\cot 210^\circ = \cot(270^\circ - 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$

$\sec 210^\circ = \sec(180^\circ + 30^\circ) = -\sec 30^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ OR $\sec 210^\circ = \sec(270^\circ - 60^\circ) = -\csc 60^\circ = -\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\csc 210^\circ = \csc(180^\circ + 30^\circ) = -\csc 30^\circ = -2$ OR $\csc 210^\circ = \csc(270^\circ - 60^\circ) = -\sec 60^\circ = -2$

(د) الزاوية التي قياسها °330 تقع في الربع الرابع

$\sin 330° = \sin(360° - 30°)$ $= -\sin 30° = -\frac{1}{2}$	OR	$\sin 330° = \sin(270° + 60°)$ $= -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

نشاط / اكمل قيم الدوال المثلثية الباقية للزاوية التي قياسها °330

ملاحظة / الزاوية التي قياسها $420° = 60° + 360°$
ان قيم الدالة المثلثية للزاوية $(60° + 360°)$ هي نفس قيمة الزاوية المثلثية $(60°)$ لماذا ؟
لقد سبق ان ذكرنا بأنه اذا كان قياس الزاوية اكبر من °360 نطرح °360 او مضاعفاتها من هذا القياس الى يصبح القياس °60 هو القياس الرئيسي للزاوية ، وعليه فإن $420° - 360° = 60°$

$$\therefore \sin 420° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 420° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$

[4-8] قيم الدوال الدائرية للزاوية التي قياسها $(-\theta)$
الزاوية التي قياسها θ تقع في الربع الاول والزاوية التي قياسها θ- تقع في الربع الرابع تحت تأثير انعكاس حول المحور السيني x .

$$\cos(-\theta) = \frac{+}{+} = +\cos\theta, \quad \sin(-\theta) = \frac{-}{+} = -\sin\theta, \quad \tan(-\theta) = \frac{-}{+} = -\tan\theta$$

$$\text{or} = \frac{\sin(-\theta)}{\cos(-\theta)} = \frac{-\sin\theta}{+\cos\theta} = -\tan\theta$$

ملاحظة / ولتقليل تراكم حفظ القوانين وخاصة منها التي تحتوي على اشارات ± فانه يمكنك حل التمارين فهماً وفق مايلي :

س/ جد sin(-30) , cos(-30) , tan(-30)

الحل / الزاوية °30- تقع في الربع الرابع

4	3	2	1
cos جيب تمام sec +	tan ظله cotan +	sin جيب csc +	all كل +

عرفنا الاشارة من الارباع .

sin(-30) = sin(360-30) = - sin30
cos(-30) = cos(360-30) = cos30
tan(-30) = tan(360-30) = - tan30

ملاحظة / يمكن اثبات النتيجة السابقة نفسها في حالة وقوع الزاوية التي قياسها $(-\theta)$ في الارباع الثاني او الثالث او الرابع وبالطريقة السابقة نفسها .

مثال12/ جد $\sin(-240°)$, $\cos(-240°)$, $\tan(-150°)$

الحل / بدون حفظ للقوانين (الطريقة الاولى)

الزاوية تقع في الربع الثاني

$$\sin(-240°) = \sin(360°-240°) = \sin(120°)$$

$$= \sin(180°- 60°) = +\sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-240°) = \cos(360°- 240°) = \cos120°$$

$$= \cos(180 - 60) = - \cos60 = - \frac{1}{2}$$

الزاوية تقع في الربع الثالث

$$\tan(-150°) = \tan(360° - 150°) = \tan(210)$$

$$= \tan(180 + 30°) = + \tan30 = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

الحل / بطريقة حفظ القوانين (الطريقة الثانية)

$$\sin(-240) = -\sin240 = -\sin(180 + 60) = -(-\sin60) = \sin60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-240°) = \cos240° = \cos(180+60) = -\cos60 = \frac{-1}{2}$$

$$\tan(-150°) = -\tan150 = -\tan(180°-30°)$$

$$= -(-\tan30) = +\tan30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

مثال 13/ جد $\tan(-300°)$, $\cos780°$, $\sin(\frac{19\pi}{2})$

الحل /

$$\sin(\frac{19\pi}{2}) = \sin(\frac{19\pi}{2} - \frac{16\pi}{2}) = \sin\frac{3\pi^*}{2} = \sin270° = -1^*$$

$$\cos780 = \cos(780° - 720°) = \cos60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan(-300°) = -\tan 300° = -\left[\tan(360°- 60°\right]$$

$$= -\left[-\tan60°\right] = \tan60° = \sqrt{3}$$

حلول تمارين (4-4)

(1) اذا كان $\sin\theta = \frac{-8}{17}$ ، فجد : $\cos\theta\ ,\ \cos(\frac{3\pi}{2}-\theta)\ ,\ \sin(\frac{\pi}{2}+\theta)$

الحل /

$$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = 1-(\frac{-8}{17})^2 = 1-\frac{64}{289}$$

$$= \frac{289-64}{289} = \frac{225}{289} \rightarrow \cos\theta = \frac{15}{17}$$

∴ الزاوية تقع في الربع الثالث او في الربع الرابع من اشارة الـsin المعطاة

$\cos\theta = \frac{15}{17}$ في الربع الرابع

$\cos\theta = \frac{-15}{17}$ في الربع الثالث

$$\cos(\frac{3\pi}{2}-\theta) = \cos(270-\theta) = -\sin\theta = -(\frac{-8}{17}) = \frac{8}{17}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\theta) = \sin(90+\theta) = \cos\theta = \frac{15}{17}$ في الربع الرابع

$= \frac{-15}{17}$ في الربع الثالث

---

(2) اذا كان $\cos B = 0.8$, $270° < B < 360°$ فجد :

$\sin B\ ,\ \cos(270°+B)\ ,\ \cos(270°-B)$

الحل/ الزاوية تقع في الربع الرابع من تحديد المسألة

$270° < B < 360°$

$\boxed{\cos = +}$ $\boxed{\sin = -}$

$\cos B = \frac{8}{10}$ $\sin^2 B = 1-\cos B^2 = 1-(\frac{8}{10})^2 = 1-\frac{64}{100} = \frac{100-64}{100} = \frac{36}{100}$

$\sin B = \pm\frac{6}{10}$ ∴ الزاوية في الربع الرابع

$\therefore \sin B = \frac{-6}{10}$

$$\cos(270+B) = \sin B = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5}$$

$$\cos(270-B) = -\sin B = -\left(\frac{-6}{10}\right) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

(3) اذا كان $\sin\alpha = \frac{24}{25}$ ، $90° < \alpha < 180°$ فأحسب قيمة :

$\sin(90-\alpha) - \cos(180-\alpha) + \cos 120° = x$

$x = \cos\alpha - (-\cos\alpha) + \cos(180-60)$

$x = \cos\alpha + \cos\alpha - \cos 60$

$x = 2\cos\alpha - \frac{1}{2}$

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - (\frac{24}{25})^2 = 1 - \frac{576}{625} = \frac{625-576}{625}$

$= \frac{49}{625} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{-7}{25}$ للربع الثاني $\alpha \in$

$\therefore x = 2(\frac{-7}{25}) - \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{14}{25} - \frac{1}{2} = \frac{-28-25}{50} = \frac{-53}{50}$

---

(4) اثبت ان :

$\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) - \sin(\pi+\theta)\sin(\pi-\theta) = 0$

الطرف الايسر

$-\sin\theta\sin\theta - (-\sin\theta\sin\theta) = -\sin^2\theta + \sin^2\theta = 0$

∴ الطرف الايسر = الطرف الايمن

(و.هـ.م)

---

(5) حدد الربع الذي تقع فيه الزاوية α اذا كان :

(a) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha > 0$ في الربع الاول
$+$ $+$

(b) $\sin\alpha > 0$ $\cos\alpha < 0$ في الربع الثاني
$+$ $-$

كل جيب ظله جيب تمام

(c) $\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha < 0$ في الربع الثالث
$-$ $-$

cos tan sin all

(d) $\sin\alpha < 0$ $\cos\alpha > 0$ في الربع الرابع
$-$ $-$

---

(6) أي من العبارات الاتية صحيحة وايها خاطئة ؟

(a) $\sin 270° = 2\sin 30° \rightarrow -1 = 2\times\frac{1}{2} \rightarrow -1 = 1$ خاطئة

الصحيح $(1 \neq -1)$

(b) $\sin 90° = 2\cos 60° \rightarrow 1=2\times\frac{1}{2} \rightarrow 1 = 1$ صحيحة

(c) $\cos 150° = \frac{1}{2}\tan 120° \rightarrow \cos(180°-30°) = \frac{1}{2}\tan(180°-60°)$

$\rightarrow -\cos 30° = -\frac{1}{2}\tan 60° \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}\times\sqrt{3} \rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ صحيحة

(d) $\cos(30°+60°) = \cos 30°+\cos 60° \rightarrow \cos 90°=\cos 30°+\cos 60°$

$\rightarrow 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2} \rightarrow 0 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ خاطئة

---

(7) اثبت ان : (a) $\sin(90°+\propto) + \cot(270°-\propto) + \cos(180°+\propto) = \tan\propto$

الحل /

$\cos\propto + \tan\propto - \cos\propto = \tan\propto$

$\cancel{\cos\propto} - \cancel{\cos\propto} + \tan\propto = \tan\propto$

$0 + \tan\propto = \tan\propto$

$\tan\propto = \tan\propto$

(و.هـ.م)

(b) $\sin^2 135° = \frac{1}{2}(1 - \cos 270°)$

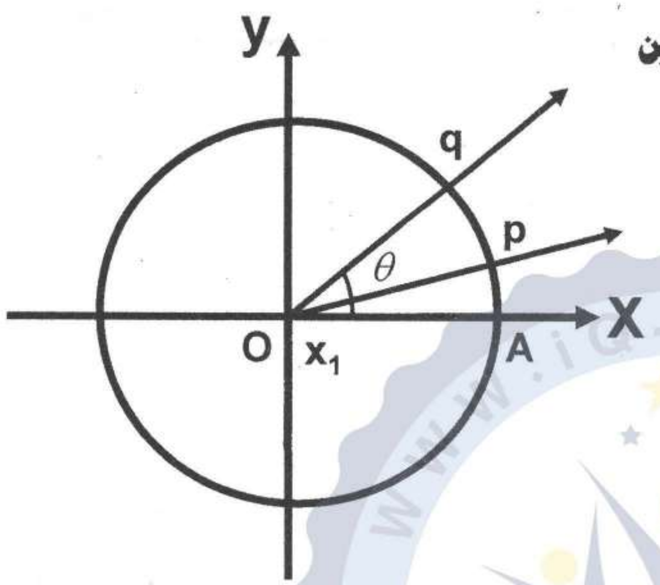
الحل /

$\sin^2(180-45) = \frac{1}{2}(1 - 0)$

$\sin^2 45° = \frac{1}{2}$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



[4-9] الدوال الدائرية لمجموع او فرق قياسي زاويتين

سوف نبحث في هذا البند دوال مثل $\cos(x_1 - x_2)$ ، $\cos(x_2 + x_1)$ وعلاقة ذلك بالدوال $\cos x_1$, $\sin x_1$, $\cos x_2$, $\sin x_2$.

اولا / مفكوك $\cos(x_2 - x_1)$, $\cos(x_2 + x_1)$

ولايجاد هذه العلاقة سنستخدم الصلة بين الدوال الدائرية وحاصل الضرب الداخلي للمتجهات (inner product)

وكما تعلم انه اذا كانت θ هي الزاوية بين المتجهين $\vec{oq}, \vec{op}$ الموضحين في الشكل المجاور حيث ان : ($\theta = x_2 - x_1$ and that $0 \le \theta \le \pi$) فان

$$\vec{op} \cdot \vec{oq} = \|\vec{op}\| \cdot \|\vec{oq}\| \cdot \cos\theta$$

$$\vec{op} \cdot \vec{oq} = \|\vec{op}\| \cdot \|\vec{oq}\| \cdot \cos(x_2 - x_1)$$

فاذا اخذنا الحالة الخاصة

$$\|\vec{op}\| = \|\vec{oq}\| = 1$$

وجدنا ان :

$$\vec{op} \cdot \vec{oq} = \cos(x_2 - x_1)$$

$$\therefore (\cos x_1 , \sin x_1) \cdot (\cos x_2 , \sin x_2) = \cos(x_2 - x_1)$$

ومنه نجد :

$$\boxed{\cos(x_2 - x_1) = \cos x_1 \cos x_2 + \sin x_1 \sin x_2} \quad \text{.......................}(1)$$

واذا عوضنا بـ$(-x_1)$ بدلاً من x_1 تصبح المتطابقة (1) :

$$\cos(-x_1)\cos x_2 + \sin(-x_1)\sin x_2 = \cos(x_2 - (-x_1))$$

$$\boxed{\cos(x_2 + x_1) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2} \quad \text{.......................}(2)$$

ثانياً / مفكوك $\sin(x_2 + x_1)$, $\sin(x_2 - x_1)$

$$\because \sin(x_2 + x_1) = \cos\left[90^\circ - (x_2 + x_1)\right]$$

$$= \cos\left[(90^\circ - x_2) - x_1\right]$$

$$= \cos(90^\circ - x_2)\cos x_1 + \sin(90^\circ - x_2)\sin x_1$$

$$= \sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \sin x_1$$

$$\boxed{\sin(x_2 + x_1) = \sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \sin x_1} \quad \text{.........................(3)}$$

وبالتعويض عن x_1 بـ$(-x_1)$ تصبح المتطابقة (٣) كما يلي :

$$\boxed{\sin(x_2 - x_1) = \sin x_2 \cos x_1 - \cos x_2 \sin x_1} \quad \text{.........................(4)}$$

ثالثا / مفكوك $\tan(x_2 + x_1)$, $\tan(x_2 - x_1)$

اذا كان x_1 , x_2 أي عددين حقيقية في مجال الدالة tan وان $x_1 + x_2$ مجال الدالة tan فأن :

$$\tan(x_2 + x_1) = \frac{\sin(x_2 + x_1)}{\cos(x_2 + x_1)}$$

$$= \frac{\sin x_2 \cos x_1 + \cos x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1 - \sin x_2 \sin x_1}$$

وبقسمة البسط على والمقام على $\cos x_2 \cos x_1$ نحصل على :

$$= \frac{\dfrac{\sin x_2 \cancel{\cos x_1}}{\cos x_2 \cancel{\cos x_1}} + \dfrac{\cancel{\cos x_2} \sin x_1}{\cancel{\cos x_2} \cos x_1}}{\dfrac{\cancel{\cos x_2}\,\cancel{\cos x_1}}{\cancel{\cos x_2}\,\cancel{\cos x_1}} - \dfrac{\sin x_2 \sin x_1}{\cos x_2 \cos x_1}}$$

$$= \frac{\tan x_2 + \tan x_1}{1 - \tan x_2 \tan x_1}$$

$$\boxed{\therefore \tan(x_2 + x_1) = \frac{\tan x_2 + \tan x_1}{1 - \tan x_2 \tan x_1}} \quad \text{.................................(5)}$$

ولو عوضنا بـ$(-x_1)$ بدلاً من x_1 في المتطابقة (٥) لحصلنا على :

$$\boxed{\tan(x_2 - x_1) = \frac{\tan x_2 - \tan x_1}{1 + \tan x_2 \tan x_1}} \quad \text{.................................(6)}$$

مثال / احسب $\sin 15° \ , \ \cos 75°$

الحل /

$$\cos 75° = \cos(45° + 30°)$$

$$= \cos 45° \cos 30° - \sin 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°)$$

$$= \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

مثال16/ احسب $\tan 15°$

الحل /

$$\tan 15° = \tan(45° - 30°)$$

$$= \frac{\tan 45° - \tan 30°}{1 + \tan 45° \tan 30°} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \div \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}+1} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

(و.هـ.م)

مثال17/ اذا كان $\sin \alpha < \frac{4}{5}$ ، $0 < \alpha 90^\circ$ فأحسب : $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\tan 2\alpha$

الحل /

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \frac{16}{25} + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\therefore \cos^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

$$\therefore \cos \alpha = \pm \frac{3}{5} \Rightarrow \because 0 < \alpha < 90^\circ$$

$$\therefore \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

$$\boxed{\therefore \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha}$$

$$\therefore \sin 2\alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$$

$$\boxed{\because \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{9}{25} - \frac{16}{25} = \frac{-7}{25}$$

$$\boxed{\because \tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}$$

$$\therefore \tan 2\alpha = \frac{(\frac{24}{25})}{(\frac{-7}{25})} = \frac{-24}{7}$$

نتيجة (1) لكل عدد حقيقي x فأن :

(a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\boxed{(b) \ \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x}$ الرئيسية

(c) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ *

(d) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ *

(e) $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan x}$ بشرط المقام $\neq$ صفر

نتيجة (2) لكل x عدد حقيقي فأن :

(a) $\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 - \cos x}{2}$

(b) $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1 + \cos x}{2}$ (c) $\tan^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x}$

مثال18/ احسب $\sin\frac{\pi}{8}$

$$\sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

تذكر دائماً ان تتخلص من العدد الغير نسبي من المقام

$$= \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\therefore \sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

(و.هـ.م)

مثال19/ بدون استخدام الحاسبات احسب : $\sin 105°$, $\cos 105°$

الحل /

$$\sin^2 105° = \frac{1-\cos 210}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\cos 210°}{2}} = \sqrt{\frac{1-(-\cos 30°)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

$$\cos^2 105° = \frac{1+\cos 210}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 210°}{2}} = \sqrt{\frac{1+(-\cos 30°)}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

مثال20/ بين ان : $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \cos x , \forall x \in R$

الحل / $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = (\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2})(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2})$

$$= \cos(2(\frac{x}{2}))(1) \quad = \cos x$$

حلول تمارين (5-4)

(1) اذا كان $\tan x = \frac{3}{4}$ وكانت $0° < x < 90°$ فأحسب : $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\tan 2x$

الحل / من معطيات المسألة ان الزاوية تقع في الربع الاول وعليه فكل النسب المثلثية موجبة .

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2\times\frac{3}{4}}{1-\frac{9}{16}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{2}\times\frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

$$1+\tan^2 x = \sec^2 x \Rightarrow 1+\frac{9}{16} = \sec^2 x$$

$$\sec^2 x = \frac{25}{16} \Rightarrow \sec x = \pm\frac{5}{4}$$

$\therefore \sec x = \frac{5}{4}$ xتقع في الربع الاول $\cos x = \frac{4}{5}$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos 2x = 2\times\frac{16}{25} - 1$$

$$= \frac{32}{25} - 1 = \frac{7}{25}$$

$$\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$\frac{24}{7} = \frac{\sin 2x}{\frac{7}{25}} \Rightarrow \sin 2x = \frac{24}{25}$$

---

(2) اذا كان $\sec \overset{26.5°}{\alpha} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ فأحسب : $\csc 2\alpha$, $\cot 2\alpha$

الحل / الزاوية تقع في الربع الاول فكل النسب المثلثية موجبة .

$$\tan^2\alpha = \sec^2\alpha - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 1 = \frac{5-4}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\times\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = \frac{3}{4} \qquad \boxed{2\alpha = 53°}$$

$$\csc^2 2\alpha = 1+\cot^2 2\alpha = 1+\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1+\frac{9}{16} = \frac{16+9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\therefore \csc 2\alpha = \frac{5}{4}$$

(3) اذا كان $\tan^2 \propto = \frac{4}{9}$, $90° < \propto < 180°$ فأحسب: $\sin(2\propto - 90°)$, $\cos(180° - 2\propto)$

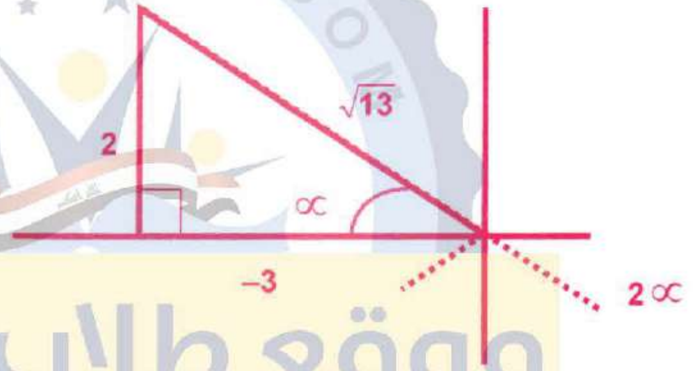
الحل / طريقة اولى

$$\sin(2\propto - 90°) = \sin -(-2\propto + 90°) = -\sin(90° - 2\propto)$$
$$= -\cos 2\propto$$

طريقة ثانية /

$$\sin(2\propto - 90°) = \sin 2\propto \cos 90° - \cos 2\propto \sin 90°$$
$$= \sin 2\propto \times 0 - \cos 2\propto \times 1$$
$$= 0 - \cos 2\propto$$
$$= -\cos 2\propto$$

$$\cos(180° - 2\propto) = -\cos 2\propto$$



$\propto \in$ 2nd quater للربع الثاني

$\tan\propto = \mp\frac{2}{3} \rightarrow \tan\propto = \frac{2}{-3}$

$\cos\propto = \frac{-3}{\sqrt{13}}$ من الرسم

الان نستخرج قيمة $\cos 2\propto$ من الرسم نستخرج النسب المثلثية للزاوية ($\propto$) من منطوق المسالة

$$\cos 2\propto = 2\cos^2\propto - 1$$

$$= 2\left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right)^2 - 1 = 2 \times \frac{9}{13} - 1 = \frac{18}{13} - 1 = \frac{18}{13} - \frac{13}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\because \sin(2\propto - 90°) = -\cos 2\propto = -\frac{5}{13}$$

$$\cos(180° - 2\propto) = -\cos 2\propto = -\frac{5}{13}$$

ويمكنك حل المسألة باستخراج قيمة $\sec\propto$

$$\sec^2\propto = 1 + \tan^2\propto$$

$\sec\propto = \frac{-\sqrt{13}}{3} \rightarrow \cos\propto = \frac{-3}{\sqrt{13}}$ وتكمل المسألة

طريقة اخرى للحل /

$\cos(180° - 2\propto) = -\cos2\propto$

$\tan^2\propto + 1 = \sec^2\propto$

$\frac{4}{9} + 1 = \sec^2\propto \Rightarrow \sec^2\propto = \frac{13}{9}$

$\therefore \sec\propto = \mp\frac{\sqrt{13}}{9}$

بما ان $\propto$ في الربع الثاني

$\therefore \sec\propto = \frac{-\sqrt{13}}{9}$

$\therefore \cos\propto = \frac{-3}{\sqrt{13}}$ ($\sec\propto$ مقلوب $\cos\propto$)

$\sin^2\propto + \cos^2\propto = 1$

$\sin^2\propto = 1 - \cos^2\propto$

$= 1 - (\frac{-3}{\sqrt{13}})^2$

$= 1 - \frac{9}{13} = \frac{4}{13}$

$\sin\propto = \mp\frac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin\propto = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos(180° - 2\propto) = -\cos2\propto$

$= -(\cos^2\propto - \sin^2\propto)$

$= -(\frac{9}{13} - \frac{4}{13}) = \frac{-5}{13}$

$\sin(2\propto - 90°) = \sin[-(90° - 2\propto)]$

$= -\sin(90° - 2\propto)$

$= -\cos2\propto$

$= \frac{-5}{13}$

(4) اذا كان كل من $\propto$ ، β زاوية حادة موجبة بحيث $\beta + \propto = 45°$ وكان $\dfrac{\tan\propto}{\tan\beta} = \dfrac{2}{3}$

فأحسب $\tan 2\beta$, $\tan 2\propto$

الحل /

$$\propto + \beta = 45°$$

$$\beta = 45° - \propto$$

$$\frac{\tan\propto}{\tan\beta} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\tan\propto}{\tan(45° - \propto)} = \frac{2}{3} \rightarrow 3\tan\propto = 2\tan(45° - \propto)$$

$$3\tan\propto = \frac{2(\tan45° - \tan\propto)}{1 + \tan45°\tan\propto}$$

$$3\tan\propto = \frac{2(1 - \tan\propto)}{(1 + \tan\propto)} \rightarrow 3\tan\propto = \frac{(2 - 2\tan\propto)}{(1 + \tan\propto)}$$

$$3\tan\propto(1 + \tan\propto) = 2 - 2\tan\propto$$

$$3\tan\propto + 3\tan^2\propto = 2 - 2\tan\propto$$

$$3\tan^2\propto + 3\tan\propto + 2\tan\propto - 2 = 0$$

$$3\tan^2\propto + 5\tan\propto - 2 = 0 \rightarrow (3\tan\propto - 1)(\tan\propto + 2) = 0$$

Either $3\tan\propto - 1 = 0$ or $\tan\propto + 2 = 0$

$3\tan\propto = 1$ $\tan\propto = -2$ يهمل لان $\propto$ زاوية حادة موجبة

$$\boxed{\tan\propto = \frac{1}{3}}$$

$$\because \frac{\tan\propto}{\tan\beta} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{\tan\beta} = \frac{2}{3}$$

$$2\tan\beta = 3 \times \frac{1}{3} \rightarrow 2\tan\beta = 1 \rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

الان نستخرج قيمة $\tan 2\propto$, $\tan 2\beta$

$$\tan2\propto = \frac{2\tan\propto}{1 - \tan^2\propto}$$

$$\tan2\propto = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\cancel{2}^{1}}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{8}_{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan 2\beta = \frac{2 \times \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

(5) اثبت ان $\cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$ ثم احسب $\cot 15°$

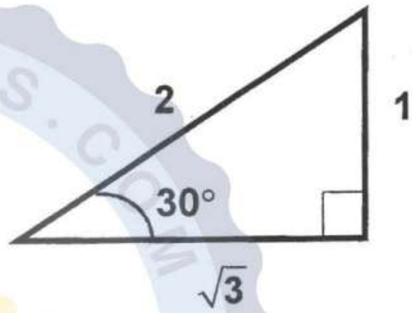
الحل / الاثبات

$$\cot^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{\frac{1+\cos\alpha}{2}}{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1+\cos\alpha}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{1-\cos\alpha}$$

$$= \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

$$\therefore \cot\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$



$$\cot 15° = \sqrt{\frac{1+\cos 30°}{1-\cos 30°}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}}$$

$$= 3.7316$$

(6) اثبت صحة المتطابقات الاتية

(a) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

$L.S\ (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$L.S = \sin^2\theta + \sin 2\theta + \cos^2\theta \qquad (\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta)$

$$L.S = \frac{1-\cos 2\theta}{2} + \sin 2\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$L.S = \frac{1 - \cancel{\cos 2\theta} + 2\sin 2\theta + 1 + \cancel{\cos 2\theta}}{2}$$

$$L.S = \frac{2 + 2\sin 2\theta}{2} = \frac{2(1+\sin 2\theta)}{2} = 1 + \sin 2\theta$$

$$= R.S$$

حل ثاني / $(\sin\theta + \cos\theta)^2$ الطرف الايسر

$= \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta$

$= \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$= 1 + \sin 2\theta =$ الطرف الايمن

التوضيح

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$
$\cos 2\theta + 1 = 2\cos^2\theta$	$2\sin^2\theta = 1 - \cos 2\theta$
$2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$	$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$
$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$	

(b) $\sec(x-y) = \frac{\sec x \ \sec y}{1 + \tan x \ \tan y}$

$$L.S = \sec(x-y) = \frac{1}{\cos(x-y)} = \frac{1}{\cos x \ \cos y + \sin x \ \sin y}$$

وبقسمة البسط والمقام على $\cos x \ \cos y$

$$= \frac{\frac{1}{\cos x \ \cos y}}{\frac{\cos x \ \cos y + \sin x \ \sin y}{\cos x \ \cos y}}$$

$$L.S = \frac{\frac{1}{\cos x \ \cos y}}{\frac{\cos x \ \cos y}{\cos x \ \cos y} + \frac{\sin x \ \sin y}{\cos x \ \cos y}} = \frac{\sec x \ \sec y}{1 + \tan x \ \tan y} = R.S$$

(C) $\frac{\sin(-\alpha) - \sin(\beta - 90^\circ)}{-\cos(270^\circ + \alpha) - \cos\beta} + \frac{\sin(\alpha - 180^\circ) + \cos\beta}{\sin(180^\circ + \alpha) + \sin(90^\circ + \beta)} = 2$

الحل / الطرف الايسر $= \frac{-\sin\alpha - \sin[-(90^\circ - \beta)]}{-\sin\alpha + \cos\beta} + \frac{\sin[-(180^\circ - \alpha)] + \cos\beta}{-\sin\alpha + \cos\beta}$

$$= \frac{-\sin\alpha - [-\sin(90^\circ - \beta)]}{-\sin\alpha + \cos\beta} + \frac{-\sin(180^\circ - \alpha) + \cos\beta}{-\sin\alpha + \cos\beta}$$

$$= \frac{\cancel{-\sin\alpha + \cos\beta}}{\cancel{-\sin\alpha + \cos\beta}} + \frac{\cancel{-\sin\alpha + \cos\beta}}{\cancel{-\sin\alpha + \cos\beta}}$$

$= 1 + 1 = 2 =$ الطرف الايمن

(d) $\tan(270°-\propto)+\dfrac{\sin(180°-\propto)+\cos\beta}{1-\cos(180°-\propto)}=\csc\propto$

الحل / $\text{الطرف الايسر} = \cot\propto + \dfrac{\sin\propto}{1-(-\cos\propto)}$

$$=\frac{\cos\propto}{\sin\propto}+\frac{\sin\propto}{1+\cos\propto}$$

$$=\frac{\cos\propto(1+\cos\propto)+\sin^2\propto}{\sin\propto(1+\cos\propto)}$$

$$=\frac{\cos\propto+\cos^2\propto+\sin^2\propto}{\sin\propto(1+\cos\propto)}$$

$$=\frac{\cancel{(\cos\propto+1)}}{\sin\propto\cancel{(1+\cos\propto)}}$$

$$=\frac{1}{\sin\propto}=\csc\propto=\text{الطرف الايمن}$$

(e) $\sin20°\cos10°+\cos20°\sin10°=\dfrac{1}{2}$

$L.S=\sin(20+10)=\sin30=\dfrac{1}{2}=R.S$

(F) $\cos35°\cos25°-\cos55°\cos65°=\dfrac{1}{2}$

$L.S=\cos35°\cos25°-\cos55°\cos65°$ L.S

$=\cos35°\cos25°-\cos(90°-35°)\cos(90°-25°)$

$=\cos35°\cos25°-\sin35°\sin25°=\cos(35°+25°)$

$=\cos60°=\dfrac{1}{2}=R.S$

(g) $\sin^2x \cos^2x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$

$$L.S = \sin^2x \cos^2x = \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 2x}{4}$$

$$= \frac{1 - \frac{1 + \cos 4x}{2}}{4} \qquad \left\{\cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2}\right\}$$

$$= \frac{\frac{2 - (1 + \cos 4x)}{2}}{4}$$

$$= \frac{2 - 1 - \cos 4x}{2 \times 4} = \frac{1 - \cos 4x}{8} = R.S$$

حل ثاني / $\sin^2x \cos^2x = \frac{1 - \cos 4x}{8}$

الحل / الطرف الايسر $= \sin^2x \cos^2x = (\sin x\cos x)^2$

$$= \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 = \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

الطرف الايمن $= \frac{1 - \cos 4x}{8} = \frac{1 - (1 - 2\sin^2 2x)}{8}$

$$= \frac{1 - 1 + 2\sin^2 2x}{8} = \frac{\cancel{2}^{1}\sin^2 2x}{\cancel{8}_{4}}$$

$$= \frac{1}{4}\sin^2 2x$$

اذن الطرف الايسر = الطرف الايمن

(h) $\sin 4x = 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x$

طريقة اولى $R.S = 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x$

$= 8\cos^2 x \cos x \sin x - 4\cos x \sin x$

$= \overset{4}{\cancel{8}} \times \frac{1+\cos 2x}{\cancel{2}} \cos x \sin x - 4\cos x \sin x$

$= (1+\cos 2x)\, 4\cos x \sin x - 4\cos x \sin x$

$= (1+\cos 2x)\, 2 \times 2\cos x \sin x - 2 \times 2\cos x \sin x$

$= (1+\cos 2x)\, 2\sin 2x - 2\sin 2x$

$= \cancel{2\sin 2x} + 2\sin 2x \cos 2x - \cancel{2\sin 2x}$

$= \sin 4x = L.S$

الطرقة الثانيه الطرف الايمن $R.S = 8\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin x$

$= 4\cos^2 x \sin x\,(2\cos^2 x - 1)$

$= 4\cos x \sin x \times \cos 2x$

$= 2 \times 2\sin x \cos x \times \cos 2x$

$= 2\sin 2x \times \cos x$

$= \sin 4x = L.S$ الطرف الايسر

---

(7) احسب $\sin 3x$ و $\cos 3x$ بدلالة $\sin x$ و $\cos x$

الحل /

$\sin 3x = \sin(2x + x) = \underline{\sin 2x}\cos x + \underline{\cos 2x}\sin x$

$= \underline{2\sin x \cos x}\cos x + (\cos^2 x - \sin^2 x)\sin x$

$= 2\underline{\underline{\sin x \cos^2 x}} + \underline{\underline{\cos^2 x \sin x}} - \sin^3 x$

$= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$

$\cos 3x = \cos(2x + x) = \underline{\cos 2x}\cos x - \underline{\sin 2x}\sin x$

$= (\cos^2 x - \sin^2 x)\cos x - (2\sin x \cos x)\sin x$

$= \cos^3 x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^2 x \cos x$

$= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cos x$

[4-10] المعادلات المثلثية Trigonometric equations

تعريف

المعادلة المثلثية هي جملة مفتوحة تحوي دالة مثلثية او اكثر لزاوية معينة او عدة زوايا وابسط صورها هي $\cos x=k$, $\sin x= B$ حيث $B , K \in R$

اولا / المعادلات المثلثية البسيطة :

ليكن X قياس زاوية مجهولة ، B قياس زاوية معلومة بحيث ، $0 \leq B \leq 2\pi$

ولندرس الحالات الثلاث الاتية : (a) $\sin x = \sin B \Leftrightarrow x = B$ or $x = \pi - B$

وبالمقياس الستيني $x = 180° - B$

مثال 21/ اذا كان $\sin x = \sin 45°$ فما هي قيم x ؟

الحل / $\sin x = \sin 45° \Leftrightarrow x = 45°$ or $x = 180° - 45° = 135°$

$\therefore x = 45°$ or $x = 135°$

مثال 22/ حل المعادلة التالية $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل / نعلم ان $\sin 30 = \frac{1}{2}$

$\therefore \sin x = \sin 30° \Leftrightarrow x = 30°$ or $x = 180 - 30 = 150°$

(b) $\cos x = \cos B \Leftrightarrow x = B$ or $x = 2\pi - B$

وبالقياس الستيني يعني ان either $x = B$ or $x = 360° - B$

مثال 23/ حل المعادلة $\cos x = \cos 75°$

$\cos x = \cos 75° \Leftrightarrow x = 75°$ or $x = 360° - 75° = 285°$

أي ان either $x = 75°$ or $x = 285°$

مثال 24/ حل المعادلة $\cos x = -\frac{1}{2}$

الحل / بما ان $\cos x < 0$ $\therefore$ x تقع في الربعين الثاني والثالث

وبذلك فتنتسب الى كل من

لان الزاوية التي يكون جيب تمامها يساوي $\frac{1}{2}$ هي الزاوية $60°$

$\underline{180° - 60° = 120°}$ or $\underline{180° + 60° = 240°}$

$\cos x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = 120°$ or $x = 240°$

(c) $\tan x = \tan B \Leftrightarrow x = B$ or $x = \pi + B$

وبالقياس الستيني يعني ان

either $x = B$ or $x = 180 + B$

مثال25/ حل المعادلة $\tan x = \tan 53°$

الحل / $\tan x = \tan 53° \Leftrightarrow x = 53°$ or $x = 180 + 53°$

either $x = 53°$ or $x = 233°$

مثال 26/ حل المعادلة $\tan x = \sqrt{3}$

الحل / $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan x = \tan 60°$

$\therefore x = 60°$ or $x = 180° + 60° = 240°$

مثال 27/ حل المعادلة $\tan 4x + \cot x = 0$

الحل / $\tan 4x = -\cot x$

كل جيب ظله جيب تمام الزاوية تقع في في الربع الثاني لان قيمة الظل بالسالب

$\therefore$ either $\tan 4x = \tan(90° + x) \rightarrow$

$\tan(90° + x) \rightarrow -\cot x$

$4x = 90° + x \rightarrow 4x - x = 90°$

$3x = 90° \rightarrow \therefore x = 30°$

or $\tan 4x = \tan(270° + x) \rightarrow$ في الربع الرابع

$4x = 270° + x$

$3x = 270$

$\therefore x = 90° \leftarrow$ تهمل

مج الحل = $\{30°\}$

مثال 28/ حل المعادلة $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$

الحل / نحلل بالتجربة

$(\cos x + 2)(2\cos - 1) = 0$

either $\cos x = -2$

يهمل لان $-1 \le \cos x \le 1$

or $\cos x = \frac{1}{2}$

ويكون cos x موجباً في الربعين الاول والرابع

(أ) **في الربع الاول** $\cos x = \cos 60 \rightarrow x = 60°$

(ب) **في الربع الرابع** $= 300°$

$\cos x = \cos(360° - 60°) \rightarrow x = 360° - 60°$

مج الحل $= \{60°, 300°\}$

ثانياً

(1) المعادلات المثلثية من الصورة $\underline{a}\sin x + \underline{b}\cos x = \underline{c}$

أي انها معادلة من الدرجة الاولى بالنسبة الى (sin x) , (cos x)

(2) المعادلات المثلثية من الصورة $\underline{a}\sin^2 x + \underline{b}\sin x\cos x + \underline{c}\cos^2 x = d$

أي انها معادلة من الدرجة الثانية في كل من (sin x) , (cos x)

الحالة الاولى

(أ) اذا كان احد المعاملات a,b,c يساوي صفر فان المعادلة تتحول الى معادلة بسيطة ويمكن حلها في (اولاً) .

(ب) اذا كان كل من هذه المعاملات لايساوي صفراً فيمكن توضيح حلها اذا كان $c^2 \le a^2 + b^2$ وكما في المثال الاتي :

مثال 29/ حل المعادلة $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$

الحل/ لحل هذا النوع من المعادلات نتبع الاتي : $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$ بنسبة مثلثية $\sqrt{3}$

نعوض عن $\sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}(60°)$

$$\tan\frac{\pi}{3}\sin x + \cos x = \sqrt{3}$$

$$\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin x + \cos x = \sqrt{3}\right) \times \cos\frac{\pi}{3}$$

قانون المجموع او الفرق

$$\underline{\sin\frac{\pi}{3}\sin x} + \underline{\cos\frac{\pi}{3}\cos x} = \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{3}$$

نعوض عن $\cos 60° = \frac{1}{2}$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

يكون $\cos x$ موجباً في الربعين الاول والرابع

$(\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°)$

$$\therefore \text{ either } \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos(\frac{\pi}{6})$$

$$\frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi - \pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{or } \cos(\frac{\pi}{3} - x) = \cos(-\frac{\pi}{6}) \rightarrow \frac{\pi}{3} - x = -\frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi + \pi}{6} = \frac{3\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore$ مج الحل= $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$

(2) الحالة الثانية

في هذه الحالة نعوض عن الدوال المثلثية للزاوية بدلالة الجيب والجيب تمام بصورة $2x$ ضعف الزاوية فتكون :

$$a\left(\frac{1 - \cos \widehat{2x}}{2}\right) + b\left(\frac{\sin \widehat{2x}}{2}\right) + c\left(\frac{1 + \cos \widehat{2x}}{2}\right) = d$$

مثال 30/ حل المعادلة الاتية

$$2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 3$$

الحل/

نضرب طرفي المعادلة في ٢ للتخلص من الكسر ولنجعل في الحد الوسط
x cos x = sin 2x

$$\left[2\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right) + \sqrt{3}(\sin x\cos x) + 3\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) = 3\right]$$

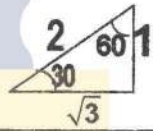
$$2 - 2\cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x + 3 + 3\cos 2x = 6$$

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 6 - 5$$

$$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1$$

نعوض عن $\sqrt{3}$ بالنسبة للمثلث ادناه

$\sqrt{3} = \tan 60°$



$$\tan\frac{\pi}{3}\sin 2x + \cos 2x = 1$$

$$\left(\frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}\sin 2x + \cos 2x = 1\right) \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3}\sin 2x + \cos\frac{\pi}{3}\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$$

مجموع او فرق زاويتين

$$\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\frac{\pi}{3}$$

cos x موجبة اما في الربع الاول او الربع الرابع فأما

either $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

$$\frac{\pi}{3} - 2x = \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}$$

$$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

or $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\boxed{\sin(-\theta) = -\sin\theta}$$

$$\boxed{\cos(-\theta) = \cos\theta}$$

$$\boxed{\tan(-\theta) = -\tan\theta}$$

$$\therefore \frac{\pi}{3} - 2x = -\frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$2x = 2 \times \frac{\pi}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{3}$$

$\therefore$ مج الحل = $\left\{0, \frac{\pi}{3}\right\}$

حلول تمارين (4-6)

حل المعادلات الاتية

(1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

معادلة بسيطة $\sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

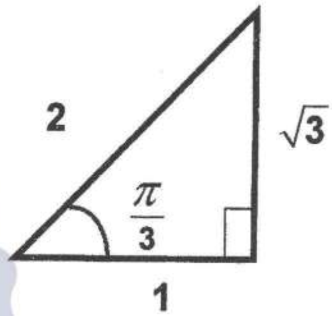
الجيب موجب في الربع الاول والثاني

$\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

either $X = \frac{\pi}{3}$ or $X = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi - \pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$x = 60°$ or $x = 120°$

مج الحل = $\{60°, 120°\}$



---

(2) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} \xrightarrow{\text{يعني}} \frac{1}{\sqrt{2}}$

اشارة العدد $\frac{\sqrt{2}}{2}$ موجبة
يعني الجيب تمام موجب
ويعني في الربع الاول والرابع

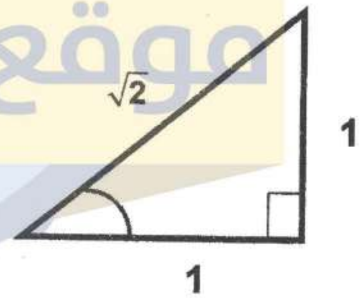
$\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

either $x = \frac{\pi}{4}$

or $x = 2 - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$x = 45°$ or $x = 315°$

مج الحل = $\{45°, 315°\}$



---

(3) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{\text{يعني}} \frac{1}{\sqrt{3}}$

اشارة العدد موجبة
تعني الظل موجب
في الربع الاول والثالث

$\tan x = \tan \frac{\pi}{6}$

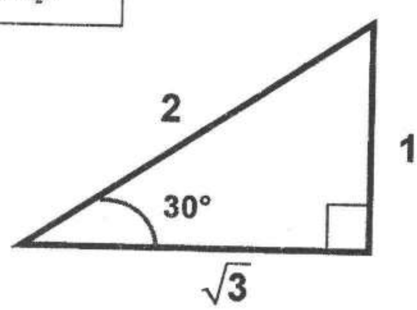
اما $\therefore x = \frac{\pi}{6}$

or $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$

$x = 30°$ $x = 210°$

مج الحل = $\{30°, 210°\}$



(4) $\sin 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

$\sin 2x = \cos x$ نحولها كلها الى x بدون التسعينات

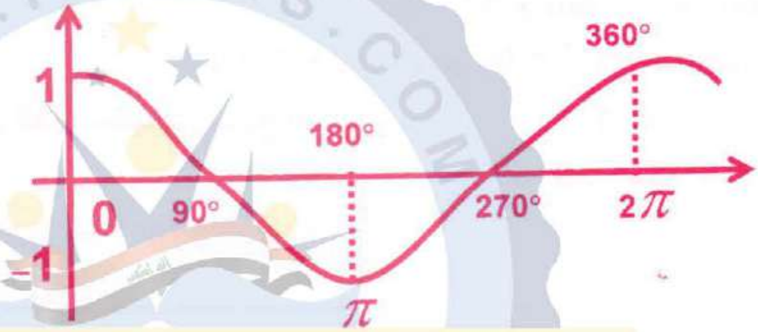
$2 \sin x \cos x = \cos x$ لان هنا التعامل مع عدد فرد منها

$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$ لايجوز القسمة على المجهول لانه قد تكون قيمته صفر

$\cos x (2 \sin x - 1) = 0$ ← عامل مشترك

either $\cos x = 0$

$x = 90°\ ,\ 270°$



منحني الـ cos

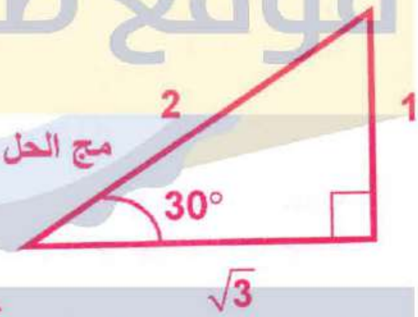
or $2 \sin x - 1 = 0$

$2 \sin x = 1$

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = 30°\ ,\ x = 150°$

مج الحل = $\{150°\ ,\ 30°\ ,\ 90°\ ,\ 270°\}$



---

(5) $\cos 4x = \cos(x + \pi)$

الحل / التعامل مع عدد زوج من التسعينات نفس تسمية النسب المثلثية

$\cos(x + \pi) = -\cos x$ ∴ الزاوية تقع في الثاني والثالث

$\cos 4x = \cos(180 - x)$ في الربع الثاني

ولايجوز وضع x+90 لان التسمية تتغير الى sin

$4x = 180° - x$

$5x = 180° \rightarrow x = \frac{180°}{5} \rightarrow x = 36°$

$\cos 4x = \cos(180 + x)$ في الربع الثالث

$4x = 180 + x$

$4x - x = 180$

$3x = 180 \rightarrow x = \frac{180}{3} \rightarrow x = 60°$

مج الحل = $\{36°\ ,\ 60°\}$

(6) $\tan 4x - \cot x = 0$

الحل /

$\tan 4x = \cot x$

في الربع الاول $\tan 4x = \tan(90° - x)$

$4x = 90° - x \rightarrow 4x + x = 90°$

$5x = 90° \rightarrow x = \frac{90°}{5} \rightarrow x = 18°$

في الربع الثالث $\tan 4x = \tan(270° - x)$

$4x = 270° - x \rightarrow 4x + x = 270°$

$5x = 270° \rightarrow x = \frac{270°}{5} \rightarrow x = 54°$

---

(7) $\tan^2 x + 2\tan x + 1 = 0$

$(\tan x + 1)^2 = 0 \rightarrow \tan x + 1 = 0$

$\tan x = -1$ لان الزاوية 45° زاوية الاستناد ولان الظل سالب في الربع الثاني والرابع

$x = 135°\ ,\ 315°$

مج الحل = $\{135°\ ,\ 315°\}$

---

(8) $\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x(\cos x - 1) = 0$

either $\cos x = 0$

$x = 90°\ ,\ 270° \quad (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$

or $\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1 \rightarrow x = 0\ ,\ 2\pi$

مج الحل = $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

---

(9) $\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$

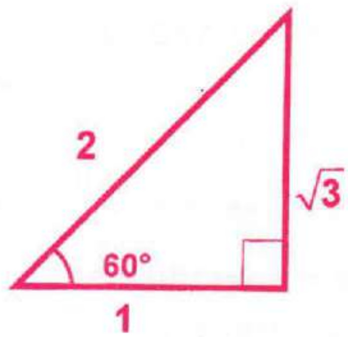
$\because \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2}$ علاقه

$\therefore \cos x = 2 \times \frac{1 - \cos x}{2}$

$\cos x = 1 - \cos x$

$\cos x + \cos x = 1 \rightarrow 2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow x = 60°$



في الربع الاول والرابع +cos

$\therefore$ مج الحل = $\{60°\ ,\ 300°\}\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

(10) tan 2x = 3 tan x

الحل/

$$\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = 3\tan x$$

$2\tan x = 3\tan x\,(1-\tan^2 x) \Rightarrow 2\tan x = 3\tan x - 3\tan^3 x$

$2\tan x - 3\tan x + 3\tan^3 x = 0 \Rightarrow -\tan x + 3\tan^3 x = 0$

$\tan x(-1 + 3\tan^2 x) = 0$

اما $\tan x = 0 \Rightarrow x = 0^\circ, 180^\circ$

او $-1 + 3\tan^2 x = 0 \Rightarrow 3\tan^2 x - 1 = 0$

$\tan^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan x = \mp\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 30^\circ, 210^\circ$

$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 150^\circ, 330^\circ$

مج الحل = $\{30^\circ, 0^\circ, 150^\circ, 210^\circ, 180^\circ, 330^\circ\}$

[4-12] رسم منحنيات الدوال المثلثية Graph of Trigonometric Fuunction

تمهيد /

عزيزي الطالب اقرا هذا التمهيد ليس لكونه فقط رياضيات ولكنه ثقافة عامة . كثير من الحوادث والظواهر الطبيعية تتكرر بشكل متماثل في فترات متساوية من الزمن ، مثل :

(1) رؤية وجه من اوجه القمر على سطح المعمورة ، فنحنت نراه :

- هلالاً ، تربيعاً اول ، بدراً ، تربيعاً ثان ، هلالاً (منازل القمر)

اما عند الشعوب الاخرى فتكون منازل القمر كما يلي :

- محاقاً ، تربيعاً اول ، بدراً ، تربيعاً ثان ، محاقاً .

ولايجوز ان يبدأ هلالاً وينتهي محاقاً . (لان صغر القياس هنا يختلف عن صغر القياس المستخدم عند الشعوب الاسلامية) .

ثم يتكرر ذلك كل (29) يوماً و (12) ساعة و (44) دقيقة و(3) ثوان .

(2) دوران الارض حول الشمس يتكرر بصفة منتظمة .

سنرسم هذه الدالة والتي ستعرف ومثيلاتها بالدوال الدورية . عزيزي الطالب سوف تستوعب رسم هذه الدالة ($y = 0.4 \sin x$) بعد ان تنتهي من دراسة هذا البند .

ميل الشمس يتغير بمرور الايام ، أي مرة نجدها (ظهراً) عالية في كبد السماء ومرة اخرى نجدها (ظهراً) بعد ثلاثة اشهر اقل ارتفاعاً في كبد السماء ومرة ثالثة اوطأ ارتفاعاً من المرات السابقة وفي الرابعة تعود الى ارتفاع المرة الثانية وهكذا تعود الى المرة الاولى وبذلك تكمل دورة كاملة في سنة واحدة .

ونستنتج من ذلك ان ميل الشمس مقداره الاقصى = $23.5°$ ومقداره الادنى = $-23.5°$ ويمر بالصفر صعوداً ونزولاً .

يبدأ ميل الشمس بالصفر (declination of the sun = 0°) في كل سنة في 21 اذار (الاعتدال الربيعي) حيث يتساوى الليل والنهار في جميع انحاء المعمورة ويسمى عيد الربيع (دورة السنة) ويزداد صعوداً ويستمر بالزيادة الى ان يصل الى اقصى ميل وقدره $23.5°$ شمالاً في 21 حزيران (الانقلاب الصيفي) . ومن ثم يبدأ بالتناقص نزولاً حتى يصل الى الصفر في ٢٣ ايلول (الاعتدال الخريفي) ومن ثم كذلك نزولاً يبدأ الميل بالتناقص (أي يصبح الميل جنوبياً) ويستمر بالتناقص الى ان يصل الى ادنى ميل في 21-22 كانون الاول (الانقلاب الشتوي) وقدره $-23.5°$.

ثم يبدأ بالتزايد ويستمر بالزيادة الى ان يصل مرة اخرى الى الصفر في ٢١ اذا وهكذا دواليك (and so on) (وهلم جرا) .

(3) جميع حركات الموجات التي توصف بانها كهرومغناطيسية مثل موجات الضوء ، موجات الراديو ، كذلك الموجات التي يبثها الرادار عند عماه ، جميعها موجات مستعرضة وهي تتكرر في فترات زمنية متساوية .

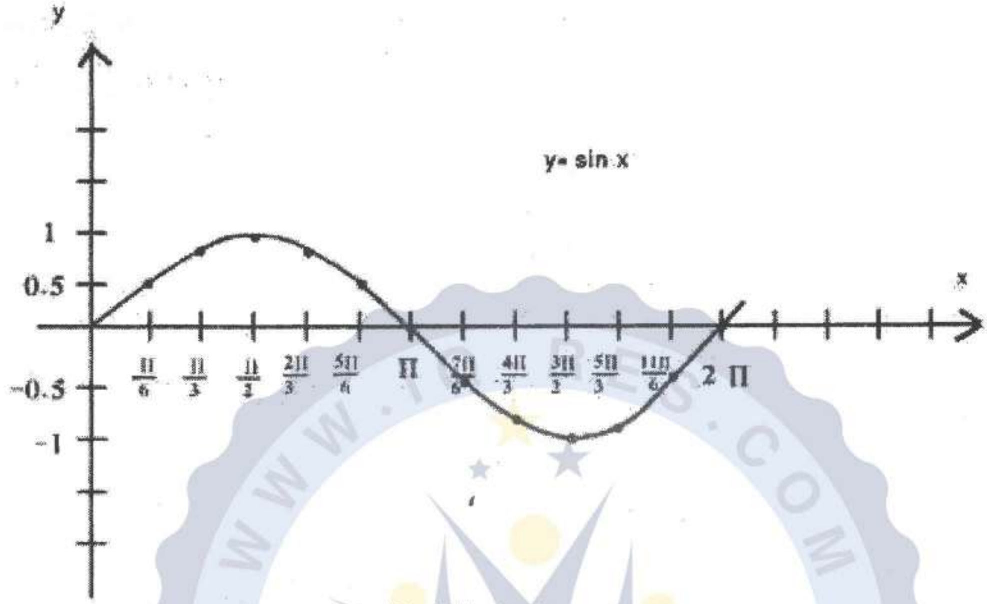
وان رسم الدوال المثلثية هو من النوع الذي يتكرر في دورات محدودة وذلك لان هذه الدوال هي دوالاً دورية .

اولاً / رسم منحني جيب الزاوية (y=sin x)

اذا تغير قياس الزاوية الموجهة بالوضع القياسي ، تتغير قيمة الدالة الدائرية تبعاً لها . فمثلاً اذا تغير قياس الزاوية من $0°$ الى $360°$ (او من 0 الى 2π) فاننا نحصل على قيم مختلفة لدالة الجيب لهذه الزاوية . فاذا كانت y تساوي قيمة الجيب وكانت الزاوية هي x فان $y=\sin x$ وللتمثيل البياني لدالة الجيب ننشئ جدولاً يبين قيم x والقيم المناظرة لها y . كما في الجدول الاتي :

x	0°	30°	60°	90°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=sinx	0	0.5	0.86	1	0.5	-0.5	-0.86	-1	-0.86	-0.5	0

نحدد الازواج التي نحصل عليها من x ، y ثم نرسم على ورقة المربعات منحني الجيب ويكون كما في الشكل (5-19)



الشكل (19-5)

خواص منحني الجيب . المجال $[0,360°]$:

1- يقطع منحني الجيب محور السينات عند $x = 360°$, $x = 180°$, $x = 0°$

2- اكبر قيمة للجيب عند $x = 90°$ وتساوي 1

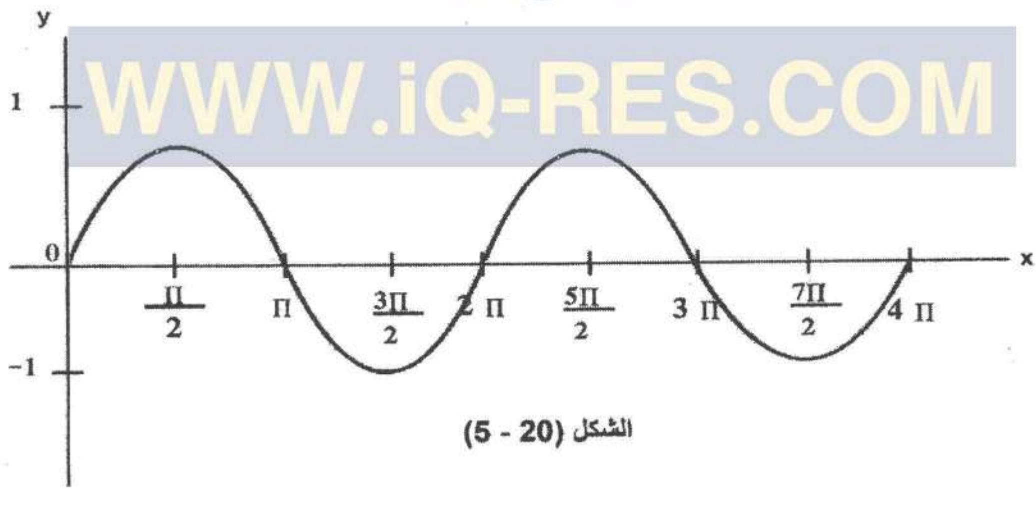
3- اصغر قيمة للجيب عند $x = 270°$ وتساوي -1

4- عندما $x \in (0 , 180°)$ تكون قيمة $\sin x$ موجبة ويكون المنحني واقعاً اعلى محور السينات

5- عندما $x \in (180° , 360°)$ يكون قيمة $\sin x$ سالبة ويكون المنحي واقعاً اسفل محور السينات

6- لو رسمنا $y = \sin x$ الفترة $[2\pi , 4\pi]$ نجد ان بيان sin كرر نفسه .

لاحظ الشكل (5-20)



الشكل (5 - 20)

مثل هذه الدالة نطلق عليها دالة دورية .

والفترة التي كرر فيها المنحني نفسه (2π) تسمى دورة الدالة .

ويسمى العدد : $\frac{1}{\text{دورة الدالة}}$ بالتردد ، ويسمى العدد = 1/2 (اكبر قيمة – اقل قيمة) سعة الدالة .

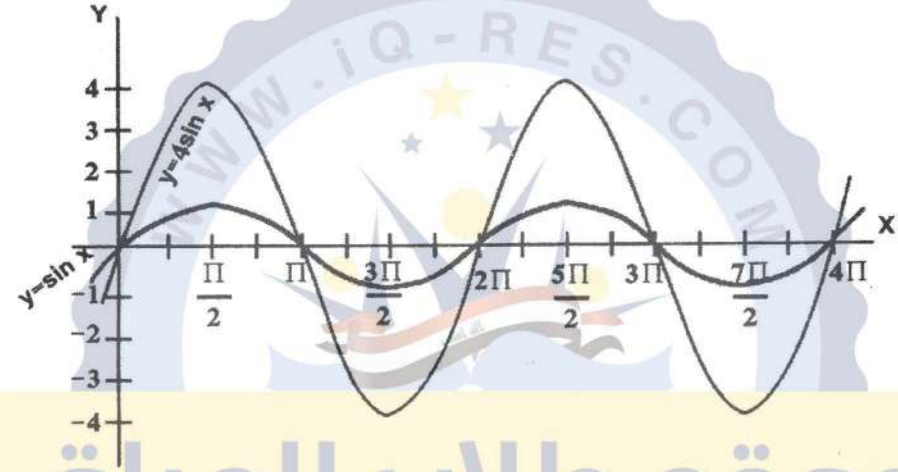
أي ان : دورة الدالة $y = \sin x$ هي 2π

وان التردد = $\frac{1}{2\pi}$ وان السعة = $\left(1-(-1)\right)\frac{1}{2} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

مثال / ارسم بيان الدالة $y = 4 \sin x$ ومن الرسم جد : أ- الدورة ب- التردد ج- السعة

الحل / الجدول الاتي يوضح

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sin x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
4 sin x	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0



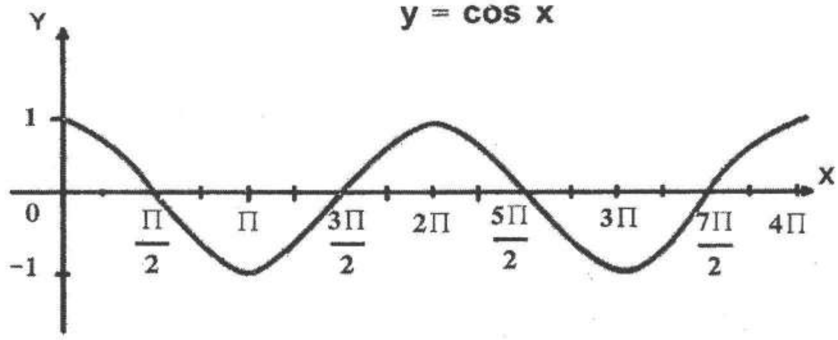
دورة الدالة $y = 4 \sin x$ هي 2π

التردد = $1/2\pi$ السعة = $4 = \left(4-(-4)\right)\frac{1}{2}$

ثانيا / رسم بيان الدالة $y = \cos x$

الحل / نكون جدولاً يبين العلاقة بين x ، cos x كما يأتي :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
cos x	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1



لو نظرنا الى البيان في الفترة $[2\pi , 0]$ وفي الفترة $[4\pi , 2\pi]$ نجدهما متشابهان تماماً في الفترتين أي ان بيان COS يكرر نفسه كل فترة طولها 2π وعلى ذلك فان الدالة $y = \cos x$ دورية .

دورة الدالة $y = \cos x$ هي 2π

التردد = $\frac{\pi}{2}$ ، السعة = 1

خواص منحني الجيب تمام (y = cos x)

1- يقطع محور السينات عند $x = 3\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$

2- اكبر قيمة لجيب التمام عند $x = 0$ ، $x = 2\pi$ تساوي 1

3- اصغر قيمة لجيب التمام عند $x = \pi$ = 1−

4- عندما تكون x من الصفر الى $\frac{\pi}{2}$ يكون منحني الجيب التمام موجباً ، اذ يكون اعلى محور السينات

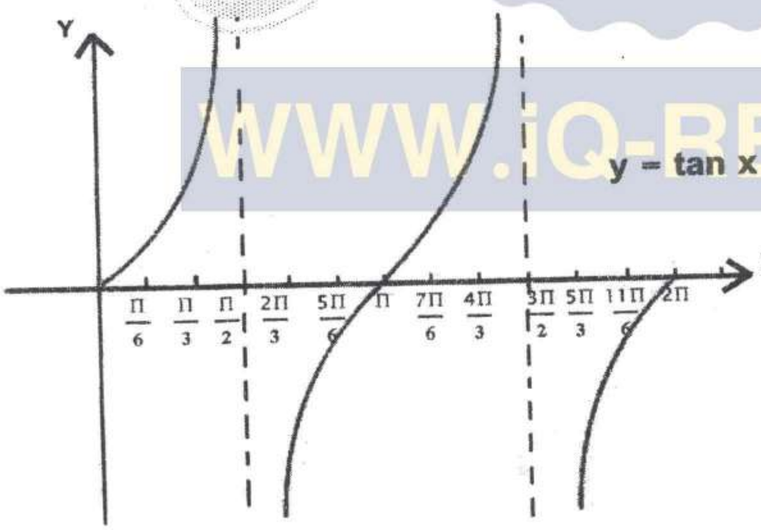
وعندما تأخذ x القيم من $\frac{\pi}{2}$ الى $3\frac{\pi}{2}$ يكون منحني الجيب تمام سالباً ، اذ يكون اسفل محور السينات

وعندما تأخذ x القيم من $3\frac{\pi}{2}$ الى 2π يكون منحني الجيب التمام موجباً اذ يكون اعلى محور السينات

ثالثا / رسم منحني الظل : (y = tan x)

نكون جدولاً يبين x ، y = tan x

x	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{2}$	2π
y=tan x	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	-0.6	0	0.6	1.7	غير معرفة	-1.7	0.6	0



الدالة y = tan x دورية

ودورتها = π

التردد = $\frac{1}{\pi}$

المنحني ليس محدود لا من اعلى ولا من اسفل لذا ليس له سعة

خواص منحني الظل : y = tan x

1- يقطع المحور السيني عند x تساوي : 0° , 180° , 360°

2- المنحني غير متصل كما في منحني الجيب ومنحني الجيب تمام

3- عندما تكون x بين 0° , 90° يكون الظل موجباً ، وكلما اقتربنا من x = 90° نجد قيمة الظل تزداد ازدياداً كبيراً

4- عندما تكون بين 90° , 180° يكون الظل سالباً وعندما تقع x بين 180° , 270° يكون الظل موجباً

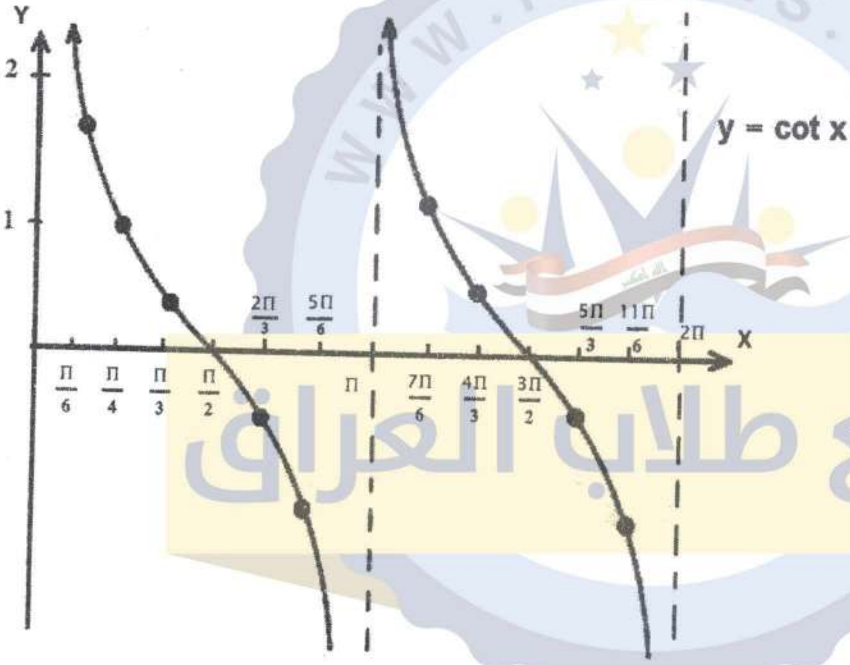
5- يكون سالباً عندما تقع x مابين 180° , 360°

رابعاً / رسم منحني ظل التمام : $y = \cot x$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين x ، $\cot x$ وكما يأتي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cotx	غير معرفة	1.7	1	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة	1.7	0.6	0	-0.6	-1.7	غير معرفة

خواص منحني ظل التمام :



1- يقطع محور السينات عند $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = 3\frac{\pi}{2}$

2- المنحني غير متصل

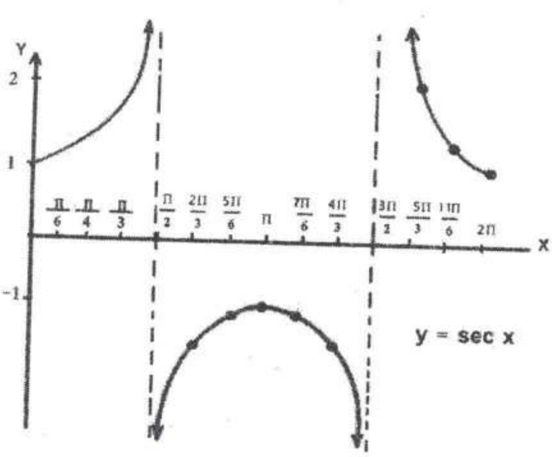
3- عندما تكون x بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ نجد ان ظل التمام موجب ، وعندما تكون x مابين $\frac{\pi}{2}$ و π نجد انه سالب وعندما تكون x مابين π و $3\frac{\pi}{2}$ يصبح موجباً ، وعندما تكون x مابين $3\frac{\pi}{2}$ و 2π يكون سالب

خامساً / رسم منحني قاطع الزاوية : $y = \sec x$

نكون جدولاً يبين العلاقة بين x ، $y = \sec x$ كما يأتي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=secx	1	1.2	1.4	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة	2	1.2	1

خواص منحني القاطع :



1- لا يقطع منحني القاطع محور السينات على الاطلاق

2- عندما يكون x ما بين 0 و $\frac{\pi}{2}$ يكون المنحني موجباً

3- عندما يكون x مابين $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$ يكون المنحني سالباً

4- عندما يكون x مابين $\frac{3\pi}{2}$ و 2π يكون المنحني موجباً

5- المنحني غير متصل

6- المنحني غير محدود لا من الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة

سادساً / رسم منحني قاطع التمام : y = csc x

نكون جدولاً يبين العلاقة بين x ، y = csc x

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y=cotx	غير معرفة	2	1.4	1.2	1	1.2	2	غير معرفة	-2	-1.2	-1	-1.2	-2	غير معرفة

خواص منحني قاطع التمام

1- المنحني لا يقطع محور السينات

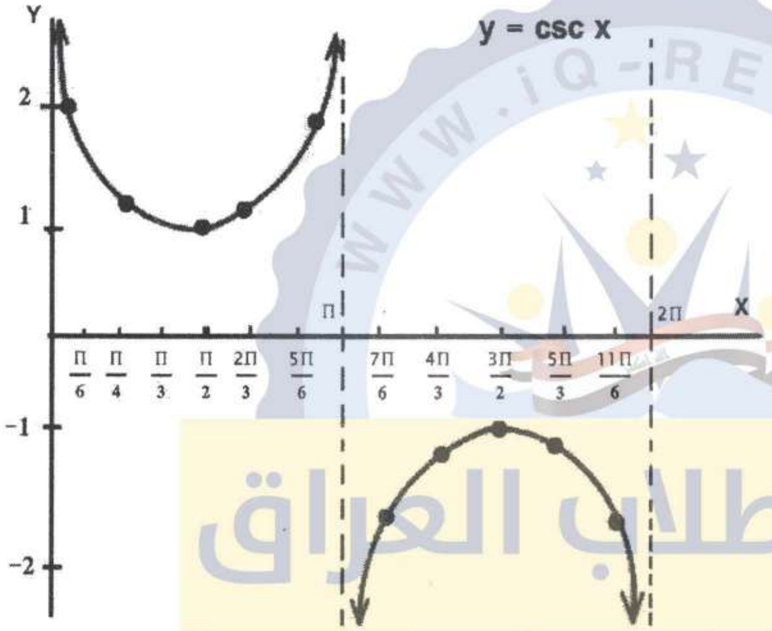
2- عندما x مابين 5 الى π يكون المنحني موجبا اعلى محور السينات

3- عندما x مابين π الى 2π يكون المنحني سالباً اسفل محور السينات

4- المنحني غير متصل

5- دورة المنحني 2π والتردد $\frac{1}{2}\pi$

6- المنحني غير محدود لامن الاعلى ولا من الاسفل لذا ليس له سعة



عزيزي الطالب

ان هذه الملزمة التي بين يديك هي نفس الملزمة التي يعتمدها مدرس المادة في تدريسه الخصوصي حيث هي خلاصة جهد الاستاذ وهي خاضعة للتنقيح والتجديد المستمر من قبل مدرس المادة فاطلب النسخة الاصلية من

مكتب الشمس حصرا

حلول تمارين (8-4)

(1) ارسم بيان كل من الدوال الاتية . ومن الرسم استنتج كلاً من دورة الدالة وترددها وسعتها .

O $y = \sin 3x$ on $\left[0, 4\frac{\pi}{3}\right]$

اولاً كيف نرتب قيم الزاوية x في الحقول ؟ ترتب كما يلي :

نبدأ بالصفر . ثم $\frac{\pi}{2}$ (90°) ثم : ←

(1) 0

(2) $\frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$

(3) $\frac{\pi}{2} \times 2 = \pi$

(4) $\frac{\pi}{2} \times 3 = \frac{3\pi}{2}$

(5) $\frac{\pi}{2} \times 4 = 2\pi$

(6) $\frac{\pi}{2} \times 5 = \frac{5\pi}{2}$

(7) $\frac{\pi}{2} \times 6 = 3\pi$

(8) $\frac{\pi}{2} \times 7 = \frac{7\pi}{2}$

(9) $\frac{\pi}{2} \times 8 = 4\pi$

تسعة حقول

ثانيا نحسب النسب المثلثية للزاوية 3x كما يلي :

(1) $3x = 0 \rightarrow x = \frac{0}{3} = 0$

(2) $3x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \div 3 \rightarrow x = \frac{\pi}{6}$

(3) $\frac{\pi}{6} \times 2 = \frac{\pi}{3}$

(4) $\frac{\pi}{6} \times 3 = \frac{\pi}{2}$

(5) $\frac{\pi}{6} \times 4 = \frac{2\pi}{3}$

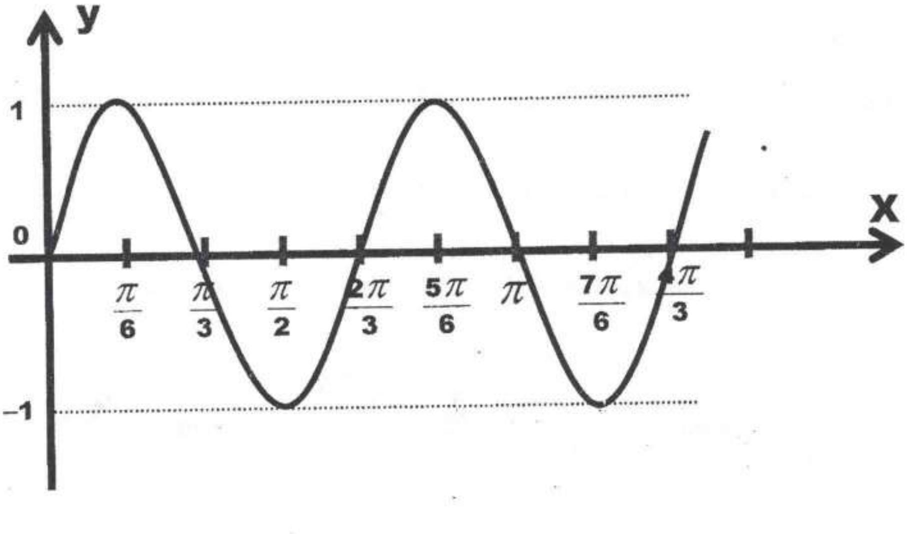
(6) $\frac{\pi}{6} \times 5 = \frac{5\pi}{6}$

(7) $\frac{\pi}{6} \times 6 = \pi$

(8) $\frac{\pi}{6} \times 7 = \frac{7\pi}{6}$

(9) $\frac{\pi}{6} \times 8 = \frac{4\pi}{3}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π	$5\pi/2$	3π	$7\pi/2$	4π	÷ 3
sin x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	↓
3x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π	$7\pi/6$	$4\pi/3$	
sin 3x	0*	1	0	-1	0*	1	0	-1	0*	



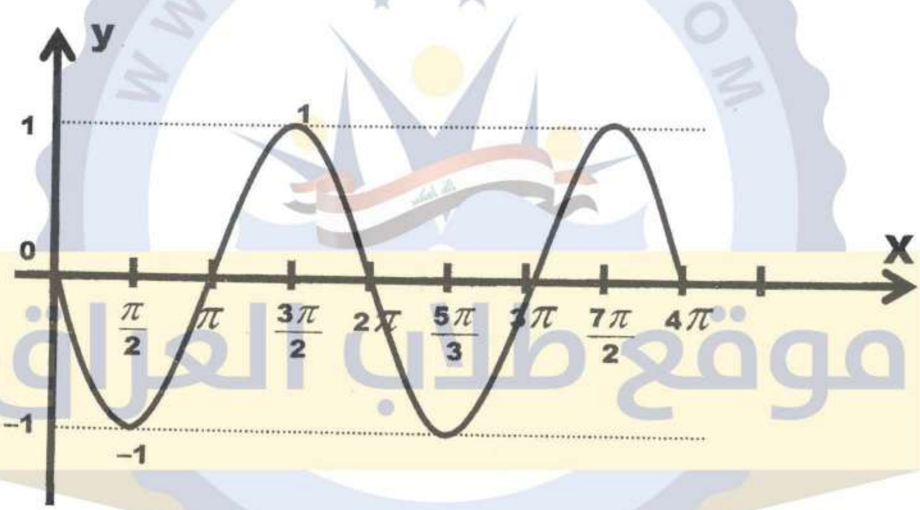
من الرسم / (1) دورة الدالة $y = \sin 3x$ هي $2\frac{\pi}{3}$ (2) التردد $F = \dfrac{1}{\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{3}{2\pi}$

(3) السعة $A = |1| = |-1| = 1$

---

(2) $y = -\sin x$ ➔ $y = -1 \sin x$ $[0 , 2\pi]$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π	$\frac{7\pi}{2}$	4π
sin x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
- sin x	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0



من الرسم / $A = |-1| = |1| = 1$, $F = \dfrac{1}{2\pi}$, $p = 2\pi$

من المعادلات /

$y = (\overset{A}{-1}) \sin (\overset{B}{1})\, x$

$A = \dfrac{M - m}{2} = \dfrac{1 - (-1)}{2} = \dfrac{1 + 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$

$A = |-1| = 1$ (في حالة تساوي قيمة الدالة العظمى والصغرى بالمطلق)

$p = \dfrac{2\pi}{B} = \dfrac{2\pi}{1} = 2\pi$

$F = \dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2\pi}$

---

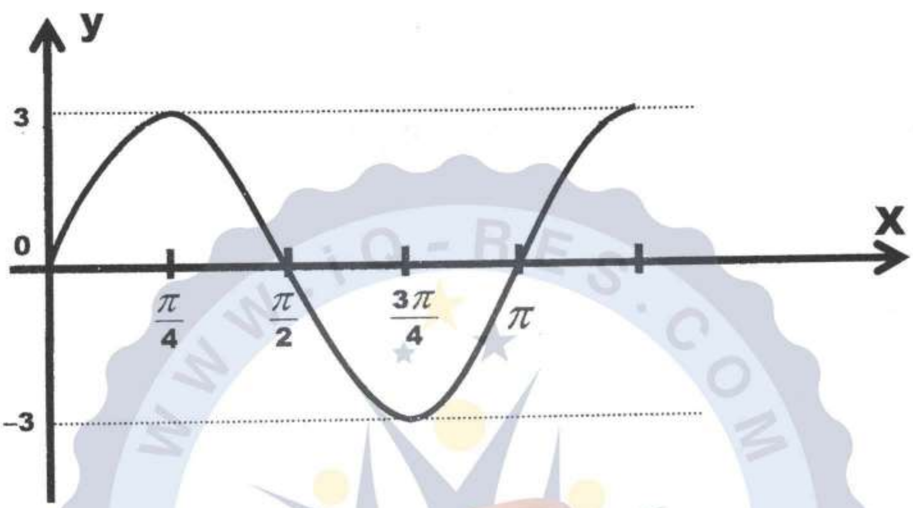
(3) $y = 3 \sin 2x$ on $[0 , 2\pi]$

الحل /

$y = \overset{A}{3} \sin \overset{B}{2}\, x$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π * $\frac{1}{2}$
sin x	0	1	0	-1	0
2x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π * الدورة
sin 2x	0	1	0	-1	0
3 sin 2x	0	3	0	-3	0

الازواج المرتبة $(0,0)\ \ (\frac{\pi}{4},3)\ \ (\frac{\pi}{2},0)\ \ (\frac{3\pi}{4},-3)\ \ (\pi,0)$



من الرسم / الدورة π *** والسعة 3 ** والتردد $\frac{1}{\pi}$ *

من القوانين /

$$**\ A = |3| = |-3| = 3$$

$$***\ p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$*\ F = \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi}$$

المحور السيني الموجب ← المحور السيني السالب

(4) $y = \cos 2x$ on $[-\pi, 2\pi]$

$+\frac{\pi}{2}$

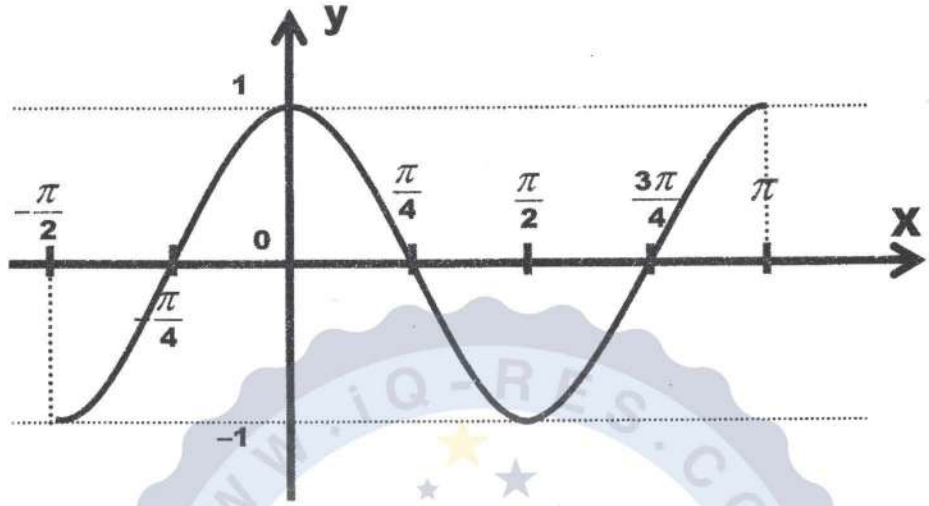
$\cos(-\theta) = \cos\theta$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$	2π	÷2 **	
								↓	
cos x	-1	0	1	0	-1	0	1	**	
2x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{-\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$3\frac{\pi}{4}$	π *		
cos 2x	-1	0	1*	0	-1	0	1*		

$$y = \overset{A}{1} \cos \overset{B}{2}\, x \qquad p = \frac{2\pi}{B} = \frac{2\pi}{2} = \pi\ *$$

$$F = \frac{1}{p} = \frac{1}{\pi} \qquad A = 1$$

الازواج المرتبة $(0\ ,\ \pi)\ (\frac{3\pi}{4}\ ,\ 0)\ (\frac{\pi}{2}\ ,\ -1)\ (\frac{\pi}{4}\ ,\ 0)\ (0\ ,\ 1)\ (-\frac{\pi}{4}\ ,\ 0)\ (-\frac{\pi}{2}\ ,\ -1)$



الفرسان الثلاثة من الرسم / (1) الدورة من الصفر الى $\pi = \pi$

(2) السعة $= 1$

(3) التردد $= \frac{1}{\pi}$ (و.هـ.م)

---

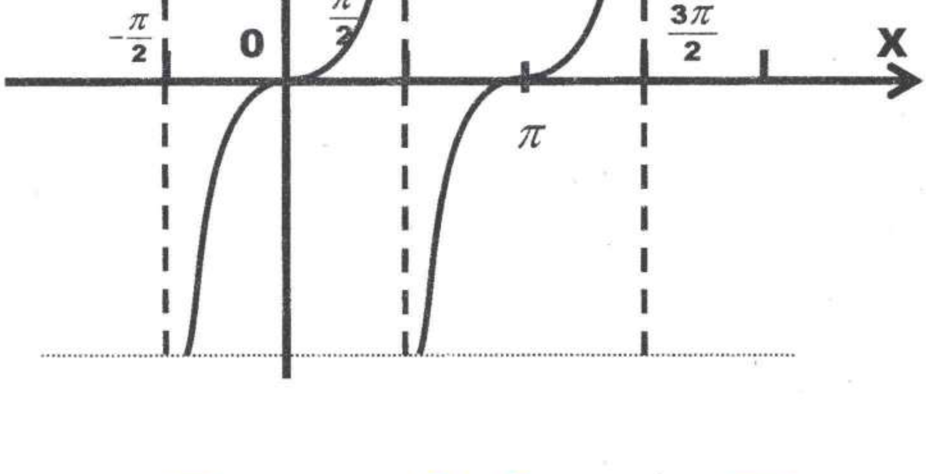
(7) $y = 2\tan x$ $\quad$ دورة الدالة $\tan x = \pi$, التردد $= \frac{1}{\pi}$

ليس لمنحني الدالة سعة لانه غير محدد لا من اعلى ولا من اسفل .
نكتب الجدول ومن ثم نرسم الرسم البياني للدالة $y = 2\tan x$

$y = 2\tan x$ $\quad$ on $\left[-\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$

نكتب الجدول $\quad$ $\tan(-\frac{\pi}{2}) = -\tan\frac{\pi}{2}$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$
tan x	غير معرف	0	غير معرف	0	غير معرف
2 tan x	غير معرف	0	غير معرف	0	غير معرف



نرسم الرسم البياني للدالة

مصطلح (غير معرف) يعني رسم مستقيم موازي لمحور الصادات من النقطة المقابلة للزاوية المطلوبة التي عندها الظل غير معرف بمعنى ان قيمة الدالة (y) غير معرفة $(\infty , 0) , (-\infty , 0)$

لكن كيف عرفنا ان دورة الدالة الظل = π ؟

نقيس المسافة على خط الاعداد (المحور السيني) بين نقطة الموجة وتكرارها او بين تكرارين متتالين للدالة (الموجة) .

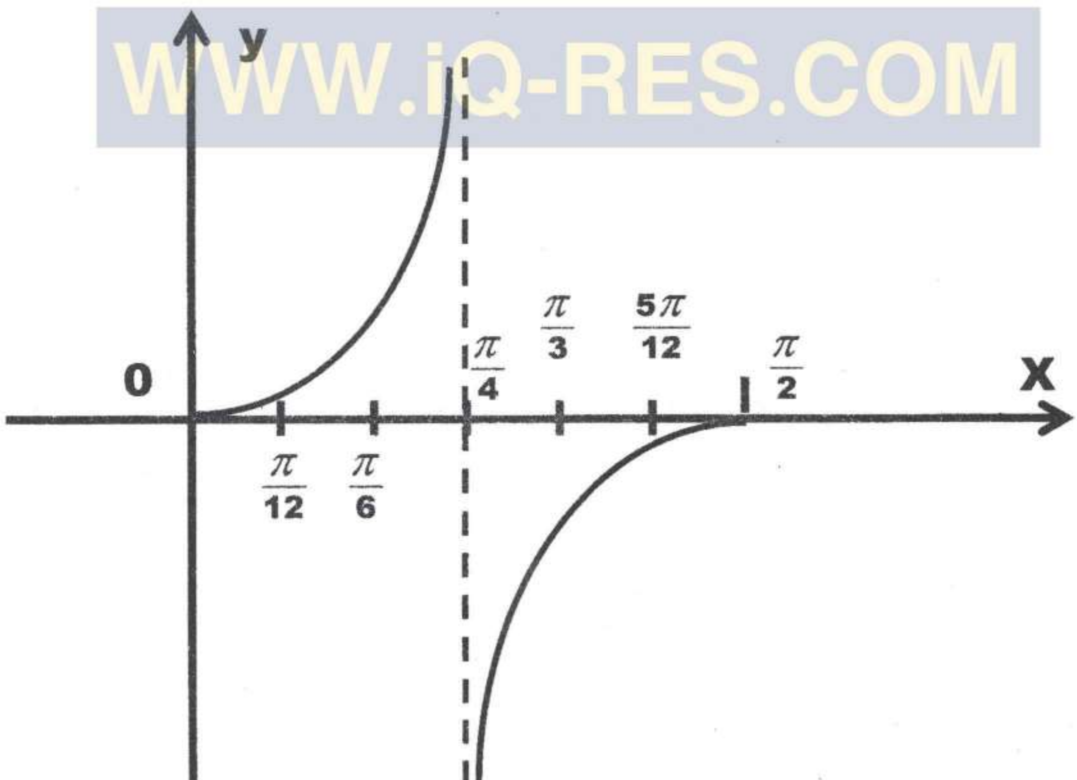
$$|\pi| - |0| = \pi \quad \rightarrow \quad \left|3\frac{\pi}{2}\right| - \left|\frac{\pi}{2}\right| = \pi$$

(8) $y = \tan 2x$ on $[0 , \pi]$

الحل / من الرسم ليس لمنحني دالة الظل سعة لانه غير محدود لا من اعلى ولا من اسفل

دورة الدالة تساوي : $\frac{\pi}{2}$ التردد يساوي : $F = \frac{1}{p} = \frac{2}{\pi}$

القياس الستيني	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	$5\frac{\pi}{6}$	π
tan x	0	0.6	1.7	غير معرف	-1.7	-0.6	0
2x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$5\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$
tan 2x	0	0.6	1.7	غير معرف	-1.7	-0.6	0
الازواج المرتبة	(0,0)	$(\frac{\pi}{12} , 0.6)$	$(\frac{\pi}{6} , 1.7)$	$(\frac{\pi}{4} , \pm\infty)$	$(\frac{\pi}{3} , -1.7)$	$(\frac{5\pi}{12} , -0.6)$	$(\frac{\pi}{2} , -0)$



(2) اختبار موضوعي

(1) ضع اشارة + او – في المستطيلات التالية لتحصل على عبارة صحيحة :

(a) $\cos(20° + 50°) = \cos 20° \cos 50° \boxed{-} \sin 20° \sin 50°$

(b) $\tan(3A - 2B) = \dfrac{\tan 3A \boxed{-} \tan 2B}{1 \boxed{+} \tan 3A \tan 2B}$

(c) $\sin(80° \boxed{-} 10°) = \sin 80° \cos 10° - \cos 80° \sin 10°$

(2) اكمل مايأتي لتحصل على عبارة صحيحة :

(a) $\sin(40° + 180°) = \sin 40° \boxed{\cos 180°} + \boxed{\cos 40°} \sin 180°$

(b) $2 \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{3} = \sin \boxed{\frac{2\pi}{3}} = \sin 2(\frac{\pi}{3})$

(c) $\dfrac{2 \tan \frac{x}{3}}{1 - \tan^2 \frac{x}{3}} = \tan \frac{2x}{3} = \tan 2(\frac{x}{3})$

(d) $\cos^2 15° - \sin^2 15° = \cos 2(15°) = \cos 30°$

(3) حدد (عين) العبارات الصحيحة والعبارات الخاطئة فيما يأتي :

(a) $\sin 6x = 2 \sin 3x$ عبارة خاطئة

(b) $\sin 15° \cos 15° = \sin 30°$ عبارة خاطئة

(c) $\cos 80° = \cos^2 40° - \sin^2 40°$ (حسب الطبع) عبارة صحيحة

(d) ϕ هي $(2 \cos x + 3 = 0)$ مجموعة حل المعادلة

نحل

$2 \cos x + 3 = 0$

$2 \cos x = -3$

$\cos x = -\frac{3}{2} = -1.5$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ لاتوجد زاوية جيب تمامها اصغر من (1)

solution set = { }

∴ العبارة صحيحة

(4) اختر للقائمة A مايناسبها من القائمة B :

القائمة A	القائمة B
① $\cos 4A \cos A - \sin 4A \sin A =$	ⓐ $\sin 5A$
② $\sin A \cos 4A - \sin 4A \cos A =$	ⓑ $\cos 5A$
③ $\sin 4A \cos A + \cos 4A \sin A =$	ⓒ $\sin 3A$
	ⓓ $\sin(-3A)$

الجواب/
① $\cos 4A \cos A - \sin 4A \sin A = \cos 5A$
② $\sin A \cos 4A - \sin 4A \cos A = \sin(-3A)$
③ $\sin 4A \cos A + \cos 4A \sin A = \sin 5A$

(5) اختبار مقالي

(1) اذا كان $3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{2}{3}$ فأوجد قيمة كل من :

$\cot x$, $\sec x$, $\csc x$

الحل / طريقة الاولى

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \rightarrow \sin^2 x = 1 - (\frac{2}{3})^2$

$\sin^2 x = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\therefore$ الزاوية في الربع الرابع من منطوق السؤال $\sin x = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

الان نجد المطلوب في السؤال

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{-2}{\sqrt{5}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$

الطريقة الثانية نظرية فيثاغورس $a^2 = 9 - 4 = 5$

$a = \sqrt{5}$

$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{3}{2}$

$\csc x = \frac{1}{\sin x} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$

(2) **اذا كان** $3\frac{\pi}{2} < x < 2\pi$ وكانت $\cos x = \frac{3}{5}$ فأوجد قيمة كل من :

$$\cos 2x \quad , \quad \sin 2x \quad , \quad \tan 2x \quad , \quad \sin\frac{x}{2} \quad , \quad \cos\frac{x}{2}$$

الحل / X تقع في الربع الرابع

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \rightarrow \sin x = -\frac{4}{5}$$

الجيب في الربع الرابع سالب (كل جيب ظله جيب تمام)

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2 \times \frac{9}{25} - 1 = \frac{18-25}{25} = -\frac{7}{25}$$

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2 \times \frac{-4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{-24}{25}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = -\frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{-4}{3}$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} = \frac{2 \times \frac{-4}{3}}{1-(-\frac{4}{3})^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{1-\frac{16}{9}} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{8}{3} \div \frac{7}{9} = \frac{8}{3} \times \frac{9}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\text{or } \tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = -\frac{24}{25} \div (-\frac{7}{25}) = -\frac{24}{25} \times -\frac{25}{7} = \frac{24}{7}$$

$$\overset{270^\circ}{3\frac{\pi}{2}} < x < \overset{360^\circ}{2\pi} \rightarrow 135^\circ < \frac{x}{2} < 180^\circ$$

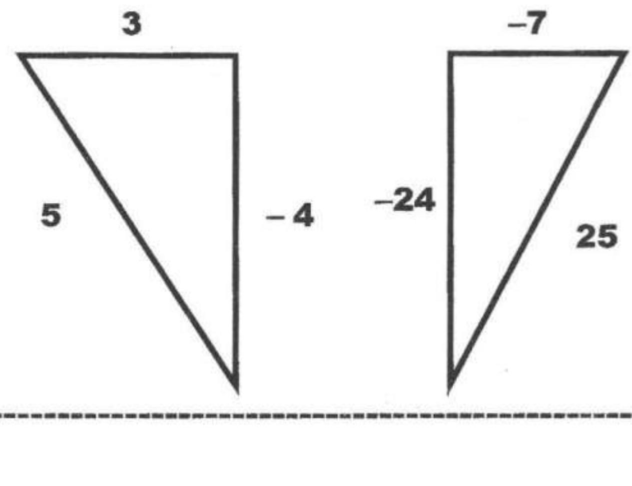
اين تقع $\frac{x}{2}$ ؟ بأي ربع ؟

$$\therefore \frac{x}{2} \in \text{2nd quarter}$$

$\frac{x}{2}$ تقع في الربع الثاني

$$\sin\frac{x}{2} = \boxed{+}\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{10}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\frac{x}{2} = \boxed{-}\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{8}{5} \times \frac{1}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$



(3) بدون استخدام الحاسبة اوجد قيمة :

(a) $\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8}$

الحل /

$$\sin\frac{\pi}{8}\ \cos\frac{\pi}{8} = 1 \times \sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}$$
$$= \frac{2}{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}(2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8})$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 2(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{8} = \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{2}\sin 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(b) $\cos^2\frac{\pi}{12} - \sin^2\frac{\pi}{12}$

$$= \cos 2(\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

(4) اثبت صحة كل من المتطابقات الاتية :

(a) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

الحل / L.S

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$
$$= (\cos^2 x - \sin^2 x) \times 1$$
$$= \cos 2x = R.S$$

الضعف $(\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x)$

(b) $\tan\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$

الحل /

$$\frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{1-(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{2\sin^2\frac{x}{2}}}{\cancel{2\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2}}$$
$$= \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} = \tan\frac{x}{2}$$

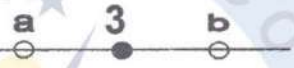
الفصل الخامس

الغاية والاستمرارية

غاية الدالة واستمراريتها Limit and Continuity

تمهيد

اذا نضرنا في الشكل المجاور نلاحظ نقطتين الاولى a تقع على يسار العدد 3 والاخرى b تقع على يمين العدد 3 . فأذا فرضنا ان a تأخذ قيماً متزايدة أي تتحرك يميناً باتجاه العدد 3 مثل :



$\overrightarrow{2.9,2.99,\ldots\ldots,2.999,\ldots\ldots,3}$

فانها تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليسار ونرمز لذلك بالرمز $\boxed{a \to 3^-}$

واذا اعطينا b قيماً متناقصة أي تتحرك يساراً باتجاه العدد 3 مثل :

$\overleftarrow{3\ldots\ldots,3.000001,\ldots\ldots,3.001,3.01,3.1}$

نقول ان b تتقارب باستمرار نحو العدد 3 من اليمين ونرمز لذلك بالرمز $\boxed{b \to 3^+}$

[5-1] جوار العدد Nigh bourhood

جوار العدد / الجوار مجموعة (فترة) مفتوحة من الاعداد الحقيقية مركزها العدد الحقيقي (a) ونصف قطرها العدد الحقيقي (h) حيث h هو أصغر عدد موجب يقترب من العدد (a) قربا كافيا على ضوء ماتقدم يمكنك ان تتفهم التعريف الاتي :

(5-1-1) تعريف

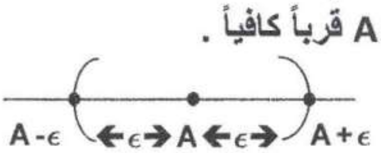
اذا كان a عدداً (نقطة) ، وكان $\in$ (تقرأ ابسلون) عدداً موجباً تسمى الفترة :

(1) $(a-\in,a+\in)$ جواراً للعد a .

(2) $(a-\in,a]$ جواراً أيسر للعد a (الجوار هنا يحوي a) .

(3) $[a , a+\in)$ جواراً ايمن للعد a (الجوار هنا يحوي a) .

فالجوار هو مجموعة مفتوحة من الاعداد الحقيقية ، مركزها العدد الحقيقي A ، ونصف قطرها العدد الحقيقي ϵ ، حيث (ϵ) هو اصغر عدد موجب يقترب من العدد A قرباً كافياً .



فمثلاً اذا كان a=1 ، $\in=\frac{1}{2}$ فان الفترات هي :

(1) $(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ جواراً للعدد 1

(2) $\left(1-\frac{1}{2}, 1\right] = \left(\frac{1}{2},1\right]$ جواراً ايسر للعد 1

(3) $\left[1,1+\frac{1}{2}\right) = \left[1,\frac{3}{2}\right)$ جواراً أيمن للعدد1

[2-5] غاية الدالة **Limit of a Function**

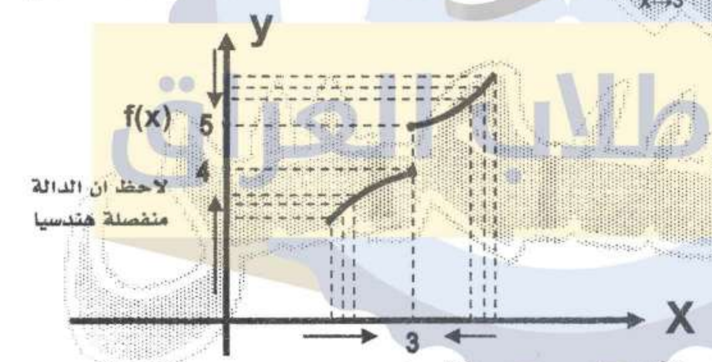
غاية الدالة عند نقطة $x=a$ هي دراسة سلوك الدالة عند تلك النقطة أو في جواراتها . حيث ان غاية الدالة عند نقطة تعني وجود عدد حقيقي وحيد يقترب من قيم x من اليمين واليسار.

تمهيد توضيحي :

سنعطي فيما يأتي توضيحاً هندسياً أي باستخدام الرسم فقط للتعريف بمفهوم الغاية .
في الشكل المجاور نلاحظ ان هناك بياناً للدالة F (منفصلة هندسياً) عند $x=3$ كما يمكنك ان تلاحظ ان $y=f(x)$ تاخذ قيماً متقاربة من 4 وذلك عندما تتقارب X من 3 من اليسار ، وكلما اردنا ان نجعل $F(x)$ اكثر قرباً الى 4 فانه يمكننا ذلك عن طريق اعطاء X قيماً اكثر قرباً الى 3 من اليسار .
وفي هذه الحالة نقول أن : $\lim_{x\to 3^-} f(x)=4$ وتقرأ (غاية الدالة عند 3 من اليسار تساوي 4)

لاحظ

اننا لم نتعرض لذكر ما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x=3$ كما يمكنك ان تلاحظ $f(x)$ تتقارب من 5 كلما اقتربت X الى 3 من جهة اليمين.
وفي هذه الحالة نقول ايضاً أن : $\lim_{x\to 3^+} f(x)=5$ وتقرأ (غاية الدالة عند 3 من اليمين تساوي 5)

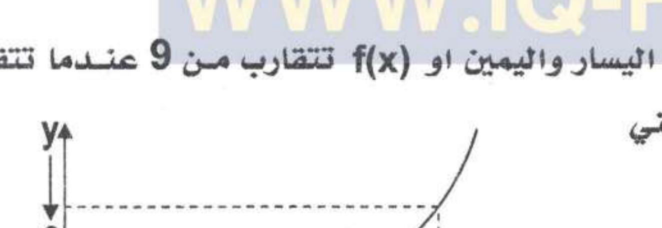


لاحظ اننا لم نذكر فيما اذا كانت الدالة معرفة او ليست معرفة عند $x=3$

ملاحظة

الدالة تتقارب من 9 عندما تتقارب X من 4 من اليسار واليمين او $f(x)$ تتقارب من 9 عندما تتقارب X من 4 (أي الدالة معرفة عند $x=4$) وهذا يعني

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^+} f(x) = 9$$



وفي هذه الحالة عندما تتساوى النهايتان لدالة مثل f عند نقطة مثل 4 من اليسار واليمين نقول ان الدالة f غاية عند 4 ونعبر عن ذلك بالصورة الرمزية :

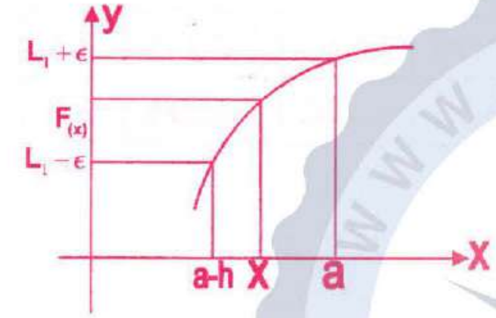
$$\boxed{\lim_{x\to 4} f(x)= 9}$$

(لو رسمنا مضلعاً منتظماً داخل دائرة ثم جعلنا عدد اضلاع المضلع يزداد بصورة غير محددة نجد ان مساحة المضلع تقترب من مساحة الدائرة وبما اننا نستطيع ان نزيد عدد الاضلاع بقدر مانريد فاننا نستطيع

ان نصغر الفرق بين مساحتيهما بقدر مانريد ، ففي هذه الحالة يقال ان مساحة الدائرة غاية لمساحة المضلع المنتظم المرسوم داخلها عندما عدد اضلاعه يصبح كبيرا جدا) .

اعتمادا على ماعرضناه سابقا في تقديم مفهوم الغاية باستخدام الرسوم التوضيحية وكما في الشكل المجاور ادناه نقول بان : $\lim_{x \to a} F_{(x)} = L$

نفهم من هذا عموما انه :



بامكاننا دوماً ان نجعل $f(x)$ قريبة من L بقدر مانشاء وذلك باعطاء x قيماص قريبة من a من اليسار بصورة مناسبة . فاذا اردنا اعطاء صيغة رياضية لهذا الفهم العام فهذا سيكون على النحو التالي :

(1) اذا حددنا أي معيار للقرب من L مثل $\in > 0$

(2) يمكننا تحديد جوار ايسر N_1 للعدد a مثلا $(a-h,a]$

حيث h عدد حقيقي موجب بحيث :

عندما

$x \in N_1/\{a\} \Rightarrow$ $f(x)$ تكون قريبة من L $\in$ حسب المعيار

$x \in N_1/\{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

ومنه نتوصل الى التعريف الاتي :

(5-2-1) تعريف

> اذا قلنا $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فهذا يعني $\forall \in > 0$
>
> يوجد جوار ايسر N_1 للنقطة (العدد) a
>
> $x \in N_1/\{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

يمكنك ان تلاحظ بانه لاثبات $\lim_{x \to 2} f(x) = L$ لابد من ايجاد الخطوات الاتية :

(1) حدود مجال الدالة .

(2) تأكد في ضوء تحديدك لمجال الدالة فيما اذا كانت F معرفة من يسار a بمعنى على الفترة :

$N/\{a\} = (a-h,a)$

لاحظ اننا لا نشترط ان الدالة معرفة عند a

(3) اختر $\in > 0$.

(4) ضع $|f(x) - L| < \in$

ثم باشر بحل المتابعة السابقة فاذا استطعت ان تحدد جوارا ايسر مثل N للعدد a بحيث عندما تكون : $x \in N/\{a\}$ فان: $|f(x) - L| < \in$ تكون صحيحة وبذلك تكون قد اثبت صحة المطلوب منك .

مثال / ليكن $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ حيث $x \neq 2$ أوجد $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ ؟

الحل / $f(x) = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}$ أوسع مجال للدالة $R/\{2\}$

$f(x) = x + 2$

نجد قيم $f(x)$ عندما $x \to 2$ من خلال الجدول التالي

x	1.9	1.99	1.999	...	2	...	2.0001	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999	...	4	...	4.0001	4.001	4.01	4.1

نلاحظ ان قيم $f(x)$ تقترب من العدد (4) عندما $x \to 2$

ويرمز لها $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$

مثال / ليكن $f(x) = 2x-1$ اثبت ان $\lim_{\Delta x \to 2} f(x) = 3$ ؟

الحل / الغاية حددت العدد المطلوب وهو 2

بأستخدام التعريف

(1) مجال $R = F$ (لانها دالة كثيرة الحدود)

(2) بما ان F معرفة عند R فهي معرفة في يسار العدد 2 (لوجود −) أي ان F معرفة على اية فترة مثل $[2-h, 2)$

(3) لتكن $\in > 0$

(4) $|f(x) - 3| < \in$

$|2x-1-3| < \in$

$|2x-4| < \in$

$-\in < 2x - 4 < \in$

$4-\in < 2x < 4+\in$

$\frac{4-\in}{2} < X < \frac{4+\in}{2}$

$2-\frac{\in}{2} < X < 2+\frac{\in}{2}$

وهذا يعني اذا كانت :

$X \in (2-\frac{\in}{2}, 2+\frac{\in}{2}) \Rightarrow |f(x)-3| < \in$ تكون صحيحة

فاذا اخترنا $(2-\frac{\in}{2}, 2+\frac{\in}{2}) \leq [2-\in, 2)$

فنجد انه اذا كانت : $X \in N/\{2\} \Rightarrow |f(x)-3| < \in$ تكون صحيحية

∴ الغاية المعطاة صحيحة .

وبنفس الطريقة غاية الدالة عندما $x \to a$ من اليمين

ممكن استنتاج التعريف الاتي :

اذا كان هناك متغير مثل (z) وثابت مثل k بحيث ان القيمة العددية للفرق بينهما (k–z) يمكن جعله اصغر من اية كمية صغيرة موجبة يمكن تصورها عند ذلك يقال ان k هي غاية z وتكتب lim z=k

(5-2-2) تعريف

اذا قلنا بأن $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فهذا يعني $\forall \in > 0$

يوجد جوار N للنقطة a $x \in N / \{a\} \Rightarrow |f(x) - L| < \in$

من الواضح بانه اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x) = L$ فان : $\lim_{x \xrightarrow{-} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{+} a} f(x) = L$

وهذا يعني ان :

(1) وجود الغاية عند النقطة a يؤدي الى وجود غاية من اليسار وغاية من اليمين عند a كلتاهما متساويتان .

(2) اذا وجدت غاية عند النقطة a من اليمين وغاية عند a من اليسار وكان ، $L_1 \neq L_2$ فان الغاية عند a ليست موجودة اولا تكون معرفة .

مثال / لتكن $f: R \to R$ ، $f(x) = 2x + 1$

ما قيمة f(x) عندما يقترب العدد (x) من العدد (2) قرباً كافياً ؟

الحل / الدالة مجالها R لانها كثيرة الحدود

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 2x + 1 = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$$

من اليمين $$\lim_{x \xrightarrow{+} 2} f(x) = 2x + 1 = 4 + 1 = 5 = L_1$$

من اليسار $$\lim_{x \xrightarrow{-} 2} f(x) = 2x + 1 = 4 + 1 = 5 = L_2$$

أي أن $L_1 = L_2$

∴ للدالة غاية من اليمين ومن اليسار

مثال / لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \forall x > 1 \\ x + 3 & \forall x < 1 \end{cases}$ **هل للدالة غاية عند الـ (1) ؟ بين ذلك ؟**

الحل /

$$\lim_{x \xrightarrow{+} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{+} 1} (x^2 + 1)$$

الغاية من اليمين

$$= 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2 = L_1$$

$$\lim_{x \xrightarrow{-} 1} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{-} 1} f(x)\ (x + 3)$$

الغاية من اليسار

$$= 1 + 3 = 4 = L_2$$

الغاية غير موجودة لان $L_1 \neq L_2$

$\therefore$ ليست للدالة غاية عند الـ(1)

[3-5] بعض مبرهنات الغاية

مبرهنة (1)

اذا كان N جوار للعد a وكانت الدالة معرفة $\forall X \in N / \{a\}$
وكانت $f(x) = C$ حيث $C \in R$ ، ثابت فان $\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = C}$

مثلاً /

$f(x) = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to ^-1} f(x) = \lim_{x \to ^-1} \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$f(x) = \sqrt{5}$

$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \sqrt{5} = \sqrt{5}$

مبرهنة (2)

اذا كان N جوار للعد a وكانت الدالة $f(x) = x$ فان $\lim_{x \to a} = a$

مثلاً / $\lim_{x \to 3} x = 3$ ، $\lim_{x \to 2} x = 2$

مبرهنة (3)

اذا كانت $\lim_{x \to a} f(x)$ موجودة ، $\lim_{x \to a} g(x)$ موجودة فان :

* $\lim_{x \to a} [\ f(x) \pm g(x)\ ] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
* $\lim_{x \to a} [\ C f(x)\ ] = C \lim_{x \to a} f(x)$
* $\lim_{x \to a} [\ f(x).g(x)\ ] = \lim_{x \to a} f(x). \lim_{x \to a} g(x)$
* $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$, $\left[\lim_{x \to a} g(x) \neq 0\right]$

أمثلة /

مثال 1/ $\lim_{x\to3}(x+2)=\lim_{x\to3}x+\lim_{x\to3}2=3+2=5$

مثال2/ (a) $\lim_{x\to a}x^2=\lim_{x\to a}x.\lim_{x\to a}x=a.a=a^2$

وقياساً على ذلك فانه يمكننا التوصل الى : $\boxed{\lim_{x\to a}(x)^n=a^n,\forall n\in z^+}$

فمثلاً / $\lim_{x\to2}x^3=(2)^3=8$

(b) $\lim_{x\to2}(x+3)^3=\left[\lim_{x\to2}(x+3)\right]^3$

$=\left[\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}3\right]^3$

$=[2+3]^3=125$

مثال3/ $\lim_{x\to-1}(x^2+3x)=\lim_{x\to-1}x^2+\lim_{x\to-1}3x$

$=(-1)^2+3(-1)$

$=1-3=-2$

مثال4/ $\lim_{x\to-2}\frac{2x^2-4}{x-1}=\frac{\lim_{x\to-2}(2x^2-4)}{\lim_{x\to-2}(x-1)}$

$=\frac{2(-2)^2-4}{-2-1}=\frac{8-4}{-3}=\frac{-4}{3}$

مثال5 / لتكن $x\neq1$, $f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}$ جد ان امكن $\lim_{x\to1}f(x)$

الحل/

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{x-1}=1 & ,x\geq1\\ \frac{-\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}}=-1 & ,x<1\end{cases}$$

$\lim_{x\xrightarrow{+}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{+}1}1=1=L_1$ الغاية من اليمين

$\lim_{x\xrightarrow{-}1}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{-}1}-1=-1=L_2$ الغاية من اليسار

الغاية غير موجودة لان $L_1\neq L_2$ ∴

مثال6 / لتكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & , x \geq 1 \\ 5x & , x < 1 \end{cases}$$

جد $\lim_{x \to 1} f(x)$ (2) $\lim_{x \to 2} f(x)$ (1)

الحل/

(1) $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 4) = 4 + 4 = 8$

(2) $\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to 1} (x^2 + 4) = 1 + 4 = 5 = L_1 \\ \lim_{x \to 1} 5x = 5 \times 1 = 5 = L_2 \end{cases}$

$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$ الغاية موجودة

مثال7 / جد $\lim_{x \to a} \frac{X^3 - a^3}{X - a}$

الحل/

$$\lim_{x \to a} \frac{X^3 - a^3}{X - a} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x - a)}(x^2 + ax + a^2)}{\cancel{(x - a)}}$$

$$= \lim_{x \to a} x^2 + ax + a^2$$

$$= a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

مثال8 / جد $\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{(X - a)}$

الحل/

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{(X - a)} = \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{X} - \sqrt{a}}{(X - a)} \times \frac{\sqrt{X} + \sqrt{a}}{\sqrt{X} + \sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x - a)}{(x - a)(\sqrt{x} + \sqrt{a})} = \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

مثال9/ لتكن $f(x) = \begin{cases} bx^2 + 3 & , \forall x \leq 2 \text{ اذا كانت} \\ C - 2x & , \forall x > 2 \text{ اذا كانت} \end{cases}$ اذا كانت $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$

جد قيمة c , b حيث $\forall b, c \in R$

الحل / $\lim_{x \to 2} f(x) = 11$ $\therefore$ الغاية موجودة لانها تساوي عدد (11)

$$\underset{\text{الغاية من اليسار}}{\lim_{x \to 2^-} f(x)} = \underset{\text{الغاية من اليمين}}{\lim_{x \to 2^+} f(x)} = 11$$

$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (C - 2x) = C - 2 \times 2 = C - 4 = 11 \rightarrow C = 15$

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (bx^2 + 3) = 2^2 b + 3 = 4b + 3$

$4b + 3 = 11 \rightarrow 4b = 11 - 3$

$$b = \frac{8}{4} \rightarrow b = 2$$

[4-5] غاية الدوال الدائرية Limit of Circular Function

لقد تعلمت ان الدوال الكثيرة الحدود مستمرة عند اية نقطة من نقاط مجالها . في هذا البند سنتناول دراسة غايات ومشتقات الدوال الدائرية ونبدأ بايجاد $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

مبرهنة (1)

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$ حيث x بالقياس الدائري

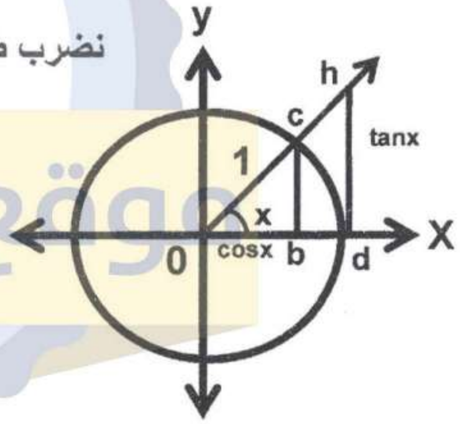
Radians (⌒ يعني طول القوس)

$Cb < \overset{\frown}{cd} < dh$

$\sin x < X < \tan x$

$\sin x < X < \frac{\sin x}{\cos x}$ نقلب الاعداد النسبية ويؤدي الى عكس علامات التراجح

$\frac{1}{\sin x} > \frac{\sin x}{x} > \frac{\cos x}{\sin x}$ نضرب طرفي المتراجحة في sinx



$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$

$\lim\limits_{x\to 0}1 > \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > \lim\limits_{x\to 0}\cos x$ $(\cos 0=1)$

$1 > \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} > 1$

$$\boxed{\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

مبرهنات غايات الدوال الدائرية

$(1)\ \lim\limits_{x\to 0}\sin x=0 \quad (3)\ \lim\limits_{x\to 0}\tan x=0 \quad (5)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}=1$

$(2)\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1 \quad (4)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad (6)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan ax}{ax}=1 \quad (7)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$

مثال1 / جد $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{3x}{4x}$

الحل / نضرب بسط ومقام الغاية × $\frac{3}{4}$

$$\lim_{x\to 0}\sin\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\sin\frac{3x}{3x}$$

$$=\frac{3}{4}\times 1=\frac{3}{4}$$

مثال2/ جد $\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{x\tan 2x}$

الحل /

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 4x}{x\tan 2x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{x\tan 2x}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin^2 4x}{x^2}}{\frac{\tan 2x}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin 4x}{x}\times\frac{\sin 4x}{x}}{\frac{\tan 2x}{x}}=\frac{4\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}\times4\lim_{x\to0}\frac{\sin 4x}{4x}}{2\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x}{2x}}=\frac{4\times1\times4\times1}{2\times1}=8$$

مثال 3/ جد $\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x+\tan 3x}{\sin 5x}$

الحل / بقسمة البسط والمقام على (x)

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x+\tan 3x}{\sin 5x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan 4x}{x}+\frac{\tan 3x}{x}}{\frac{\sin 5x}{x}}$$

$$=\frac{4\lim_{x\to0}\frac{\tan 4x}{4x}+3\lim_{x\to0}\frac{\tan 3x}{3x}}{5\lim_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x}}=\frac{(4\times1)+(3\times1)}{(5\times1)}=\frac{4+3}{5}=\frac{7}{5}$$

مثال 4/ جد $\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$

الحل /

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1-\sqrt{\cos 2x}}{x^2}\times\frac{1+\sqrt{\cos 2x}}{1+\sqrt{\cos 2x}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}=\frac{2\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\right)}{\frac{\cancel{x^2}\lim_{x\to0}\left(1+\sqrt{\cos 2x}\right)}{\cancel{x^2}}}=\frac{2(1\times1)}{(1+1)}=\frac{2}{2}=1$$

حلول تمارين (5-1)

(1) جد الغاية لكل مما ياتي :

$$\text{(a)} \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - x - 6)}{(x - 3)}$$

الحل / التعويض المباشر يجعل المقام = صفر

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+2)}{\cancel{(x-3)}} = \lim_{x \to 3} x + 2 = 3 + 2 = 5$$

$$\text{(b)} \lim_{x \to 1} (3x - 4) = 3 \times 1 - 4 = -1$$

$$\text{(c)} \lim_{x \to 1} \frac{(x^3-1)}{(2x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{2\cancel{(x-1)}} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^2+x+1)}{2}$$

$$= \frac{1^2+1+1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$\text{(d)} \lim_{x \to 4} \frac{x^2-16}{\sqrt{x+5}-3}, \{x : x \geq -5\} / \{4\}$$

الحل / المقام يؤول الى الصفر عند التعويض المباشر لان $x \to 4$ وعليه نقوم بضرب الكسر في مرافق المقام لان الكسر يحتوي على جذر

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x+5} - 3} \times \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3} = \lim_{x \to 4} \frac{(x^2 - 16)(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5-9)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)(\sqrt{x+5}+3)}{\cancel{(x-4)}} = (4+4)(\sqrt{x+5}+3)$$

$$= (8)(3+3) = (8) \times (6) = 48$$

$$\text{(e)} \lim_{x \to 3} \frac{(x^2 - 2x) - 3}{x^2 - 9}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{\cancel{(x-3)}(x+3)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x+1)}{(x+3)} = \frac{3+1}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$ (التحليل)

---

(2) اذا كان $F : R \to R$ جد $\lim_{x \to 1} F(x)$ حيث $F(x) = |x-1|$

الحل / $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{عندما } x \geq 1 \\ -(x-1) & \text{عندما } x < 1 \end{cases}$

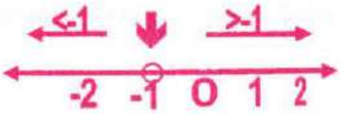
الغاية من اليمين $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} x - 1 = 1-1 = 0 = L_1$

الغاية من اليسار $\lim_{x \to 1} F(x) = \lim_{x \to 1} -(1-1) = 0 = L_2$

$\therefore$ الغاية موجودة لان L1=L2

(3) اذا كان $F : R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & x > -1 \text{ اذا كانت} \\ x^2 + 3 & x < -1 \text{ اذا كانت} \\ 4 & x = -1 \text{ اذا كانت} \end{cases}$$



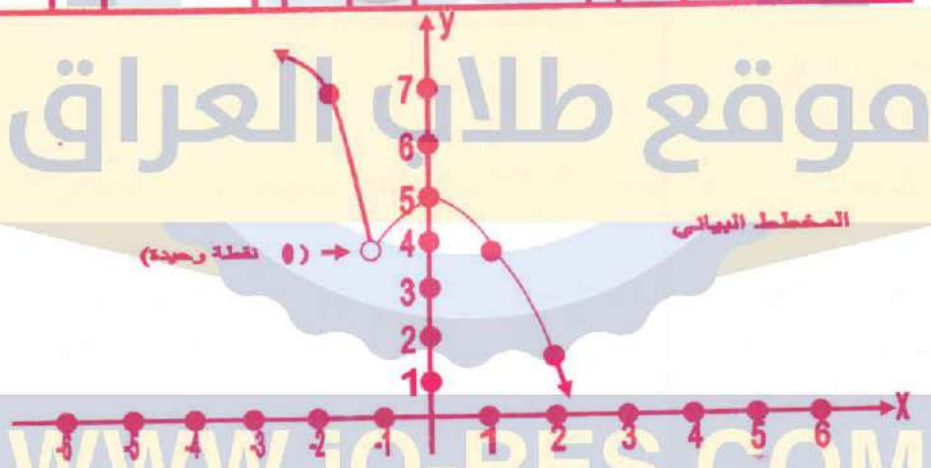
(أ) ارسم المخطط البياني لهذه الدالة .

(ب) هل للدالة غاية عند **1-** بين ذلك ؟

(جـ) جد $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}}$

الحل / أ/ المخطط البياني

$f(x) = 4$			$f(x) = x^2 + 3$			$f(x) = 5 - x^2$		
x	y	(x,y)	x	y	(x,y)	x	y	(x,y)
−1	4	(−1,4)	−1	4	فجوة (−1,4)	−1	4	فجوة (−1,4)
		نقطة وحيدة	−2	7	(−2,7)	0	5	(0,5)
			−3	12	(−3,12)	1	4	(1,4)
						2	1	(2,1)



ب/ الغاية من اليمين $\lim\limits_{x \to -1^+} 5 - x^2 = 5 - (-1)^2 = 5 - 1 = 4 = L_1$

الغاية من اليسار $\lim\limits_{x \to -1^-} x^2 + 3 = (-1)^2 + 3 = 1 + 3 = 4 = L_2$

(الغاية موجودة عند 1-) $L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 4$ (وحدانية الغاية)

جـ / $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} 5 - x^2 = 5 - (\sqrt{2})^2 = 5 - 2 = 3$

(4) اذا كانت
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + a & x > -1 \\ 6 & x = -1 \\ 4x + b & x < -1 \end{cases}$$

واذا كانت $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = 3$ جد قيمة $a , b \in R$

الحل / $\because$ $\lim\limits_{x \to -1} F_{(x)} = 3$ موجودة فان

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 3$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} x^2 + a \rightarrow (-1)^2 + a = 3 \rightarrow 1 + a = 3 \rightarrow a = 2$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} 4x + b \rightarrow 4(-1) + b = 3 \rightarrow -4 + b = 3 \rightarrow b = 7$

(5) اذا كان $g(x) = 3x^2 + 2x - 3$ ، $f(x) = x^2 + 6$

جد $\lim_{x \to 0} (g.f)(x)$ و $\lim_{x \to 0} (\frac{g}{f})(x)$

الحل /

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\lim_{x \to 0}(3x^2 + 2x - 3)}{\lim_{x \to 0}(x^2 + 6)} = \frac{3(0)^2 + 2(0) - 3}{(0)^2 + 6} = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) \cdot f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) \cdot \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}(3x^2 + 2x - 3) \cdot \lim_{x \to 0}(x^2 + 6)$$

$$= -3 \times 6 = -18$$

---

(6) جد الغاية لكل مماياتي :

$$(a) \lim_{x \to 0} \frac{\tan x^2}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x \to 0}(\cos x)^2} = \frac{1}{1^2} = \frac{1}{1} = 1$$

طرقة ثانية / $$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{\tan^2 x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\tan x}{x}}{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \frac{\tan x}{x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x}}$$

$$= \frac{\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{x}}{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 \times 1}{1 \times 1} = 1$$

$$(b) \lim_{x \to 0} (\sin 2x + \frac{\tan 4x}{6x})$$

الحل /

$$= \lim_{x \to 0} (2\sin x \cos x + \frac{\tan 4x}{6x})$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \cos x + \lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{6x}$$

$$= 2\lim_{x \to 0} \sin x \cdot \lim_{x \to 0} \cos x + \frac{4}{6} \lim_{x \to 0} \frac{\tan 4x}{4x}$$

$$= 2 \times 0 \times 1 + \frac{4}{6} \times 1 = \frac{4}{6}$$

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(1+\cos x)}{x^2}}$$

$$=\frac{(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x})^2}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)}=\frac{1^2}{1+1}=\frac{1}{2}$$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{3x}{\sin 2x}+\frac{1-\cos 6x}{\sin^2 x}\right]$

الحل / $1-\cos 6x = 1-(1-2\sin^2 3x)$

$$=1-1+2\sin^2 3x$$

$$=2\sin^2 3x$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 2x}+\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}+2\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x}$$

نضرب بسط الغاية $\times\frac{9}{9}$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}}+2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 3x}{x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{1}{1}+9\cdot 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 3x}{9x^2}}{\frac{\sin^2 x}{x^2}}$$

$$=\frac{3}{2}+18\lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\sin 3x}{3x}\right]^2}{\left[\frac{\sin x}{x}\right]^2}=\frac{3}{2}+18\cdot\frac{1}{1}=\frac{3}{2}+18$$

$$=\frac{3+36}{2}=\frac{39}{2}$$

[5-4] الاستمرارية Continuity

تكون الدالة مستمرة عند x=b اذا حققت الشروط التالية :

(1) f(b) معرفة　　(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة　　(3) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(b)$

تعريف :يقال للدالة F ... ة اذا كانت مستمرة في جميع عناصر مجالها

مثال1/ اذا كانت x^2 ... $f(x)=8$ إثبت ان الدالة مستمرة ؟

الحل / مجال R لانها كثيرة الحدود

معرفة $\forall b \in R$

موجودة $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \lim\limits_{x\to b}(8 - x^3 - 2x^2)$

$= 8 - b^3 - 2b^2$

$f(b) = 8 - b^3 - 2b^2$

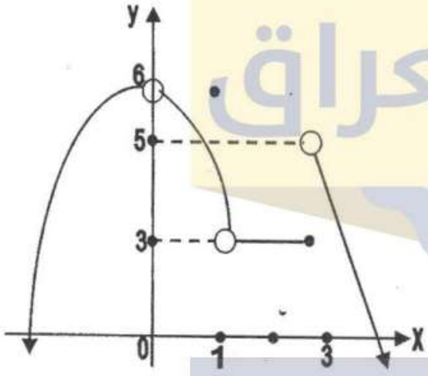
المساواة $\therefore \lim\limits_{x\to b} f(x) = f(b)$

∴ الدالة مستمرة عند x=b ولان b تمثل كل عنصر من عناصر المجال

فان f(x) مستمرة $\forall x \in R$

∴ f(x) مستمرة

مثال2/ نلاحظ من الشكل المجاور :



(1) الدالة غير معرفة عند x=0 لوجود ○ فجوة عند y=6

⇐ الدالة غير مستمرة عند النقطة (0,6) ، x=0

(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 3$ و $f(x) = 6$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$

∴ الدالة غير مستمرة عند x=1

(3) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

∴ الدالة غير مستمرة عند x=3 لوجود طفرة او قفزة

(5-4-1) تعريف

يقال للدالة F مستمرة عن يسار b اذا كانت معرفة عن يسار b ، اذا حققت : $\lim\limits_{x\to b^-} f(x) = f(x)$

(5-4-2) تعريف

يقال للدالة F مستمرة عن يمين b اذا كانت معرفة عن يمين b ، اذا حققت : $\lim\limits_{x\to b^+} f(x) = f(b)$

(5-4-3) تعريف

يقال للدالة F مستمرة على الفترة المغلقة [a,b] اذا حققت مايأتي :

(1) الدالة مستمرة على الفترة المفتوحة (a,b) .

(2) الدالة مستمرة عن يمين a وعن يسار b .

مثال3/ $F:R\to R$ $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & , x\geq 2 \\ 8-x & , x<2 \end{cases}$ إثبت ان الدالة مستمرة على R

الحل /

(1) نثبت ان الدالة مستمرة عند x=2

$$f(2) = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{+}2}(x^2+2)=4+2=6=L_1 \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{-}2}(8-x)=8-2=6=L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$

$$\therefore \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$$

∴ F مستمرة عند x=2

(2) $\forall a > 2$ معرفة $f(x) = a^2 + 2$

موجودة $\lim\limits_{x\xrightarrow{+}a} f(x) = \lim\limits_{x\xrightarrow{+}a}(x^2+2) = a^2+2$

$$\lim_{x\xrightarrow{+}a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند x=a

∴ الدالة مستمرة $\forall x > 2$

(3) $\forall a < 2$

$$f(a) = 8 - a$$

$$\lim_{x\xrightarrow{-}a} f(x) = \lim_{x\xrightarrow{-}a}(8-x) = 8-a$$

$$\lim_{x\xrightarrow{-}a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند x=a

∴ الدالة مستمرة عند $\forall x < 2$

الدالة مستمرة عند x=2 ، وعند x>2 ، وعند x<2 ∴ الدالة مستمرة في R

حلول تمارين (2-5)

(1) $F: R \to R$

$$f(x) = \begin{cases} 6 - x^2 & , x \geq 1 \\ 4x + 1 & , x < 1 \end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x = 1$ ، $x = -1$ ؟

الحل /

$$f(1) = 6 - x^2 = 6 - 1^2 = 6 - 1 = 5$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} (6 - x^2) = 6 - 1 = 5 = L_1 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} (4x + 1) = 4 + 1 = 5 = L_2 \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 1} f(x) = 5$$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ ∴ الدالة مستمرة عند $(x = 1)$

بحث الاستمرارية عند $x=-1$

$$f(-1) = 4x + 1$$

$$= 4(-1) + 1$$

$$= -4 + 1 = -3$$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} (4x + 1) = (4(-1) + 1) = -3$$

$\therefore f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) \rightarrow$ F مستمرة عند $x = -1$

---

(2) $F: R \to R$ $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2} & , x \neq 2 \\ 3 & , x = 2 \end{cases}$ ابحث استمرارية الدالة على R

الحل / اوسع مجال للدالة $= R$ ، معرف $f(2) = 3$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x - 2)}(x + 2)}{\cancel{(x - 2)}}$$

$$= \lim_{x \to 2} (x+2) = 2 + 2 = 4$$

$$f(2) \neq \lim_{x \to 2} f(x)$$

∴ F غير مستمرة عند $x=2$

∴ الدالة غير مستمرة على R

---

(3) اذا كان $F:R \to R$ ، حيث $f(x) = |2x - 6|$ ، ابحث استمرارية الدالة على R

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & , x \geq 3 \\ 6 - 2x & , x < 3 \end{cases}$$

الحل /

(1) نثبت ان الدالة مستمرة عند $x = 3$

$$f(3) = (2 \times 3) - 6 = 6 - 6 = 0$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \xrightarrow{+} 3} (2x-6) = 6-6 = 0 = L_1 & \text{الغاية من اليمين} \\ \lim_{x \xrightarrow{-} 3} (6-2x) = 6-6 = 0 = L_2 & \text{الغاية من اليسار} \end{cases}$$

$$\therefore L_1 = L_2 \Leftrightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = f(3)$$

∴ F مستمرة عند $x=3$

---

(2) $\forall a > 3$ معرفة $f(x) = 2a - 6$

موجودة $\lim_{x \xrightarrow{+} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{+} a} (2x - 6) = 2a - 6$

$$\lim_{x \xrightarrow{+} a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند $x=a$

∴ الدالة مستمرة $\forall x > 3$

(3) $\forall a < 3$

$$f(a) = 6 - 2a$$

$$\lim_{x \xrightarrow{-} a} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{-} a} (6-2x) = 6 - 2a$$

$$\lim_{x \xrightarrow{-} a} f(x) = f(a)$$

∴ الدالة مستمرة عند $x=a$

∴ الدالة مستمرة عند $\forall x < 3$

الدالة مستمرة عند $x = 3$ ، وعند $x > 3$ ، وعند $x < 3$

∴ **الدالة مستمرة في R**

---

(4) $$f(x)=\begin{cases}5-x^2 & x<\sqrt{2}\\ x^2+1 & x>\sqrt{2}\\ 4 & x=\sqrt{2}\end{cases}$$

ابحث استمرارية الدالة عند $x=-1$ ، $x=\sqrt{2}$

الحل /

* بحث الاستمرارية عند $(x=-1)$

$f(x)=5-x^2$

$f(-1)=5-(-1)^2$

$=5-1$

$=4$

$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}(5-x^2)$

$=5-(-1)^2$

$=5-1$

$=4$

$\therefore F_{(-1)}=\lim_{x\to-1}F_{(x)} \rightarrow$ F مستمرة عند $x=-1$

* بحث الاستمرارية عند $(x=\sqrt{2})$

بالتعريف $f(\sqrt{2})=4$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\xrightarrow{+}\sqrt{2}} x^2+1\ ,\ x>\sqrt{2}\\ \lim\limits_{x\xrightarrow{-}\sqrt{2}} 5-x^2\ ,\ x<\sqrt{2}\end{cases}=\begin{cases}(\sqrt{2})^2+1=3 & \text{الغاية من اليمين}\\ 5-(\sqrt{2})^2=3 & \text{الغاية من اليسار}\end{cases}$$

$\therefore F_{(\sqrt{2})}\neq\lim_{x\to\sqrt{2}}F_{(\sqrt{2})}$

$\therefore$ F غير مستمرة عند $x=\sqrt{2}$

(5) لتكن $F_{(x)}=\frac{x}{x^2-9}$ ابحث استمراية الدالة عند $x=3$, $x=-3$, $x=1$

نجد اوسع مجال للدالة الكسرية $F_{(x)}=\frac{x}{x^2-9}$ حيث ، $x^2-9=0 \rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\mp 3$

اذن اوسع مجال للدالة الكسرية هو $R / \{-3, 3\}$

∴ الدالة غير مستمرة عند $(x=3)$ و $(x=-3)$

بحث الاستمرارية عند $x=1$

$$f(x)=\frac{x}{x^2-9}$$

$$f(1)=\frac{1}{1^2-9}=\frac{1}{1-9}=\frac{1}{-8}=-\frac{1}{8}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-9}$$

$$=\frac{1}{1^2-9}=\frac{1}{1-9}=-\frac{1}{8}$$

$\therefore f(x)=\lim_{x\to 1} f(x) \rightarrow$ الدالة مستمرة عند $(x=1)$

(6) $f(x)=\begin{cases} 2a+x^2 & , x\geq 1 \\ 2x+b & , x<1 \end{cases}$

اذا كانت الدالة مستمرة عند $x=1$ و $f(-1)=5$ جد قيمة $a, b \in R$

الحل معطى $f(-1)=5$

$$f(x)=2x+b$$
$$f(-1)=2(-1)+b$$
$$f(-1)=-2+b$$
$$f(-1)=b-2$$

$\therefore b-2=5$

$b=5+2$

$b=7$

∵ الدالة مستمرة عند $x=1$. $\therefore L_1=L_2$

$$L_1=\lim_{x\xrightarrow{+}1}(2a+x^2)=2a+1^2=2a+1$$
$$L_2=\lim_{x\xrightarrow{-}1}(2x+b)=2\times 1+b=2+b=2+7=9$$

$$\therefore 2a+1=9 \rightarrow 2a=9-1 \rightarrow 2a=8 \rightarrow a=\frac{8}{2}=4$$

$\boxed{b=7}$ $\boxed{a=4}$

الفصل السادس

المشتقات The Derivatives

المشتقة The Derivative

لقد نشأ هذا المفهوم من مسألتين شغلتا بالرياضيين في القرن السابع عشر . واولى هاتين المسألتين هندسية تتعلق بالمماس لمنحني عند نقطة عليه

اما الثانية فهي فيزيائية وتتعلق بحركة جسم في خط مستقيم ،

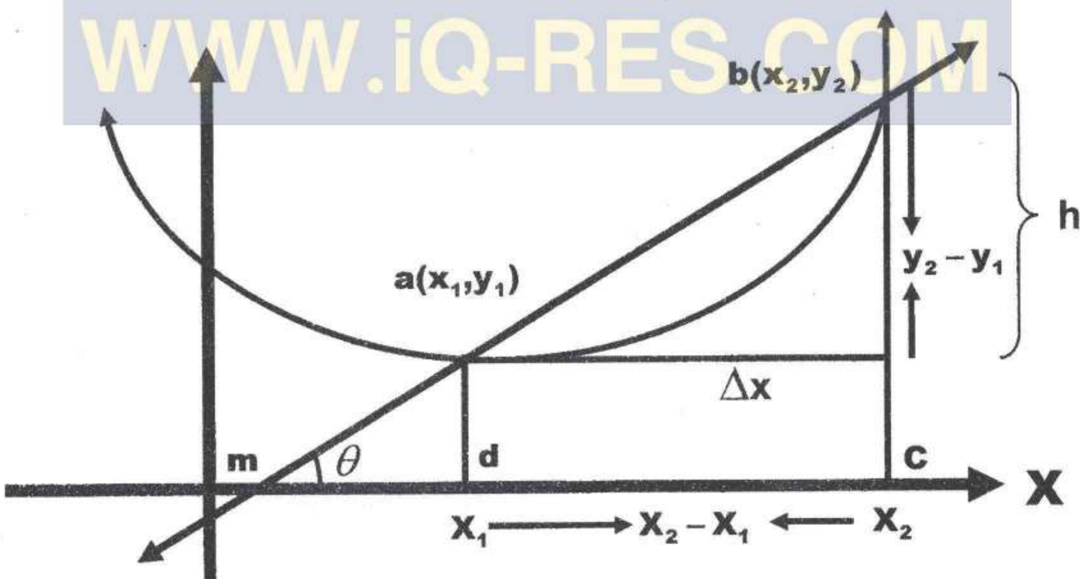
ولذلك سنبدأ بتوضيح هاتين المسألتين كمقدمة لمفهوم المشتقة .

❖ إن الفيلسوف والرياضي الالماني ليبنتز نشر في سنة 1684 اول بحث في حساب التفاضل والتكامل وتطرق فيه الى مفهوم مشتقة الدالة ، وقد عرفها بميل المستقيم المماس الى منحني الدالة عند نقطة عليه (غير الموازي لمحور السينات)

[1-6] المسالة الهندسية (التفسير الهندسي للمشتقة)

ايجاد ميل المماس لمنحني دالة عند نقطة عليه

لتكن $a\ (x_1,y_1)$ ، $b\ (x_2,y_2)$ من نقط الدالة f وليكن $\overleftrightarrow{ab}$ قاطعاً لمنحني الدالة في (a) و (b) ab يصنع زاوية قياسها θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات



$\overleftrightarrow{ab}$ ميل $= M = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

في △ abn القائم في n

$cd = an$

$m\angle ban = m\angle bmc$

$\therefore \tan\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$\Delta x = x_2 - x_1 = an$

$\Delta y = y_2 - y_1 = bn$

$x_2 = x_1 + \Delta x$

$y_2 = f(x_2) = f(x_1 + \Delta x) \quad , \quad y_1 = f(x_1)$

$$\overleftrightarrow{ab} \text{ ميل } \tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

اذا تصورنا بان نقطة b تتحرك على المنحني نزولاً باتجاه a فانها تأخذ بالاقتراب قرباً كافياً من النقطة a حتى تكاد تنطبق عليها (أي تكون b هي a) وان x_1 تقترب من x_2 حتى تكاد تنطبق عليها ، وهذا يعني ان Δx تقترب من عدد صغير جداً جداً حتى تقترب من الصفر (وكذلك الحال بالنسبة للفرق Δy) وهذا يعني ان $\Delta x \to 0$ (تؤول الى الصفر) .

في هذه الحالة يقترب الوتر ab من المماس للمنحني عند النقطة a

فيقال لمثل هذه الحالة بانها الغاية للدالة $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$ عندما $\Delta x \to 0$

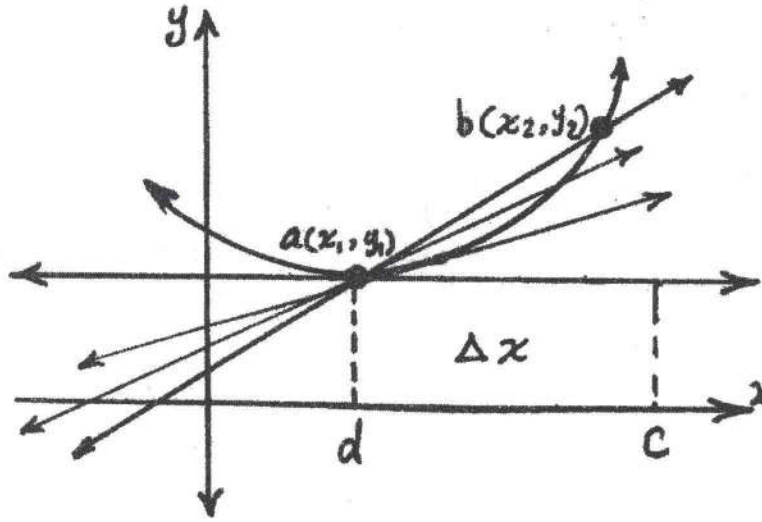
او بتعبير رياضي

$\boxed{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$ ان هذه الغاية تمثل المشتقة عند النقطة (x_1, y_1) وهي تساوي ميل المماس عند هذه النقطة ويعبر عنها بأحدى التعابير الاتية :

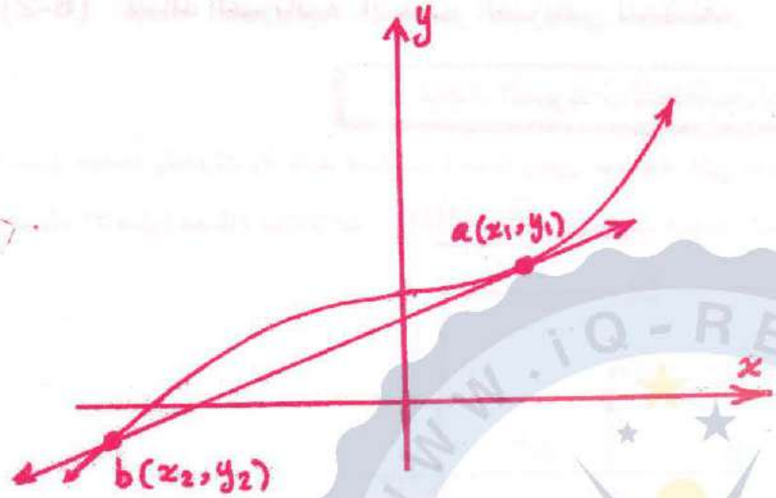
$$\boxed{f'(x_1) = y' = \frac{dy}{dx}}$$

يصح لنا القول ان المشتقة عند نقطة التماس تساوي ميل المماس عندها

ملاحظة /
التماس في المنحنيات يختلف عن مفهوم التماس في الدوائر



تعريف /



$$a = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

ميل المماس عند (a)

Slop tangent at (a)

مثال 1/ اذا كان $f(x) = x^2+5x+3$ ، جد $f'(2)$ مستخدماً التعريف

الحل /

$$f'(2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 + 5(2 + \Delta x) + 3 - 17}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x(\Delta x)^2 + 10 + 5\Delta x - 14}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{9\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(9 + \Delta x)}{\Delta x} = 9$$

مثال 2/ اذا كانت $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، حيث $x \geq -3$ جد $f'(1)$ باستخدام التعريف

الحل /

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{1 + \Delta x + 3} - 2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{4 + \Delta x} - 2}{\Delta x} \times \frac{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}{\sqrt{4 + \Delta x} + 2}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + \Delta x - 4}{\Delta x(\sqrt{4 + \Delta x} + 2)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

مثال 3/ اذا كانت $f(x) = \frac{3}{x}$ حيث $x \neq 0$ ، جد $f'(x)$ باستخدام التعريف

الحل /

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x + \Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3x - 3(x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{3x - 3x - 3\Delta x}{x(x + \Delta x)} \times \frac{1}{\Delta x} \right) = \frac{-3}{x(x + 0)} = \frac{-3}{x^2}$$

[6-2] المسألة الفيزيائية (التفسير الفيزيائي للمشتقة)

ايجاد السرعة اللحظية لجسم متحرك

اعتبر جسماً يتحرك في خط مستقيم بحيث يكون موضعه على بعد S بعد (t) ثانية بدأ من نقطة الشروع (نقطة الاصل) معطاة بالعلاقة : $\boxed{S = f(t)}$ والمطلوب ايجاد السرعة اللحظية (الانية) للجسم عند نقطة مثل A

نفرض ان الجسم وصل الى النقطة A الواقعة على بعد (S_1) من النقطة (0) في زمن قدره t_1 وانه وصل الى النقطة B بعد ان اصبح على بعد S_2 من النقطة (0) في زمن قدره $t_1 + \Delta t$

$$\therefore S_1 = f(t_1)$$
$$S_2 = f(t_1 + \Delta t)$$

متوسط التغير في المسافة في الفترة الزمنية Δt هو : $\boxed{\dfrac{S_2 - S_1}{\Delta t} = \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}}$

وهذا يمثل السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية Δt ، فاذا كانت هذه الفترة صغيرة جداً فان النقطة B تكون قريبة جداً من النقطة A وتكاد تنطبق عليها ، وعندما $\Delta t \to 0$ ، تكون غاية هذه الدالة هي السرعة اللحظية (الانية) للجسم عند A :

تعريف / السرعة اللحظية عند t_1 هي $V(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(t_1 + \Delta t) - f(t_1)}{\Delta t}$

مثال 1/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $S = p(t) = 3t^2 + 5t + 8$

حيث p(t) الازاحة بالامتار والزمن t بالثواني ، جد سرعة الجسم الانية باستخدام التعريف

الحل /

$$p'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3(t + \Delta t)^2 + 5(t + \Delta t) + 8 - (3t^2 + 5t + 8)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{3t^2 + 6t\,\Delta t + 3(\Delta t)^2 + 5t + \Delta t + 8 - 3t^2 - 5t - 8}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(5t + 3\Delta t + 5)}{\Delta t} \quad 6t + 5$$ السرعة الانية م/ثا

مثال 2/ لتكن $v(t)$ سرعة جسم بالامتار على الثواني حيث ، $v(t) = 3t^2 - 12t + 50$

جد : (1) سرعة الجسم في نهاية 3 ثواني الاولى من بدأ الحركة .

(2) جد السرعة عندما التعجيل = صفر

الحل /

(1)
$$v(3) = 3(3)^2 - 12(3) + 50$$
$$= 27 - 36 + 50 = 41\ m/s$$
∴ السرعة في نهاية 3 ثواني الاولى

(2)
$$v'(t) = 6t - 12$$
$$6t - 12 = 0$$
$$6t = 12$$
$$t = 2$$ ثانية
$$v(2) = 3(2)^2 - 12 + 50$$
$$= 12 - 24 + 50$$
$$= 38$$
السرعة عندما التعجيل = صفر

مثال اضافي 3/ اذا كان $S = f(t) = t^2 + 5t$ هو قانون حركة جسم في خط مستقيم حيث S ازاحته ، t الزمن فجد سرعته اللحظية عندما $t = 3$ ؟

الحل / نرمز للسرعة في اللحظة t بالرمز $V(t)$.

$$\therefore V(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \qquad (t=3)$$

$$\therefore V(3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[(3+\Delta t)^2 + 5(3+\Delta t)\right] - \left[3^2 + 5 \times 3\right]}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\left[9 + 6\Delta t + (\Delta t)^2 + 15 + 5\Delta t\right] - 9 - 15}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cancel{9} + 6\Delta t + (\Delta t)^2 + \cancel{15} + 5\Delta t - \cancel{9} - \cancel{15}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(6 + 5 + \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 11 + \Delta t$$

$V(3) = 11$ وحدة سرعة

∴ السرعة في نهاية الثانية الثالثة (3) تكون مساوية الى 11 وحدة سرعة .

ملاحظة

> يقال للدالة انها قابلة للاشتقاق عند x_1 اذا امكن ايجاد $f'(x_1)$ حيث يمكن القول اذا وجد مماس وحيد للمنحني عند $x=x_1$ فان الدالة تكون قابلة للاشتقاق عند $x=x_1$.
> وتكون الدالة قابلة للاشتقاق اذا كانت قابلة للاشتقاق من جميع عناصر مجالها .

يمكن ان يصاغ التعريف

قابلية الاشتقاق عند $X_1 \in (a,b)$ اذا تحقق الشرطان الاتيان :

(1) الدالة مستمرة في $[a,b]$

(2) موجودة $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$

ملاحظة/

معنى قابلة للاشتقاق في نقطة

هو امكانية رسم مماس وحيد للدالة عند تلك النقطة شرط ان تكون الدالة مستمرة عند تلك النقطة.

يمكن معرفة قابلية الاشتقاق من التمثيل البياني لبيان الدالة (الازواج المرتبة) وكما في الاشكال الاتية :

الشكل (a) الشكل (b) الشكل (c) الشكل (d)

في الاشكال الاربعة اعلاه :

(1) الدالة قابلة للاشتقاق لانها مستمرة ولاتحوي حافات حادة واي مماس يرسم للمنحني في اية نقطة لا يوازي محور الصادات .

(2) الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لوجود حافة حادة .

(3) الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لان المماس عند $X=0$ رغم انه وحيد لكنه يوازي محور الصادات فلا ميل له (∞) .

(4) الدالة غير قابلة للاشتقاق عند الصفر لانها غير مستمرة عند $X = 0$

مثال 1/ لتكن $f:R \to R$ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3 & \text{اذا كانت } X \le 1 \\ 2x + 2 & \text{اذا كانت } X < 1 \end{cases}$

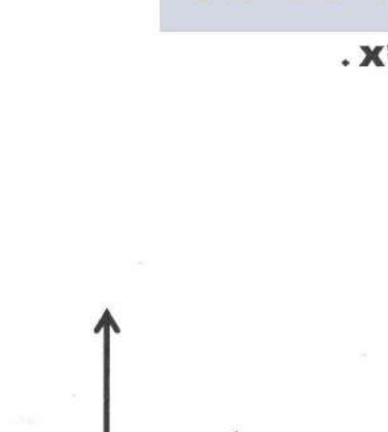
ارسم المخطط البياني للدالة f ، اثبت انها مستمرة عند x=1 .

هل الدالة f قابلة للاشتقاق بين ذلك (x=1)

الحل / (1) اولا

$x \le 1$ عندما $y = f(x)= x^2 + 3$		
x	y	(x,y)
1	4	(1,4)
0	3	(0,3)
−1	4	(−1,4)

$x > 1$ عندما $y = f(x)= 2x + 2$		
x	y	(x,y)
1	4	(1,4)
2	6	(2,6)



(2) ثانيا / بحث الاستمرارية

الان علينا ان نبرهن ان الدالة f مستمرة عند x=1

$\therefore\ f(1) = 1^2 + 3 = 4$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^-}(x^2+3) = 1^1 + 3 = 4 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^+}(2x+2) = 4 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore\ L_1 = L_2 \quad \lim_{x\to 1} f(x) = 4$ موجودة

$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ f مستمرة عند x=1

(3) ثالثا / الاشتقاق / الدالة معرفة عند x=1 وان f(1)=4

(a) عندما $x \xrightarrow{+} 0$

$f(x) = 2x + 2 > 1$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(1+\Delta x) + 2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2 + 2\Delta x + 2 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 = L_1$$

(b) عندما $x \xrightarrow{-} 0$

$f(x) = x^2 + 3 \leq 1$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + 3 - 4}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2+\Delta x)}{\Delta x} = 2 = L_2$$

$\therefore\ L_1 = L_2$ موجودة $f'(1)$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق عند x=1

(c) عندما x>1

$\forall a < 1$ (1)

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(a+\Delta x)^2 + 3 - (a^2+3)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 + 3 - a^2 - 3}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2a\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x(2a+\Delta x)}{\Delta x}$$

$f'(a) = 2a$

f قابلة للاشتقاق عند x=a

f قابلة للاشتقاق $\forall x<1$ ،

(او f قابلة للاشتقاق $\forall a<1$)

عندما x > 1

$\forall a > 1$ (2)

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2(a+\Delta x) + 2 - (2a+2)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2a + 2\Delta x + 2 - 2a - 2}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x}$$

$f'(a) = 2$

الدالة قابلة للاشتقاق عند x=a

الدالة قابلة للاشتقاق $\forall x>1$ (او الدالة قابلة للاشتقاق $\forall a>1$)

وبرهنا ان f قابلة للاشتقاق عند x=1 ، $\forall x<1$ ، $\forall x>1$

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق

مثال 2/ اذا كانت الدالة $f:R \to R$ حيث $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x \ge 2 \\ 4x-1 & x<2 \end{cases}$

(1) هل الدالة قابلة للاشتقاق عند x=2

(2) هل الدالة مستمرة عند x=2

الحل / $f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$

(a)

$$f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2+3-(4+3)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2+3-4-3}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}=4=L_1$$

(b)

$$f'(2)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(2+\Delta x)-1-(8-1)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{8+4\Delta x-1-7}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4\Delta x}{\Delta x}=4=L_2$$

$\because L_1=L_2$

$\therefore$ الدالة قابلة للاشتقاق عند x=2

$\therefore$ الدالة مستمرة عند x=2

لكن العكس غير صحيح كما في المثال الاتي:

مثال 3/ اذا كانت $f:R \to R$ حيث $F(x)=|x-3|$

(1) برهن على ان الدالة مستمرة عند x=3

(2) هل الدالة قابلة للاشتقاق عند x=3

الحل / (1) $f(x)=\begin{cases} x-3 & x \ge 3 \\ 3-x & x<3 \end{cases}$

$$f(x)=X-3$$

$$f(x)=3-3=0$$

$$\lim_{\Delta x \to 3} f(x)=\begin{cases} \lim_{\Delta x \xrightarrow{+} 3}(x-3)=3-3=0=L_1 \\ \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 3}(3-x)=3-3=0=L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1=L_2$

$\therefore \lim_{\Delta x \to 3} f(x)=0$ موجودة

$\therefore \lim_{\Delta x \to 3} f(x)=f(3)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند x=3

(2)

(a) $f'(3)=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{3+\Delta x-3-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x}=1=L_1$$

$$(b)\ f'(3) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3-(3+\Delta x)-0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3-3\Delta x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 = L_2$$

$$\therefore L_1 \neq L_2$$

∴ الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=3$

من المثالين السابقين يمكن استنتاج المبرهنة الاتية والتي سنقبلها بدون برهان :

مبرهنة / اذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند $x=a$ ، فان الدالة مستمرة عند $x=a$

الرموز المستخدمة في المشتقة :

لتكن

$$y=f(x)$$

المشتقة الاولى = $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(f(x))$

ميل المماس = $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

لمنحي الدالة عند أي نقطة (x,y) من نقطة .

قواعد المشتقة

القاعدة الاولى/ مشتقة الثابت= صفر لتكن $f(x)=c$ دالة ثابتة ، فان $f'(x)=0$ أي ان $\frac{dy}{dx}=0$

مثال 1/ جد $f'(x)$

$$f(x)=8 \rightarrow f'(x)=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{3})=0$$

$$f(x) = c \rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0$$

∴ مشتقة المقدار الثابت تساوي صفراً

$$\frac{d}{dx}(k)=0$$

القاعدة الثانية /

مشتقة القوى / نضرب الناتج في (n) ثم نطرح واحد من الاس الاصلي (n)

لتكن $f(x)=x^n$ **حيث** $n \in R, x \in R/\{0\}$ **فان** $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال 1/ ترجمة للقاعدة الثانية

(1)

f	x	X^2	X^3	X^4	....
f'	1	$2x$	$3x^2$	$4x^3$	....

(2)

$$f(x)=x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

(3)

$$g(n)=\sqrt[3]{n}$$
$$g(n)=n^{\frac{1}{3}}$$
$$g'(x)=\frac{1}{3}n^{-\frac{2}{3}}$$

اذا كانت كل من h,g,f دوال قابلة للاشتقاق عند x وكذلك $c \in R$ فأن :

القاعدة الثالثة /

$$f(x) = cg(x)$$
$$f'(x) = c\,g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة

يساوي حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة .

القاعدة الرابعة /

$$f(x) = g(x) \mp h(x)$$
$$f'(x) = g'(x) \mp h'(x)$$

مشتقة حاصل جمع (طرح) دالتين

يساوي حاصل جمع (طرح) مشتقتيهما

مثال 3/ جد $g'(x)$, $h'(x)$

(1)

$$g(x)=\frac{3}{2x^2}+\frac{5x^2}{3}-\frac{7x}{5}-\frac{1}{6}$$
$$g(x)=\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{5x^2}{3}-\frac{7x}{5}-\frac{1}{6}$$
$$g'(x)=(-2)\,\frac{3}{2}X^{-3}+\frac{(2)(5)}{3}X-\frac{7}{5}$$
$$g'(x)=-X^{-3}+\frac{10X}{3}-\frac{7}{5}$$

(2)

$$h(x)=10\left(\frac{x^2}{50}+\frac{x}{9}-\frac{1}{3}\right)$$
$$h'(x)=10\left(\frac{2x}{50}+\frac{1}{9}\right)$$
$$=10\left(\frac{x}{25}+\frac{1}{9}\right)$$

القاعدة الخامسة /

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$
$$f'(x) = g(x)\,h'(x) + h(x)\,g'(x)$$

مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الاولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الاولى

مثال 4/ جد ناتج مايلي : $y = \frac{1}{x}\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)$

الطريقة الاولى للحل/

$$'y = \frac{1}{x}\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{x^3} - 1 - \frac{1}{x^3}$$

$$= 1 - \frac{2}{x^3}$$

الطريقة الثانية / توزع الضرب (فك الاقواس)

$$y = x + \frac{1}{x^2}$$

$$y = x + x^{-2}$$

$$= 1 - \frac{2}{x^3}$$

القاعدة السادسة /

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad , h(x) \neq 0$$

$$'f(x) = \frac{h(x)\ 'g(x) - g(x)\ 'h(x)}{(h(x))^2}$$

مشتقة حاصل قسمة دالتين تساوي

المقام في مشتقة البسط – البسط × مشتقة المقام والكل مقسوماً على مربع المقام

مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

مثال 5/ باستخدام قاعدة القسمة جد $y = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}$

الحل /

$$'y = \frac{(t^2+1).2t - (t^2-1).2t}{(t^2+1)^2}$$

$$= \frac{2t^3 + 2t - 2t^3 + 2t}{(t^2+1)^2} = \frac{4t}{(t^2+1)^2}$$

القاعدة السابعة /

مشتقة دالة الدالة تساوي مشتقة دالة القوس

× مشتقة دالة ما بداخل القوس

اذا كان $u = g(x)$ فان $\boxed{'g(x) = \frac{du}{dx}}$

أي ان $\boxed{\frac{d}{dx}(u)^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}}$

مثال 6/ اذا كان $y = (1-x)^3$ **جد** $''y$, $'y$ **عند** $x=2$

الحل /

$$y = (1-x)^3$$

$$'y = 3(1-x)^2(-1)$$

$$'y = -3(1-x)^2$$

عند $x=2$

$$= -3(1-2)^2$$

$$= -3 \times (-1)^2 = -3$$

$$'y = -3(1-x)^2$$

$$''y = -3(2)(1-X)(-1)$$

عند $x=2$

$$= 3(2)(1-2)$$

$$= 6 \times -1 = -6$$

حلول تمارين (1-6)

(1)(أ) $y = 3x^2 + 4x + 2$ باستخدام التعريف جد $f'(x)$

الحل/ $y = f(1) = 3(1)^2 + 4(1) + 2 = 9$

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1+\Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

$$f'(1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(1+\Delta x)^2 + 4(1+\Delta x) + 2 - 9}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3(1 + \Delta x + (\Delta x)^2 + 4 + 4\Delta x - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 + 6\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x - 3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{10\Delta x + 3(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(10 + 3\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} 10 + 3\Delta x = 10$$

(ب) $g(x)=\sqrt{x}$ جد اوسع مجال الى الدالة ومشتقتها ؛ باستخدام التعريف

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{x} + \cancel{\Delta x} - \cancel{x}}{\cancel{\Delta x}(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$\therefore g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ميل المماس (مشتقة الدالة)

الاعداد السالبة غير معرفة في مجموعة الاعداد الحقيقية R الموجودة تحت الجذور ذات الدليل الزوجي

∴ مجال الدالة للاعداد الغير سالبة من R يعني $R^+ \cup \{0\}$

∴ أوسع مجال للدالة (domain of derivative) $= \{ x : x \geq 0 \}$

∴ أوسع مجال للدالة (domain of derivative) $= \{ x : x > 0 \}$

∴ مجال مشتقة الدالة هي الاعداد الموجبة من R يعني R^{++} لان الصفر في المقام يؤدي الى عدد غير معرف في مجموعة الاعداد الحقيقية

(جـ) $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ حيث $x \neq 1$ جد باستخدام التعريف $f'(2)$

الحل / الدالة معرفة عند x=2 $\therefore f(2)=\frac{2\times 2+1}{2-1}=\frac{5}{1}=5$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{2(2+\Delta x)+1}{2+\Delta x-1}-5}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x+1-5(1+\Delta x)}{\Delta x(1+\Delta x)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{4+2\Delta x+1-5-5\Delta x}{\Delta x(1+\Delta x)}$$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}(1+\Delta x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-3}{1+\Delta x}=\frac{-3}{1+0}=\frac{-3}{1}=-3$$

---

(2) ابحث استمرارية وقابلية الاشتقاق لكل من الدوال التالية عند قيم x التي أمامها :

(أ) اذا كان $f(x)=\begin{cases}x^2+1 & x\le 2\\ 7-x & x>2\end{cases}$ عند $X=2$

(a) بحث الاستمرارية عند x = 2

$f(x)=x^2+1\ ,\ f(2)=4+1=5$

$$\lim_{\Delta x\to 2}f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-}x^2+1 \rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 2^-}x^2+1=(2)^2+1=5=L_1 & \text{الغاية من اليسار}\\ \lim\limits_{x\to 2^+}7-x \rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 2^+}7-x=7-2=5=L_2 & \text{الغاية من اليمين}\end{cases}$$

$\therefore$ الغاية موجودة لان $L_1 = L_2$

$\therefore$ الدالة مستمرة عند $X = 2$ لان $\lim\limits_{\Delta x\to 2}f(x)=f(2)$

(b) بحث قابلية الاشتقاق عند x = 2

الدالة معرفة عند x=2 وان f(2)=5 ، نبحث وجود $f'(2)$

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}$$

at $\Delta x<0 \rightarrow 2+\Delta x<2$ ناخذ الدالة x^2+1

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{(2+\Delta x)^2+1-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{4+4\Delta x+(\Delta x)^2+1-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta x(4+\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}4+\Delta x=4=L_1$$

at $\Delta x>0 \rightarrow 2+\Delta x>2$ ناخذ الدالة 7-x

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{7-(2+\Delta x)-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{7-2-\Delta x-5}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1=L_2$$

$L_1 \neq L_2$ $\therefore$ الدالة غير قابلة للاشتقاق عند x=2

(ب) اذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -1 \\ -2x-1 & x < -1 \end{cases}$ عند $X = -1$

(a) البحث عن الاستمرارية عند $X = -1$

$$f(x)=x^2 \ , \ f(-1) = (-1)^2 = 1$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\xrightarrow{+}-1} x^2 & \to (-1)^2 = 1 = L_1 \text{ الغاية من اليمين} \\ \lim_{x\xrightarrow{-}-1} -2x-1 & \to -2(-1)-1 = 2 - 1 = 1 = L_2 \text{ الغاية من اليسار} \end{cases}$$

∴ الغاية موجودة لان $L_1 = L_2$

∴ الدالة مستمرة عند $X = -1$ لان $\lim_{x\to -1} f(x) = f(-1)$

(b) بحث قابلية الاشتقاق عند $X = -1$

الدالة معرفة عند $x = -1$ وان $f(-1)=1$ ، نبحث وجود $f'(-1)$

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(-1+\Delta x) - f(-1)}{\Delta x}$$

at $\Delta x<0$ → $-1 + \Delta x < -1$ ناخذ الدالة $-2x -1$

$$f'(-1)= \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}0} \frac{-2(-1+\Delta x)-1-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}0} \frac{2 - 2\Delta x - 2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}0} -2 = -2 = L_1$$

at $\Delta x>0$ → $-1 + \Delta x > -1$ ناخذ الدالة X^2

$$f'(-1) = \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}0} \frac{(-1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}0} \frac{1+(-2\Delta x) + (\Delta x)^2 - 1}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}0} \frac{(\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}0} \frac{\Delta x(\Delta x-2)}{\Delta x} = -2 = L_2$$

$L_1 = L_2$ ∴ الدالة قابلة للاشتقاق عند $x = -1$

---

(3) جد $a,b \in R$ اذا كان $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & x \geq 1 \\ ax+b & x < 1 \end{cases}$ اذا كانت قابلة الاشتقاق عند $X = 1$

الحل / ∵ f دالة قابلة للاشتقاق عند $x=1$ (معطى)

∴ f مستمر عند $x=1$ ومنها $L_1=L_2$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to^+ 1} 2x+5=2(1)+5=7$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to^- 1} ax+b=a(1)+b=a+b$$

$\therefore a+b=7$..................(1)

f قابلة للاشتقاق يعني

$$f'(1)= \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}1} \frac{2(1 + \Delta x) + 5 - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}1} \frac{2 + 2\Delta x + 5 - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\xrightarrow{+}1} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 = L_1$$

$$f'(1)= \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}1} \frac{a(1 + \Delta x) + b - 7}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\xrightarrow{-}1} \frac{a + a\Delta x + b - 7}{\Delta x}$$

نعوض (1) $a+b=7$..........(1)

$$= \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 1} \frac{7 + a\Delta x - 7}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 1} \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a = L_2$$

$\because L_1 = L_2$ (الدالة قابلة للاشتقاق) $\boxed{\therefore a=2}$

$a+b=7 \rightarrow 2+b=7 \rightarrow b=7-2 \rightarrow \boxed{b=5}$

(4) اذا كان $f : R \rightarrow R$ حيث $f(x) = |2x-6|$ هل الدالة قابلة للاشتقاق عند x=3

الحل /

نجد قيم x

$2x - 6 \geq 0$ | $-(2x-6) > 0$

$2x \geq 6$ | $2x - 6 \geq 0$

$x \geq 3$ | $-2x > -6$

$-x > -3$

تعكس علامة التراجح عند الضرب في سالب $x < 3$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 6 & x \geq 3 \\ 6 - 2x & x < 3 \end{cases}$$

نفحص قابلية الاشتقاق عند x=3 للدالة f

$f(x) = 2x - 6$ | $f(x) = 6 - 2x$

$f(3) = 2(3) - 6 = 0$ | $f(3) = 6 - 2(3) = 0$

الدالة f معرفة عند x=3 وان $f(3)=0$

نبحث وجود $f'(3)$ كالاتي

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 0} \frac{f(3+\Delta x) - f(3)}{\Delta x}$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 0} \frac{6 - 2(3+\Delta x) - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 0} \frac{6 - 6 - 2\Delta x}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \xrightarrow{-} 0} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2 = L_2$$

$$f'(3) = \lim_{\Delta x \xrightarrow{+} 0} \frac{2(3+\Delta x) - 6 - 0}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \xrightarrow{+} 0} \frac{6 + 2\Delta x - 6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \xrightarrow{+} 0} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2 = L_1$$

$\therefore L_1 \neq L_2$ $\therefore f'(3)$ لاوجود لها

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند x=3

---

(5) باستخدام قواعد المشتقة جد المشتقة الاولى لكل مما ياتي ازاء العدد المؤشر امامها :

(1) $f(x) = 3x^2 + 5x + 8$ عند $X = 1$

$f'(x) = (2)(3)x + 5 = 6x + 5$

$f'(1) = 6(1) + 5 = 11$

(2) $f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ عند $X=-1$

للحل طريقتان

الطريقة الاولى	الطريقة الثانية
$f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ * ندخل x تحت الجذر بعد تربيعه $f(x)=\sqrt{x^2(x^2+3)}=\sqrt{x^4+3x^2}$ $f(x)=\sqrt{x^4+3x^2}=(x^4+3x^2)^{\frac{1}{2}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}(x^4+3x^2)^{-\frac{1}{2}}(4x^3+6x)$ $y'=\frac{1}{2\sqrt{x^4+3x^2}}.4x^3+6x$ * الان نخرج x من تحت الجذر لكي نعادل العملية بالاشارات لان X قد تكون بالسالب $y'=\frac{4x^3+6x}{2\sqrt{x^2(x^2+3)}}$ $y'=\frac{4x^3+6x}{2x\sqrt{x^2+3}}$ (نعوض x=-1) $y'=\frac{4(-1)^3+6(-1)}{2(-1)\sqrt{(-1)^2+3}}$ $y'=\frac{-4-6}{-2\sqrt{1+3}}$ $y'=\frac{-10}{(-2)(2)}=\frac{-10}{-4}$ $y'=\frac{5}{2}$	$f(x)=x\sqrt{x^2+3}$ $y'=x.\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}.2x+1.\sqrt{x^2+3}$ $y'=\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+3}}+\sqrt{x^2+3}$ $y'=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+3}}+\sqrt{x^2+3}$ (نعوض x=-1) $y'=\frac{1}{\sqrt{4}}+\sqrt{4}$ $y'=\frac{1}{2}+2=2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$ $y'=\frac{5}{2}$

---

(3) $f(x)=\left[\frac{x^2+3}{x^2+1}\right]^4$ عند $X=0$

للحل طريقتان / الطريقة الاولى

$$y'=4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2+3)(2x)}{(x^2+1)^2}\right)$$

مشتقة مابداخل الكتلة×مشتقة الكتلة

$$y'=4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{(x^2+1)(2)(0)-(x^2+3)(2)(0)}{(x^2+1)^2}\right)$$ عند $(x=0)$

$$y'=4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3\left(\frac{0-0}{(x^2+1)^2}\right)=4\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3(0)$$

او تعوض عن كل $X=0$

$$y' = 4\left(\frac{0+3}{0+1}\right)^3\left(\frac{(0+1)(2)(0)-(0+3)(2)(0)}{(0+1)^2}\right)$$

$$y' = (4)(27)\left(\frac{0-0}{1}\right)$$

$$y' = (4)(27)\left(\frac{0}{1}\right)$$

$$y' = (4)(27)(0) = 0$$

الطريقة الثانية / تحول من قسمة دالتين الى ضرب دالتين

$$f(x)=\frac{(x^2+3)^4}{(x^2+1)^4} \rightarrow f(x)=(x^2+3)^4(x^2+1)^{-4}$$

$$f'(x) = (x^2+3)^4 \cdot [-4(x^2+1)^{-5}(2x)] + (x^2+1)^{-4}\cdot[4(x^2+3)^{-3}(2x)]$$

$$f'(x) = [-8x(x^2+3)^4(x^2+1)^{-5}] + [8x(x^2+1)^{-4}(x^2+3)^3]$$

$$f'(x) = \frac{-8x(x^2+3)^4 + 8x(x^2+3)^3}{(x^2+1)^5\ (x^2+1)^4}$$

$$f'(x) = \frac{8x(x^2+3)^3[-x^2-3+1]}{(x^2+1)^9}$$

$$f'(x) = \frac{8(0)\left((0)^2+3\right)^3[-(0)^2-3+1]}{\left((0)^2+1\right)^9} = \frac{0}{1} = 0$$

(4) $f(x) = \frac{x^2+1}{(x^2-x)^2}$ عند $x=-1$

$$f'(x) = \frac{(x^2-x)^2\cdot 2x - (x^2+1)\cdot 2(x^2-x)}{\left[(x^2-x)^2\right]^2}$$

$$= \frac{2x(x^2-x)^2 - 2(x^2+1)(x^2-x)(2x-1)}{(x^2-x)^4}$$

$$= \frac{2\cancel{(x^2-x)}\left[x(x^2-x)-(x^2+1)(2x-1)\right]}{(x^2-x)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$f'(-1) = \frac{2[-1(1+1) - (1+1)(-2-1)]}{(1+1)^3}$$

$$= \frac{2[-2+6]}{8} = \frac{2\times 4}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

---

(6) $y=\sqrt[3]{3x+5}$ جد y', y'' عند $x=1$

$$y=(3x+5)^{\frac{1}{3}}$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{3}}(3x+5)^{\frac{1}{3}-1}(\cancel{3}) \rightarrow y' = (3x+5)^{-\frac{2}{3}} \rightarrow y' = \frac{1}{(3x+5)^{\frac{2}{3}}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(3x+5)^2}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(8)^2}}$$ (نعوض $x=1$)

$$y' = \frac{1}{\sqrt[3]{(2^3)^2}} \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt[3]{2^6}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

$'y = (2x+5)^{-\frac{2}{3}}$

$''y = -\frac{2}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}-1}(3) \rightarrow ''y = -\frac{2}{3}(3x+5)^{-1\frac{2}{3}}(3)$

$''y = -\frac{2}{\cancel{3}}(3x+5)^{-\frac{5}{3}}(\cancel{3}) \rightarrow ''y = \frac{-2}{\sqrt[3]{(3x+5)^5}}$

$''y = \frac{-2}{\sqrt[3]{8^5}} \rightarrow ''y = \frac{-2}{\sqrt[3]{(2^3)^5}}$ (نعوض x=1)

$''y = \frac{-2}{\sqrt[3]{2^{12}}} \rightarrow ''y = \frac{-2}{2^5} = \frac{-2}{32} = \frac{-1}{16}$

or $''y = \frac{-2}{\sqrt[3]{(2^3)^5}} = \frac{-2}{\sqrt[3]{(2^5)^3}} = \frac{\overset{1}{-2}}{2^5} = \frac{-1}{2^{5-1}} = \frac{-1}{2^4} = \frac{-1}{16}$

[6-4] قاعدة السلسة

(1)

f قابلة للاشتقاق عند n $y = f(x)$

g قابلة للاشتقاق عند x $n = g(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$$

(2)

f قابلة للاشتقاق عند n $y = f(n)$

g قابلة للاشتقاق عند n $x = g(n)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

مثال 1/ اذا كان كل من $y = 3n^2 + 5$ ، $n = 4x + 3$ جد $\boxed{\frac{dy}{dx}}$

الحل / الطريقة الاولى

$y = 3n^2 + 5$ | $n = 4x + 3$

$\frac{dy}{dn} = 6n$ | $\frac{dn}{dx} = 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$

$= 6n \times 4 = 24n$

$\frac{dy}{dx} = 24n \quad (n=4x+3)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 24(4x+3) = 96x + 72$

الحل / الطريقة الثانية

نعوض عن قيمة n في $y = 3n^2 + 5$

$\therefore y = 3(4x+3)^2 + 5 \quad (n=4x+3)$

$\frac{dy}{dx} = (3)(2)(4x+3)(4)$

$= 24(2-4x+3)$

$= 96x + 72$

مثال 2/ اذا كان $x = 3n - 4$

$y = 2n + 5$

جد $\boxed{\frac{dy}{dx}}$

الحل / $x = 3n - 4 \quad y = 2n + 5$

$\frac{dy}{dn} = 2 \qquad \frac{dx}{dn} = 3$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$

$\frac{dy}{dx} = 2 \div 3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

مثال 3/ اذا كان $y = 5n + 4$

$x = 3n + 1$

جد $\boxed{\frac{dy}{dx}}$ عندما $n = 1$

الحل /

$\frac{dy}{dn} = 5$

$\frac{dx}{dn} = 3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$

وعندما $n = 1$ فأن $\frac{dy}{dx} = \frac{5}{3}$

مثال 4/ $y = n^2 + 3n + 2$ ، $n = 2x + 1$ جد $\frac{dy}{dx}$ عندما $x=2$

الحل / $\frac{dn}{dx} = 2 \qquad \frac{dy}{dn} = 2n+3$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \times \frac{dn}{dx}$

$= (2n+3)(2)$

$= 4n+6 \qquad (n=2x+1)$

$=4(2x+1)+6$

$=8x+4+6$

$=8x+10$

$=8x+10 \qquad (x=2)$

$=8 \times 2+10$

$=16+10$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 26$

[5 – 6] معادلة المماس للمنحني والعمود على المماس

نعوض قيمة X_1 في الدالة الاصلية (المعطاة في السؤال) فنحصل على y_1 {لان $y = f(x)$ } النقطة (x_1,y_1) المستخرجة نعوضها في المشتقة الاولى لنحصل على ميل المماس عند تلك النقطة (x_1,y_1) ونرمز للميل بالرمز m

مثال 1/ جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = (3-x^2)^4$ عند $x=2$

الحل/ $f(2)=(3-2^2)^4$

$f(2)=(3-4)^4$

$f(2)=(-1)^4$

$f(2)=y=1$

النقطة (2,1) هي نقطة تماس

$f(x)=(3-x^2)^4$

$f'(x)=4(3-x^2)^3(-2x)$ المشتقة هي (m) الميل

$f'(2)=4(3-2^2)^3(-2(2))$

$= 4(-1)^3(-4)$

$= 4(-1)(-4)$

$= (-4)(-4) = 16$

نطبق القاعدة عند معرفة الميل (16) والنقطة (2 , 1)

$$m = \frac{y-y_1}{x-x_1} \rightarrow 16 = \frac{y-1}{x-2}$$

$16x-32 = y-1$ حاصل ضرب الوسطين = حاصل ضرب الطرفين

$16x-y-32+1=0$

$16x-y-31=0$ معادلة المماس للمنحني

مثال 2/ جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $f(x) = (2x-1)^5$ عند $x = 1$

الحل /

$f(1) = (2-1)^5 = 1$

نقطة التماس $\therefore (1 , 1)$

$f'(x) = 2(2x-1)^4 (2)$

$= 10(2x-1)^4$

ميل المماس $f'(1) = 10(2-1)^4 = 10$

$$10 = \frac{y-1}{x-1}$$

$10x-10 = y-1$

معادلة المماس $10x - y - 9 = 0$

ميل العمود $= \frac{-1}{10}$

$$\frac{-1}{10} = \frac{y-1}{x-1}$$

$10y - 10 = -x + 1$

معادلة العمود $10y + x - 11 = 0$

مثال 3 / جد معادلة المماس والعمود على المماس للمنحني $y=4x^2-3$ عند $(x=-1)$

الحل /

$f(x)=4x^2-3 \quad (x=-1)$

$f(-1)=4(-1)^2-3 \rightarrow f(-1)=4\times1-3 \rightarrow y=1$

$\therefore (\overset{x}{-1},\overset{y}{1}) \leftarrow$ نقطة التماس

$f'(x)=(4)(2)x$

$\therefore f'(x)=8x \qquad (x=-1)$

$m = f'(-1) = 8(-1) \rightarrow m=-8$ ميل المماس

القيمة السالبة للميل تدل على ان زاوية ميل المماس منفرجة (مع محور السينات)

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$-8=\frac{y-1}{x-(-1)} \rightarrow -8=\frac{y-1}{x+1}$$

$-8(x+1)=y-1$

$-8x-8-y+1=0$

$(-8x-y-7=0)(-1)$

$\underline{8x+y+7=0}$ معادلة المماس

$m'=-\frac{1}{m} \rightarrow m'=-(\frac{1}{-8})=\frac{1}{8}$ (المقلوب بعكس الاشارة) ميل العمود على المماس

$y-1=\frac{1}{8}(x-(-1))$

$8y-8=x+1$

$x-8y+8+1=0$

$x-8y+9=0$ معادلة العمود على المماس

مثال 3/ جد معادلة المماس لمنحني الدالة $(fog)(x)$ عند $x=1$ اذا كان $f(x)=\sqrt[3]{3x+5}$ ، $g(x)=x$

الحل /

$(fog)(x) = f[g(x)]$

$= f(x)$ $\qquad (f(x)\sqrt[3]{3x+5})$

$= \sqrt[3]{3x+5}$ $\quad$ عند $x=1$

$y = \sqrt[3]{3+5} = 2$ $\qquad (\overset{x}{1}, \overset{y}{2})$

$(fog)(x) = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$

$(fog)'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{-\frac{2}{3}}(3)$ مشتقة مابداخل القوس

$(fog)'(1) = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \times 3$

$= \frac{1}{3}(2^3)^{-\frac{2}{3}} \times 3$

$= \frac{1}{3} \times 2^{-2} \times 3$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times 3$

$(fog)'(1) = \frac{1}{4} = m$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$\frac{1}{4} = \frac{y-2}{x-1}$

$x - 1 = 4y - 8$

$x - 4y - 1 + 8 = 0$

$x - 4y + 7 = 0$ معادلة المماس

[6-6] التفاضل الضمني

حين تكون y دالة معطاة في x أي $y=f(x)$ ، فيقال ان الدالة صريحة ويسمى x بالمتغير المستقل بينما y بالمتغير التابع .

$x^2 + y^2 = 25$ معادلة دائرة وهي ليست دالة . (لماذا) ؟

واحد لاثنين ليس دالة
بينما اثنين لواحد أو واحد لواحد فهي دالة

الجواب

$y^2 = 25 - x^2$

$x=3 \quad y = \mp\sqrt{25 - x^2}$

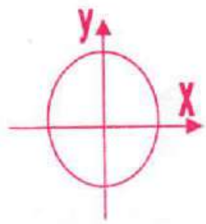
$y = \mp 4$

$x=-3$

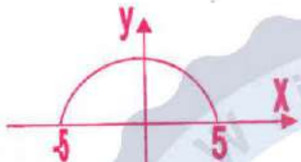
$y = \mp 4$

ويمكن جعلها دالة اذا اخذنا $y=\sqrt{25-x^2}$

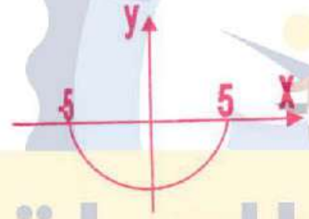
فلو رسمنا $y=\sqrt{25-x^2}$ لوجدنا انه يمثل نصف الدائرة الاعلى



وكذلك $y=-\sqrt{25-x^2}$ لوجدنا انها تمثل نصف الدائرة الاسفل



وكل من العلاقتين $y=-\sqrt{25-x^2}, y=\sqrt{25-x^2}$ يمثلان دالة مجالها $= [-5,5]$



أي اننا عرفنا دالتين ضمن العلاقة $x^2+y^2=25$ والتي كما اسلفنا لاتمثل دالة ويقال لكل من $y=\sqrt{25-x^2}$, $y=-\sqrt{25-x^2}$ دالة ضمنية ولايجاد مشتقة العلاقة ولتكن $y=F(x)$

$x^2+y^2=25$

$x^2+(f(x))^2=25$ (نعوض بدل y بـ(f(x))

$2x+2(f(x))\,'f(x)=0$

$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow 2y\frac{dy}{dx}=-2x$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x}{2y}=\frac{-x}{y}$

مثال 1/ اذا كان $x^2-y^2=7y-x$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل /

$$2x-2y\frac{dy}{dx}=7\frac{dy}{dx}-1$$

$$2x+1=7\frac{dy}{dx}+2y\frac{dy}{dx}$$

$$2x+1=\frac{dy}{dx}(7+2y)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x+1}{7+2y}$$

مثال 2/ جد معادلة المماس للدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 = 32$ عند النقطة $(-3 , 4)$

الحل /

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{y-4}{x+3} = \frac{3}{4}$$

$$3x + 9 = 4y - 16$$

$$3x - 4y + 25 = 0$$

مثال 3/ اذا كان $x^2+y^2=10$ اثبت ان : $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$

نشتق العلاقة المعطاة ضمنياً

$$x^2 + y^2 = 10 \rightarrow 2x + 2y'y = 0$$

$x + y'y = 0$ نضرب طرفي العلاقة في $\frac{1}{2}$ ونشتق ثانية

$1 + y''y + y' \cdot y' = 0$ حاصل ضرب دالتين قابلتين للاشتقاق

$$y' \cdot y' + y''y + 1 = 0 \rightarrow (y')^2 + y''y + 1 = 0$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y\frac{d^2y}{dx^2} + 1 = 0$$

مثال اثرائي / جد معادلة المماس للمنحني $x^2 + xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1,3)$

الحل / نحصل على y' عند $(-1,3)$ باشتقاق العلاقة اعلاه ضمنياً .

$\frac{d}{dx}(x^2 + xy + y^2) = \frac{d}{dx}(7)$ ← ضرب دالتين

$$2x + x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} + 2x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) + 2x + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$$

وعند $(-1,3)$ يكون : $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2(-1) - 3}{(-1) + 2(3)} = \frac{2-3}{6-1}$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{5}$ (ميل المماس m)

وتكون معادلة المماس في النقطة $(-1,3)$ هي :

$$y - 3 = -\frac{1}{5}(x - (-1))$$

$$\left[y - 3 = -\frac{1}{5}(x + 1)\right] \times 5$$

$$5y - 15 = -x - 1$$

$$x + 5y - 15 + 1 = 0 \rightarrow x + 5y - 14 = 0$$

المصطلحات العلمية

الازاحة displacement	تعجيل Acceleration	السرعة Velocity
مكان ، موضع ،موقع place	جاذبية الارض gravity	السرعة Speed
مسافة distance	$\frac{\text{distance}}{\text{time}}$=speed m/sec	كدالة Velocity v(t)
	$\frac{\text{speed}}{\text{time}}$=Acceleration m/sec^2	

مثال 4/

جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $p(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t + 5$ حيث P(t) الازاحة بالامتار ، t الزمن بالثواني . جد السرعة عندما يكون التعجيل صفر.

$P(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 3t + 5$

$'P(t) = 3(\frac{1}{3})t^2 - 4t + 3$ ('P(t)=speed السرعة)

$'P(t)=t^2-4t+3$

$''P(t)=2t-4$ (التعجيل=''P(t))

$0=2t-4 \rightarrow 2t-4=0 \rightarrow t=\frac{4}{2} \rightarrow t=2$

نعود الى معادلة السرعة

$'P(t)=t^2-4t+3$ (t=2)

$'P(t)=2^2-4\bullet2+3$

$=4-8+3$

$= 4+3-8=-1$ السرعة عندما التعجيل = صفر

مثال 5/ لتكن v(t) سم/ث سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم $v(t) = 3t^2 - 6t + 9$ جد

(١) السرعة عندما t=2sec (٢) السرعة عندما التعجيل = صفر

الحل /

$V(2) = 3(2)^2 - 6(2) + 9 = 12 - 12 + 9 = 9$ cm/s

$'V(t) = 6t - 6$ التعجيل $0 = 6t - 6 \rightarrow 6t - 6 = 0 \rightarrow 6t = 6 \rightarrow t = \frac{6}{6} = 1$

$V(1) = 3(1)^2 - 6(1) + 9 \rightarrow V(1) = 3 - 6 + 9 = 6$ cm/s

حلول تمارين (2-6)

(1) اذا كان $g(x)=(1+2x^2+5x)^{\frac{3}{2}}$, $f(x) = 2x$ جد : $(gof)'(0)$

الحل { نعوض في $g(x)$ عن كل X بـ $2X$ }

$(gof)(x) = g[f(x)] = g(2x)$

$(gof)(x) = (1 + 2(2x)^2 + 5(2x))^{\frac{3}{2}}$

$(gof)(x)=(1+8x^2+10x)^{\frac{3}{2}}$

$(gof)'(x) = \frac{3}{2}(1 + 8x^2 + 10x)^{\frac{1}{2}}(16x + 10) \rightarrow (gof)'(0) = \frac{3}{2}(1 + 0 + 0)^{\frac{1}{2}}(0 + 10)$

$= \frac{3}{2} \times 1 \times 10 = 15$

---

(2) اذا كان $y = n^3 + 3n - 5$, $n=2x+1$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل $\frac{dy}{dn}=3n^2+3$

$\frac{dn}{dx} = 2$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\times\frac{dn}{dx}$

$\frac{dy}{dx}=(3n^2+3)(2)$

$= 2(3n^2 + 3) = 6n^2 + 6 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 6(2x+1)^2 + 6$

---

(3) اذا كان $y = an^2 + 3n - 7$, $n=2x+1$

جد قيمة a ؟ اذا كان $\frac{dy}{dx}=30$ عند $x=1$

الحل/

طريقة أولى

$\frac{dn}{dx}=2$

$\frac{dy}{dn}=2an+3$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dn}\times\frac{dn}{dx}$

$\frac{dy}{dx} = (2an + 3)(2)$

$\frac{dy}{dx}=4an+6$

$\frac{dy}{dx} = 4a(2x + 1) + 6$

$= 8ax + 4a + 6$

$30=8a(1)+4a+6$

$30=12a+6$

$30-6=12a$

$24=12a$

$a=\frac{24}{12}=2$

طريقة ثانية

$y=an^2+3n-7$

$y=a(2x+1)^2+3(2x+1)-7$

$y = a(4x^2 + 4x + 1) + 6x + 3 - 7$

$y= 4ax^2 + 4ax + a + 6x + 3 - 7$

$y'= 8ax + 4a + 0 + 6 + 0 - 0$

$y' = 8ax + 4a + 6$

$30 = 8a(1) + 4a + 6$

$30 = 12a + 6$

$12a = 30 - 6 \rightarrow 12a = 24$

$\frac{12a}{12} = \frac{24}{12} \rightarrow a = 2$

(4) جد $\frac{dy}{dx}$ عند $n = 1$ اذا كان $y = 3n^2 + 2n + 4$, $x = 8n + 5$

الحل /

$$\frac{dy}{dx}=6n+2 \quad , \quad \frac{dy}{dx}=8$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dn} \div \frac{dx}{dn}$$

$$=(6n+2)\div 8$$

$$=(6n+2)\times\frac{1}{8}$$

$$=\frac{6n+2}{8}=\frac{2(3n(+1)}{8}=\frac{3n+1}{4}=\frac{3(1)+1}{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{4} = 1$$

---

(5) جد : $\frac{dy}{dx}$ اذا كان $xy^2 + 4x^2 = 7x - 2y$

الحل /

$$(x)2y\,{}'y+(1)y^2+8x=7-2\,{}'y$$

$$2yx\,{}'y + 2\,{}'y = 7-8x-y^2$$

$${}'y(\,2yx + 2\,) = 7-8x-y^2$$

$${}'y = \frac{7-y^2-8x}{2yx + 2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{7-y^2-8x}{2yx + 2}$$

---

(6) اذا كان $xy^2 + yx^2 = 2$ أثبت ان $\frac{dy}{dx} = -1$ عند $(1,1)$

الحل/

$$xy^2 + yx^2 = 2$$

$$x\cdot 2y\cdot{}'y + y^2\cdot(1) + y\cdot(2x) + x^2\cdot{}'y = 0$$

$$2xy\,{}'y + y^2 + 2xy + x^2\,{}'y = 0$$

$$2xy\,{}'y + x^2\,{}'y = -2xy - y^2$$

$${}'y(2xy + x^2) = -2xy - y^2$$

$${}'y = \frac{-2xy - y^2}{(2xy + x^2)}$$

عند النقطة $(1,1)$.

$${}'y = \frac{-2(1)(1)-(1)^2}{2(1)(1) + (1)^2} = \frac{-3}{3}$$

$${}'y = -1$$

---

(7) جسم يتحرك على خط مستقيم وفق القاعدة $P(t) = 24t^2 - t^3$

حيث : $P(t)$ الازاحة بالامتار ، t الزمن بالثواني .

(1) جد سرعة الجسم بعد 2 sec من بدء الحركة .

(2) جد الازاحة عندما التعجيل = صفر .

الحل /

$P(t) = 24t^2 - t^3$

$P'(t) = (2)24t - 3t^2$

السرعة $P'(2) = 48\cdot(2) - 3\cdot(2)^2$

التعجيل $P''(t) = (2)\cdot 24t - 6t$

$= 96 - 12 = 84$ m/sec

تستخرج الزمن من معادلة التعجيل لاستخراج الازاحة

$P''(t) = 48 - 6t$

$0=48-6t \rightarrow 48-6t=0$

$6t = 48 \rightarrow t = 8sec$

نعود الى معادلة الازاحة $P(t) = 24t^2 - t^3$

$= 24 \times 64 - 8 \times 8 \times 8$

$= 1536 - 512 = 1024m$

---

(8) لتكن $v(t)$ سم/ثا تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وان $V(t)=t^3-t^2+5$

جد السرعة عندما التعجيل $= 8cm/sec^2$

الحل /

$V(t)=t^3-t^2+5$

$V'(t)=3t^2-2t$

$8=3t^2-2t$

$3t^2-2t-8=0$

$(3t+4)(t-2)=0$

$3t+4=0$

$3t=-4$

$t = \frac{-4}{3}$ يهمل

$t-2=0 \rightarrow t=2$

$V(t) = t^3 - t^2 + 5$

$V(2) = 2^3 - 2^2 + 5$

$= 8 - 4 + 5$

$= 8 + 5 - 4 = 13 - 4$

$V(2) = 9$ cm/s

---

(9) جد معادلة المماس لمنحني الدالة : $f(x)=\sqrt{x^2+3}$ عند $X = -1$

الحل /

$f(-1)=\sqrt{(-1)^2+3}$

$f(-1)=\sqrt{1+3} \rightarrow f(-1)=\sqrt{4}=2$

∴ نقطة التماس = $(\overset{x}{-1},\overset{y}{2})$

$f(x)=\sqrt{x^2+3}$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x) \rightarrow f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}(2x) \rightarrow f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}$$

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}} \rightarrow f'(-1)=\frac{-1}{\sqrt{(-1)^2+3}}$$

$$m=\frac{-1}{\sqrt{1+3}}=\frac{-1}{2}$$

$$\frac{-1}{2}(x-(-1))=(y-2) \rightarrow \frac{-1}{2}(x+1)=(y-2)$$

$$-1(x+1)=2(y-2) \rightarrow -x-1=2y-4$$

$x+2y-4+1=0 \rightarrow x+2y-3=0$ معادلة المماس

---

(10) اذا كانت $f(x)=x-x^2$ ، $g(x)=\sqrt{2x+1}$ حيث $x \geq -\frac{1}{2}$

جد معادلة المماس للمنحني $(fog)(x)$ عند $x=4$

الحل /

$f(x)=x-x^2$

$g(x)=2x+1$

$(fog)(x)=f[g(x)]$

$=f(2x+1)$

$(fog)(x)=f(2x+1)$

$f(x)=x-x^2$

$f(2x+1)=(2x+1)-(2x+1)^2$

$=2x+1-(4x^2+4x+1)$

$=2x-4x+1-1-4x^2$

$=-4x^2-2x$

$\therefore (fog)(x)=-4x^2-2x$

$(fog)(4)=-4(16)-2(4)$

$=-64-8$

$y=-72$

$(4,-72)$

$(fog)'(x)=-8x-2$

$=-(8x+2)$

$(fog)'(4)=-(8\times4+2)$

$=-(32+2)$

$=-34$

$m=-34$

$-34(x-4)=(y+72)$

$-34x+136=y+72$

$-34x-y+136-72=0$

$-34x-y+64=0$

$34x+y-64=0$

---

(11) جد معادلتي المماس للمنحني : $x^2+y^2-5xy=15$ عند $y=-2$

الحل / نستخرج الاحداثي السيني عند $y=-2$ من المعادلة الاصلية

$x^2+4-5x(-2)=15$

$x^2+10x+4-15=0$

$x^2+10x-11=0 \rightarrow (x+11)(x-1)=0$

$x+11=0 \rightarrow x=-11$

$x-1=0 \rightarrow x=1$

∴ توجد نقطتي تماس للمنحني وهما $(1,-2)$، $(-11,-2)$ أي يوجد مماسين للمنحني :

الان اشتقاق ضمني $x^2+y^2-5xy=15$

$$2x+2yy'-(5xy'+5y)=0$$

$$2x+2yy'-5xy'-5y=0$$

$$2yy'-5xy'+2x-5y=0$$

$$y'(2y-5x)=5y-2x$$

$$y'=\frac{5y-2x}{2y-5x}$$

ميل المماس الاول عند $(1,-2)$

$$y'=\frac{5(-2)-2(1)}{2(-2)-5(1)}=\frac{-10-2}{-4-5}=\frac{-(10+2)}{-(4+5)}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}$$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{4}{3}\rightarrow\frac{y+2}{x-1}=\frac{4}{3}\rightarrow 4x-4=3y+6\rightarrow 4x-3y-4-6=0$$

معادلة المماس الاول $4x-3y-10=0$

ميل المماس الثاني عند النقطة $(-11,-2)$ $\quad y'=\frac{5y-2x}{2y-5x}$

$$y'=\frac{5(-2)-2(-11)}{2(-2)-5(-11)}=\frac{-10+22}{-4+55}=\frac{22-10}{55-4}=\frac{12}{51}$$

$$\frac{y+2}{x+11}=\frac{12}{51}\rightarrow 12x+132=51y+102\rightarrow 12x-51y+132-102=0$$

معادلة المماس الثاني $12x-51y+30=0$

مثال اثرائي

اذا كان $x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=2$

اثبت ان $\frac{dy}{dx}=-1$ عند $(1,1)$

<u>**الحل/**</u>

$$\underbrace{x\frac{1}{2\sqrt{y}}y'+\sqrt{y}}_{\text{ضرب دالتين}}+\underbrace{y\frac{1}{2\sqrt{x}}+\sqrt{x}\,y'}_{\text{ضرب دالتين}}=0$$

$$\frac{x}{2\sqrt{y}}y'+\sqrt{x}\,y'+\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}=0\quad\rightarrow y'\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right)=-\sqrt{y}-\frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$y'\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right)=-\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$y'=\frac{-\left(\sqrt{y}+\frac{y}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}+\sqrt{x}\right)}$$

$$y'=\frac{-(1+\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2}+1)}=\frac{-1\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}}$$

$$y'=-1$$

[6–7] مشتقات الدوال الدائرية Derivatives of the Circular Functions

عرفنا سابقاً ان المشتقة الاولى للدالة F عند x = a هي :

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ويمكن استخدام هذا التعريف

(1) $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x\cos\Delta x + \cos x\sin\Delta x - \sin x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(1 - \cos\Delta x) + \cos x\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\sin x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos\Delta x}{\Delta x} + \cos x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\Delta x}{\Delta x}$$

$$= -\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$$

(2) $f(x) = \cos x$

$f'(x) = -\sin x$

البرهان /

$$f(x) = \cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$$

$$f'(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)(-1) \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

القواعد الاخرى سنطرحها بدون برهان/

القواعد

القواعد	
(1) $\frac{d}{dx}(\sin y) = \cos y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\sin 5x = (\cos 5x) \cdot (5)$
(2) $\frac{d}{dx}\cos y = -\sin y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\cos\frac{x}{2} = -\sin\frac{x}{2} \cdot (\frac{1}{2})$
(3) $\frac{d}{dx}(\tan y) = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\tan x^2 = \sec^2 x^2 \cdot (2x)$
(4) $\frac{d}{dx}\cot y = -\csc^2 y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\cot 8x = -\csc^2 8x \cdot (8)$
(5) $\frac{d}{dx}\sec y = \sec y\tan y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\sec 4x = \sec 4x\tan 4x \cdot (4)$
(6) $\frac{d}{dx}\csc y = -\csc y\cot y \frac{dy}{dx}$	مثال $\frac{d}{dx}\csc 5x = -\csc 5x\cot 5x \cdot (5)$

أمثلة

مثال 1/ جد $f'(x)$ للدالة $f(x) = \sin(7x^2 + 4x + 1)$

الحل / $f'(x) = \cos(7x^2+4x+1)(14x+4)$

$= (14x+4)\cos(7x^2+4x+1)$

مثال 2/ $f(x) = \sin\sqrt[3]{x}$

الحل / $f(x) = \sin x^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \cos x^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}$

$= \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} \cos \sqrt[3]{x} = \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x^2}}$

مثال 3/ $f(x) = \cos^3 7x$

الحل / $f(x) = (\cos 7x)^3$

$f'(x) = 3(\cos 7x)^2 \, (-\sin 7x \cdot 7)$

$= -21 \cos^2 7x \sin 7x$

مثال 4/ $f(x) = \cos 3x - \tan 5x + \sec 4x$

الحل / $f'(x) = -3\sin 3x - 5\sec^2 5x + 4\sec 4x \tan 4x$

مثال 5/ جد معادلة المماس عند $x=0$ للدالة $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$

الحل / $f(0) = 3\sin 0 + 4\cos 0 = 0 + (4 \times 1) = 4$

$\therefore$ نقطة التماس هي $(0,4)$

نستخرج الميل حيث $m = f'(x)$ $\quad f'(x) = 3\cos x - 4\sin x$

ميل المماس $m = f'(0) = 3\cos 0 - 4\sin 0 = 3 - 0 = 3$

$(y - y_1) = m(x - x_1) \Rightarrow (y-4) = 3(x-0)$

معادلة المماس $y - 4 = 3x \Rightarrow 3x - y + 4 = 0$

مثال 6/ جد $f'(x)$ $f(x) = (\sec 5x)^3$

الحل / $f(x) = (\sec 5x)^3$

$f'(x) = 3(\sec 5x)^2 \, (\sec 5x \tan 5x \cdot 5)$

$= 15\sec^3 5x \tan 5x$

مثال 7/ جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة $P(t) = 3\cos 2t$ حيث $P(t)$ الازاحة بالامتار ، t الزمن بالثواني جد السرعة عندما $t = 0$ وجد التعجيل عند $t = \frac{\pi}{6}$

الحل / $P(t) = 3\cos 2t$

$P'(t) = -3\sin 2t \cdot (2) = -6\sin 2t$

$P'(0) = -6\sin 2t \cdot (0)$

$P'(0) = -6 \cdot (0) = 0 \text{ m/s}$ السرعة عندما الزمن يساوي صفر

$P''(t) = -6\cos 2t \cdot (2) = -12\cos 2t$

$P''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12\cos \cancel{2} \cdot \left(\frac{\pi}{\cancel{6}}\right)$

$P''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$P''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = -6 \text{ m/s}^2$

حلول تمارين (3-6)

جد y'

(1) $y=\sin(5-x^3)$

الحل /

$$y' = \cos(5-x^3)\cdot(-3x^2)$$
$$y' = \cos(5-x^3)\cdot(-3x^2)$$
$$y' = -3x^2\cos(5-x^3)$$

(2) $y=\sqrt{\cos(4x+2)}$

الحل /

$$y = (\cos(4x+2))^{-\frac{1}{2}}$$
$$y' = \frac{1}{2}(\cos(4x+2))^{-\frac{1}{2}}(-\sin(4x+2)\cdot 4)$$
$$y' = -2\frac{1}{\sqrt{\cos(4x+2)}}(\sin(4x+2))$$
$$= \frac{-2\sin(4x+2)}{\sqrt{\cos(4x+2)}}$$

(3) $y = x\sec x^2$

الحل /

$$y' = x\sec x^2\tan x^2\cdot(2x) + (1)\cdot\sec x^2$$
$$y' = 2x^2\sec x^2\tan x^2 + \sec x^2$$
$$= \sec x^2(2x^2\tan x^2 + 1)$$

(4) $y = \sin 3x\cos 3x$

الحل /

$$y' = \sin 3x(-\sin 3x)\cdot(3) + \cos 3x\cos 3x\cdot(3)$$
$$= 3 - 3\sin^2 3x + 3\cos^2 3x$$
$$= 3(\cos^2 3x - \sin^2 3x) = 3\cos 6x$$

(5) $y = \sqrt[3]{\cot^2 4x}$

الحل /

$$y = \sqrt[3]{(\cot 4x)^2} \rightarrow y = (\cot 4x)^{\frac{2}{3}}$$
$$y' = \frac{2}{3}(\cot 4x)^{-\frac{1}{3}}(-\csc^2 4x)\cdot(4)$$
$$y' = -\frac{8}{3}\left(\frac{\csc^2 4x}{\sqrt[3]{\cot 4x}}\right) = \frac{-8\csc^2 4x}{3\sqrt[3]{\cot 4x}}$$

(6) $y = \csc^5(x^2+1)$

الحل /

$$y = \left[\csc(x^2+1)\right]^5$$
$$y' = 5\left[\csc(x^2+1)\right]^4\cdot\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\cdot 2x$$
$$y' = 5\csc^4(x^2+1)\left[-\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\cdot 2x\right]$$
$$y' = 5\csc^4(x^2+1)\left[-2x\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)\right]$$
$$y' = -10x\csc^4(x^2+1)\csc(x^2+1)\cot(x^2+1)$$
$$y' = -10x\csc^5(x^2+1)\cot(x^2+1)$$

(7) $y = (\sin 3x - \cos 3x)^2$

الحل /

$$y' = 2(\sin 3x - \cos 3x)((\cos 3x)(3) + (\sin 3x)(3))$$
$$y' = 2(\sin 3x - \cos 3x)\left[3(\cos 3x + \sin 3x)\right]$$
$$y' = 6(\sin 3x - \cos 3x)(\sin 3x + \cos 3x)$$
$$y' = 6(\sin^2 3x - \cos^2 3x)$$
$$y' = 6\cos 6x$$

(2) اذا كان $\sin xy^2 = 4x - 3y$ جد $\frac{dy}{dx}$ ؟

الحل / نشتق الدالة الضمنية

$$(\cos xy^2)(2y\,{}'y\,x + y^2 \cdot (1)) = 4 - 3\,{}'y$$

$$2y\,{}'y\,x\cos xy^2 + y^2\cos xy^2 = 4 - 3\,{}'y$$

$$(2y\,{}'yx\cos xy^2 + 3\,{}'y) = 4 - y^2\cos xy^2$$

$${}'y\left((2yx\cos xy^2 + 3)\right) = 4 - y^2\cos xy^2$$

$${}'y = \frac{4 - y^2\cos xy^2}{2yx\cos xy^2 + 3} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - y^2\cos xy^2}{2yx\cos xy^2 + 3}$$

---

(3) اثبت صحة

(1) $\frac{d}{dx}\left[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax\right] = a\cos^3 ax$

$$L.S = \frac{d}{dx}\left[\sin ax - \frac{1}{3}\sin^3 ax\right]$$

$$= a\cos ax - \left(\frac{1}{\cancel{3}}\right)\cdot\cancel{3}(\sin ax)^2 \cdot \cos ax \cdot (a)$$

$$= a\cos ax - a\cos ax\sin^2 ax \quad = a\cos ax - a\cos ax(1 - \cos^2 ax)$$

$$= a\cos ax - a\cos ax + a\cos^3 ax \quad = 0 + a\cos^3 ax \quad = a\cos^3 ax = R.S$$

---

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}\right) = \frac{4\sin x}{(2 + \cos x)^2}$

$$L.S = \frac{d}{dx}\left(\frac{2 - \cos x}{2 + \cos x}\right)$$

$$= \frac{(2 + \cos x)[0 - (-\sin x)] - [-\sin x(2 - \cos x)]}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{\sin x(2 + \cos x) + \sin x(2 - \cos x)}{(2 + \cos x)^2} = \frac{\sin x(2 + \cos x + 2 - \cos x)}{(2 + \cos x)^2}$$

$$= \frac{4\sin x}{(2 + \cos x)^2} = R.S$$

(4) جد y' للدالة $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

الحل/

$$y = (\cos^2 x - \sin^2 x)\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$y = \underbrace{(\cos^2 x - \sin^2 x)}_{\cos 2x}\cdot\underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1}$$

$$y = \cos 2x$$

$$y' = -\sin 2x \cdot (2) = -2\sin 2x$$

---

(5) جد معادلة المماس للمنحني $f(x) = \sin 2x + \sin x$ **عند** $x = \frac{\pi}{2}$ ؟

الحل/ نعوض عن قيمة (x) لايجاد ميل المماس

$$f'(x) = 2\cos 2x + \cos x$$

$$= 2\cos \cancel{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{2}} + \cos\frac{\pi}{2}$$

ميل المماس $m = 2(-1) + 0 = -2$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = -2(x - \frac{\pi}{2})$$

$$y - 1 = -2x + \pi$$

معادلة المماس للمنحني $2x + y - 1 - \pi = 0$

ايجاد الاحداثي الصادي (y) لنقطة التماس

$$f(x) = y = \sin 2x + \sin x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = y = \sin 2\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$y = \sin\pi + \sin\frac{\pi}{2}$$

$$y = 0 + 1 = 1$$

∴ نقطة التماس $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$

---

(6) جسم يتحرك على خط مستقيم وفقاً للقاعدة: $P(t) = \sin 2t - \cos 2t$ حيث $P(t)$ الازاحة بالامتار ، t الزمن بالثواني . جد كلا من ؛ جد كلاً من :(a) بعد الجسم (b) سرعته (c) تعجيله عندما $t = \frac{\pi}{4}$

الحل/

(a)

$P(\frac{\pi}{4}) = \sin 2 .\frac{\pi}{4} - \cos 2 .\frac{\pi}{4}$

$= \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2}$

$= 1 - 0$

$= 1\ m$ بعد الجسم

(b)

$P'(t) = 2\cos 2t + 2\sin 2t$

$P'(\frac{\pi}{4}) = 2\cos 2.\frac{\pi}{4} + 2\sin 2\frac{\pi}{4}$

$= 2\cos\frac{\pi}{2} + 2\sin\frac{\pi}{2}$

$= 2\times 0 + 2\times 1$

$= 2\ m/s$ السرعة

(c)

$P'(t) = 2(\cos 2t + \sin 2t)$

$P''(t) = 2(-2\sin 2t + 2\cos 2t)$

$= 2\times 2(\cos 2t - \sin 2t)$

$= 4(\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2})$

$= 4(0 - 1)$

$= -4\ m/s^2$ التعجيل

---

(7) اذا كانت $V(t)$ cm/sec تمثل سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم حيث :

$V(t) = 4\sin\frac{t\pi}{4} + 8\cos\frac{t\pi}{4}$ جد السرعة والتعجيل عندما t=1 ؟؟ (مطلوبين)

المطلب الاول السرعة

$V(1) = 4\sin\frac{\pi}{4} + 8\cos\frac{\pi}{4}$

$= 4 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 8 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\,\frac{\sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} + 4\,\frac{\sqrt{2} \times \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}}$

$= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2} = 6 \times 1.414 \simeq 8.5$ cm/sec السرعة عند t=1

$V(t) = 4\sin\frac{t\pi}{4} + 8\cos\frac{t\pi}{4}$ نشتق السرعة لايجاد التعجيل

$V'(t) = 4\cos\frac{t\pi}{4} \times \frac{\pi}{4} + 8(-\sin\frac{t\pi}{4} \times \frac{\pi}{4}) = 4 \times \frac{\pi}{4}\cos\frac{t\pi}{4} - 8 \times \frac{\pi}{4}\sin\frac{t\pi}{4}$

$\pi\cos\frac{t\pi}{4} - 2\pi\sin\frac{t\pi}{4}$

$V'(1) = \pi \times \frac{1}{\sqrt{2}} - 2\pi \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{2}\pi}{2} - \sqrt{2}\pi = \frac{\sqrt{2}\pi - 2\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{-\sqrt{2}\pi}{2} = \frac{-4.44}{2} = -2.22\ cm/sec^2$ التعجيل عند t=1

الفصل السابع

الهندسة الفضائية (المجسمة) Space Geometry

السطح المستوي / هو مجموعة غير منتهية من النقط بحيث ان المستقيم الواصل بين اي نقطتين فيه يكون محتوى في المستوي.
ويُرمز للمستوي بأحد الاحرف مثل (X) , (y) , (Z)

بعض اساسيات الهندسة المجسمة /

١- يوجد عدد غير منته من المستويات تحوي نقطة معينة مثل رأس مكعب .

٢- يوجد مستوي ومستقيم في الفراغ يقال لكل منها مجموعة جزئية فعلية من الفراغ .

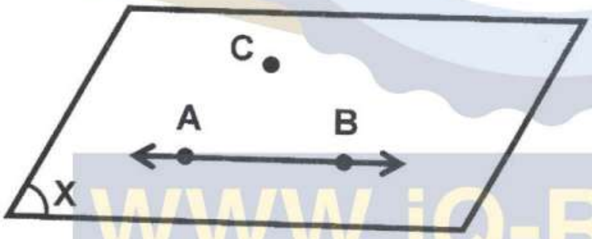
٣- اذا اشترك مستقيم ومستوي بنقطتين مختلفتين فأن المستقيم محتوى في المستوي.

٤- يمكن امرار عدد غير منته من المستويات من مستقيم معلوم .

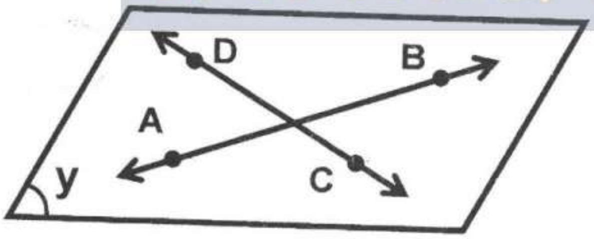
تعيين مستوي في الفراغ /

١- كل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستوي واحد فقط .

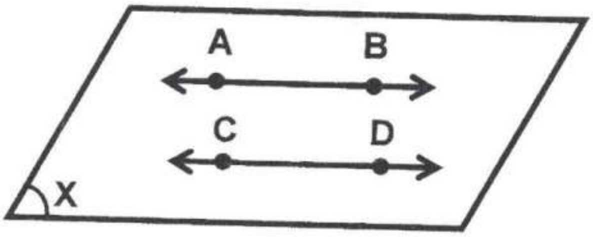
٢- لكل مستقيم ونقطة لا تنتمي اليه يوجد مستوي وحيد يحتويهما .



٣- لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستو وحيد يحتويهما .

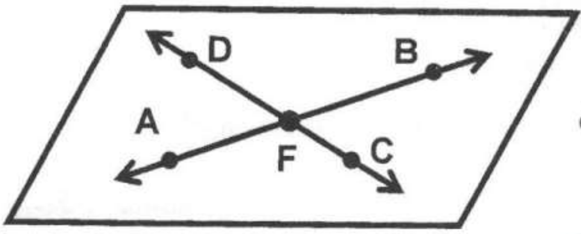


٤- لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستو وحيد يحتويهما .



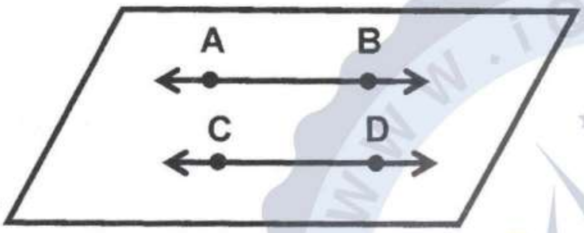
العلاقة بين مستقيمين في الفضاء /

المستقيمان المتقاطعان /



هما المستقيمان اللذان يشتركان بنقطة واحدة فقط وهما في مستو واحد

المستقيمان المتوازيان /

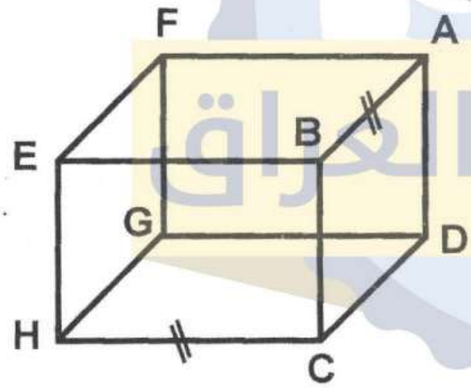


هما المستقيمان اللذان يحتويهما مستو واحد ولم يشتركا باية نقطة وغير متقاطعان

المستقيمان المتخالفان /

هما المستقيمان اللذان لا يمكن ان يحتويهما مستو واحد

(غير متقاطعان وغير متوازيان)



نلاحظ في الشكل :

$\overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{BE}$ مستقيمان متقاطعان

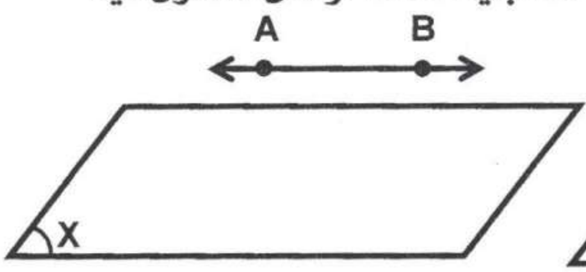
$\overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{EH}$ مستقيمان متوازيان

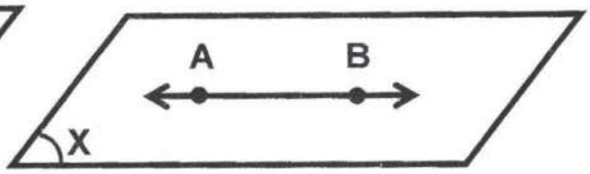
$\overleftrightarrow{BA}$ ، $\overleftrightarrow{HC}$ مستقيمان متخالفان وكذلك المستقيمان $\overleftrightarrow{AF}$ ، $\overleftrightarrow{HG}$

العلاقة بين المستقيم والمستوي /

أ- المستقيم الموازي للمستوي /

يكون المستقيم موازيا للمستو اذا لم يشترك معه باية نقطة أو كان محتوى فيه

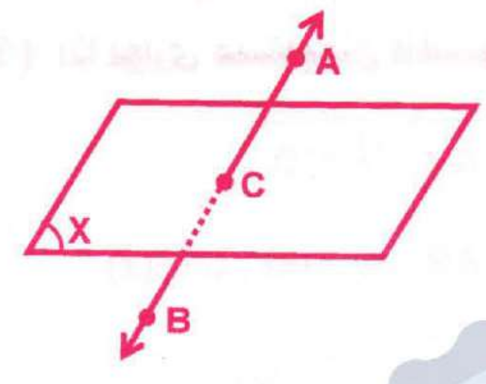




$\overleftrightarrow{AB} \parallel (x)$, $\overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \phi$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$

ب- المستقيم القاطع للمستوي /

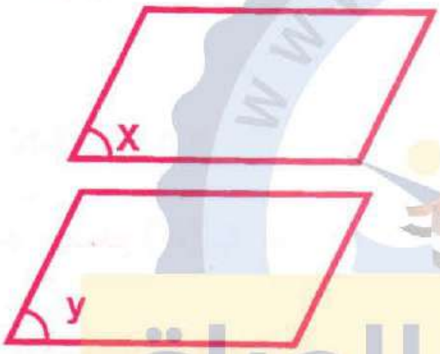


يكون المستقيم قاطعا للمستوي
اذا اشترك معه بنقطة واحدة

$$\overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \{C\}$$

العلاقة بين مستويين /

أ- المستويان المتوازيان /

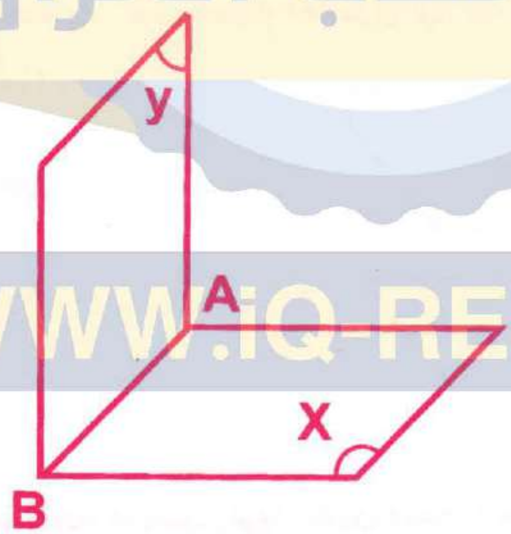


يكون المستويان متوازيان اذا لم يشتركا باية نقطة

$$(x) \cap (y) = \phi$$

$$(x) // (y)$$

ب- المستويان المتقاطعان /



اذا اشتركا بمستقيم واحد

$$(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{AB}$$

يسمى $\overleftrightarrow{AB}$ مستقيم التقاطع
ويكون محتوى في كليهما

اذا اشترك مستويان بنقطة فانهما يشتركان بمستقيم يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين

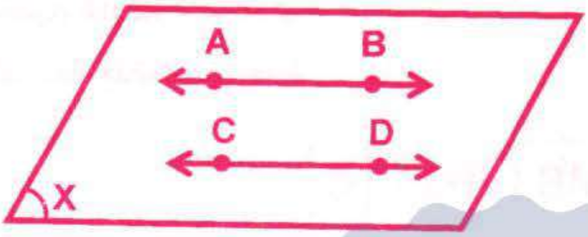
ملاحظة /

١- التساوي اسمان لشيء واحد .

٢- كل مستقيم يوازي نفسه

٣- كل مستوي يوازي نفسه

(1) اذا توازى مستقيمان فالمستوي المار بأحدهما ونقطة من الاخر فانه يحتويهما

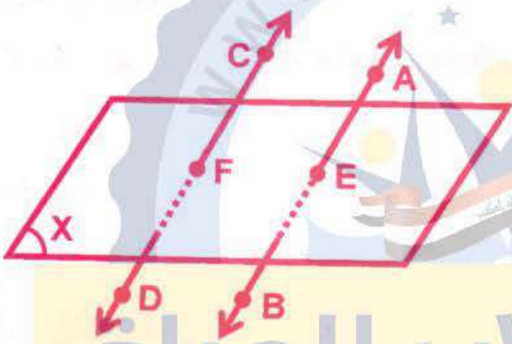


$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)\ ,\ C \in (x)$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (x)$

(2) المستوي الذي يقطع أحد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر



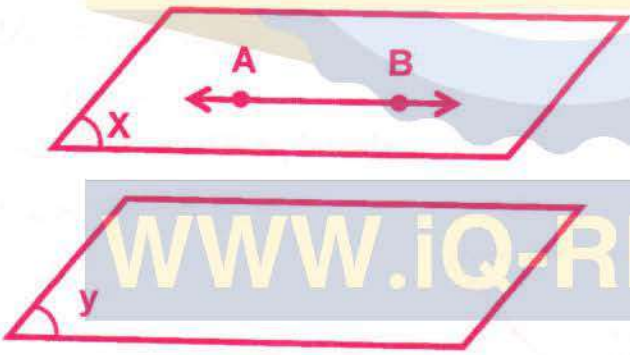
$\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (x) في E

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ يقطع (x) في F

(3) اذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في احدهما يوازي الاخر

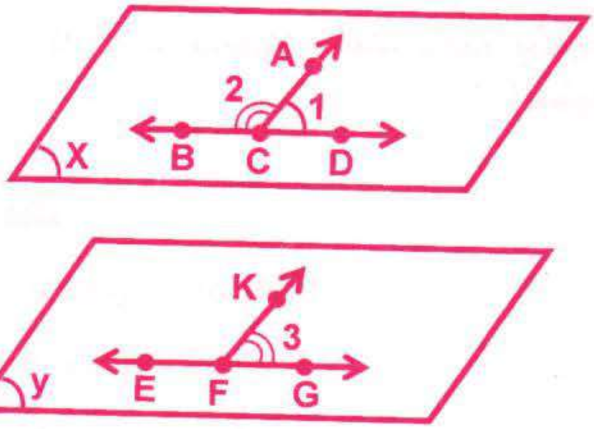
$(x) \parallel (y)$



$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \parallel (y)$

(4) اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوت قياسهما أو تكاملتا وتوازى مستواهما



$\overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{KF}$

$\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{EG}$

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 3$

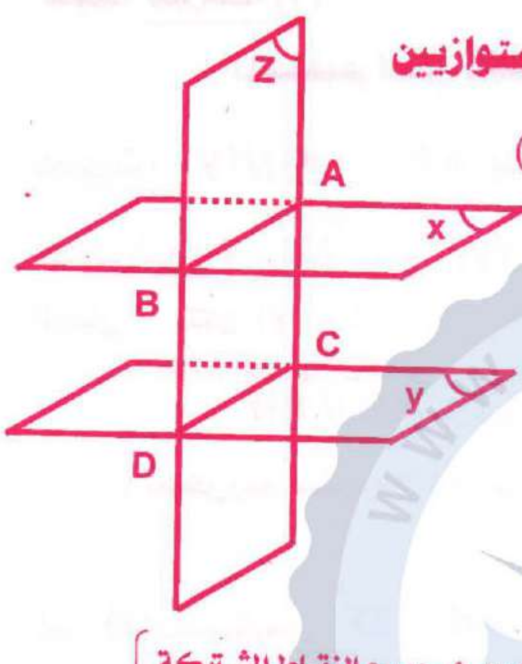
$m\measuredangle 1 + m\measuredangle 2 = 180^\circ$

$\therefore m\measuredangle 3 + m\measuredangle 2 = 180^\circ$

$(x) \parallel (y)$

مبرهنة (1)

خطا تقاطع مستويين متوازيين بمستو ثالث متوازيين



المعطيات / $(x)//(y)$ ، $(y)\cap(z)=\overleftrightarrow{CD}$, $(x)\cap(z)=\overleftrightarrow{AB}$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

البرهان / $(x)\cap(z)=\overleftrightarrow{AB}$

$(y)\cap(z)=\overleftrightarrow{CD}$ } معطى

$\therefore \overleftrightarrow{AB}\subset(x)$, $\overleftrightarrow{AB}\subset(z)$

$\overleftrightarrow{CD}\subset(y)$, $\overleftrightarrow{CD}\subset(z)$

{ مستقيم التقطاع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين }

في (Z) اذا لم يكن $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ فسوف يقطعه في نقطة مثل E

$\therefore E\in\overleftrightarrow{AB}\subset(x) \Rightarrow E\in(x)$

$E\in\overleftrightarrow{CD}\subset(y) \Rightarrow E\in(y)$

{ مستقيم التقطاع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين }

$E\in(x)\cap(y)$ (شتراكهما في نقطة E)

وهذا خلاف الفرض حيث $(x)//(y)$

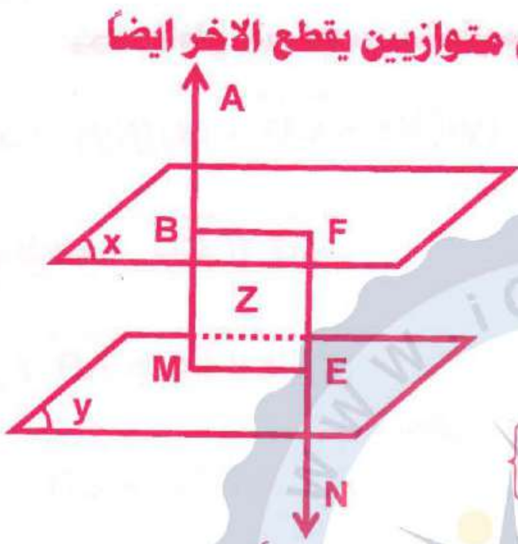
$\therefore \overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{CD}$ { يتوازى المستقيمان اذا وقعا في مستو واحد وغير متقاطعين }

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

(و.هـ . م)

نتيجة مبرهنة (1)

المستقيم الذي يقطع احد مستويين متوازيين يقطع الاخر ايضاً



المعطيات / $(y)//(x)$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (X)

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (y)

البرهان / لتكن $E\in(y)$

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EN}$ نرسم { يمكن رسم مستقيم مواز لاخر من نقطة لا تنتمي اليه }

نعين (Z) بالمستقيمين $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{EF}$ { يتعين مستو وحيد بمستقيمين متوازيين }

{ خطا تقاطع مستويين بمستو ثالث متوازين } $\overleftrightarrow{EM} // \overleftrightarrow{FB}$

اذن $\overleftrightarrow{AB}$ يقطع (y) في M

(و.هـ . م)

مبرهنة (2)

اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي لاخر

المعطيات / $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (x)$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{AB} // (x)$

البرهان /

اذا كان $\overleftrightarrow{AB}$ لا يوازي (x) فيقطعه بنقطة مثل E

$\therefore \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ معطى

$\therefore \overleftrightarrow{CD}$ يقطع (x) { المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازين يقطع الاخر }

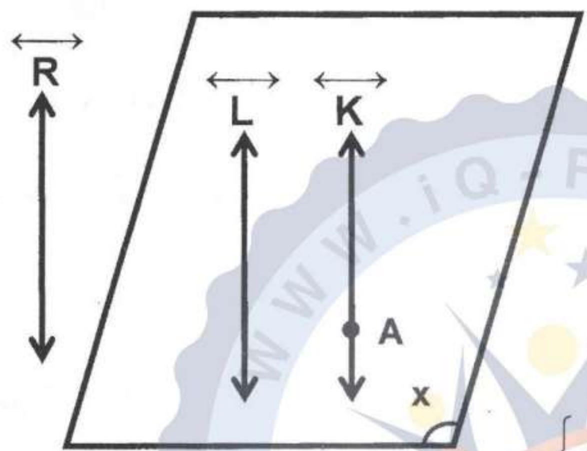
وهذا خلاف الفرض لان $\overleftrightarrow{CD} \subset (x)$

اذن $\overleftrightarrow{AB}$ لا يقطع (x)

$\overleftrightarrow{AB} // (x)$ (و.هـ . م)

مبرهنة (3)

المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث (في الفراغ) متوازيان



المعطيات/ $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{R}$, $\overleftrightarrow{K} \parallel \overleftrightarrow{R}$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$

البرهان / $A \in \overleftrightarrow{K}$

بالمستقيم $\overleftrightarrow{L}$ ونقطة A نعين (x)

{ يتعين مستو وحيد بمستقيم ونقطة لا تنتمي اليه }

ان لم يكن $\overleftrightarrow{K} \subset (x)$ فسوف يقطعه في A

اذن (x) يقطع $\overleftrightarrow{R}$ وهذا مستحيل { المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر }

$\therefore \overleftrightarrow{K} \subset (x)$

في (x) ان لم يكن $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{K}$ ، فيقطعه في نقطة مثل M

ينتج وجود مستقيمين مرسومين من M يوازيان $\overleftrightarrow{R}$

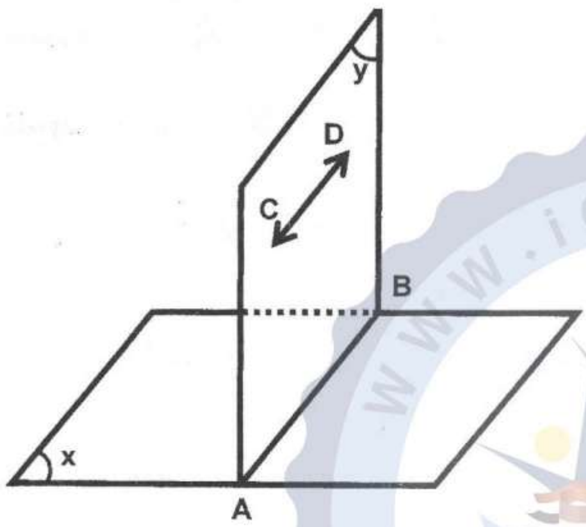
وهذا خلاف الفرض [عبارة التوازي]

اذن $\overleftrightarrow{K}$ لا يقطع $\overleftrightarrow{L}$

(و.هـ . م)

مبرهنة (4)

مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احداهما ويوازي الاخر



المعطيات / $(x)\cap(y)=\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}\subset(y),\ \overleftrightarrow{CD}\ //(x)$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{AB}\ //\ \overleftrightarrow{CD}$

البرهان / $\overleftrightarrow{AB},\ \overleftrightarrow{CD}\subset(y)$

$\overleftrightarrow{CD}\ //(x)$ (معطى)

في (y) لو كان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع $\overleftrightarrow{AB}$

لنتج ان $\overleftrightarrow{CD}$ يقطع (x) {مستقيم التقاطع يحوي جميع النقاط المشتركة بين المستويين المتقاطعين}

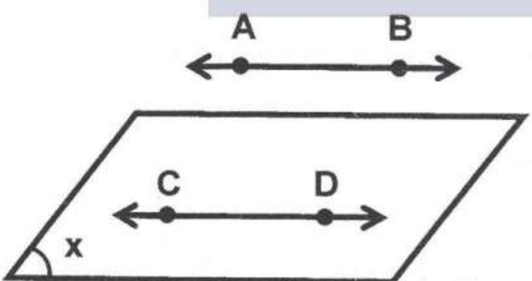
وهذا خلاف الفرض حيث $\overleftrightarrow{CD}\ //(x)$

$\therefore \overleftrightarrow{AB}\ //\ \overleftrightarrow{CD}$

(و.هـ.م)

نتيجة مبرهنة (4)

اذا وازى مستقيم مستويا معلوما فالمستقيم المرسوم من اية نقطة من نقاط المستوي موازيا للمستقيم المعلوم يكون محتوى في المستوي



المعطيات / $\overleftrightarrow{CD}\ //\ \overleftrightarrow{AB}$ ، $C\in(x),\ \overleftrightarrow{AB}\ //(x)$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{CD}\subset(x)$

البرهان / ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD}\subset(x)$ فيكون قاطعا له في نقطة C

اذن (x) يقطع $\overleftrightarrow{AB}$ {المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر}

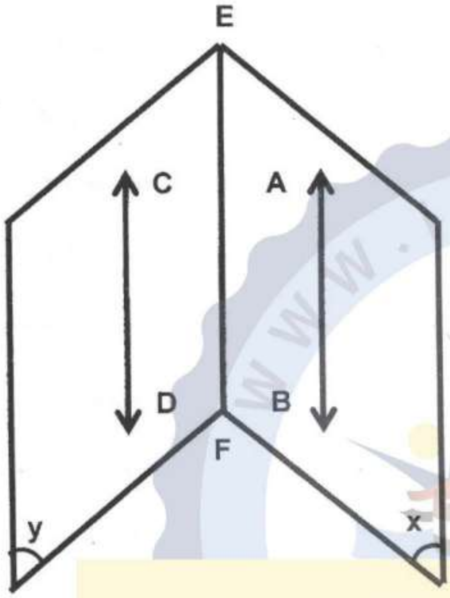
وهذا خلاف الفرض حيث $\overleftrightarrow{AB}\ //(x)$

اذن $\overleftrightarrow{CD}$ لا يقطع (x) بل محتوى فيه

(و.هـ.م)

مثال /

اذا احتوى كل من مستويين متقاطعين على احد مستقيمين متوازيين فمستقيم التقاطع يوازي كلا من المستقيمين المتوازيين



المعطيات / $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ، $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ ،

$\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ ، $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{EF}$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{CD}$, $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$

البرهان / $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ { معطى }

اذن $(y) \parallel \overleftrightarrow{AB}$ { اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الاخر }

بما ان $(x) \supset \overleftrightarrow{AB}$ { معطى }

اذن $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ (مبرهنة 4)

{ مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الاخر }

$\overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$ { المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث متوازيان }

(و.هـ . م)

حلول تمارين (1 – 7)

(1) أي من العبارات الاتية خاطئة واي منها صائبة وبين السبب :

(أ) اذا كان $\overrightarrow{AB} \parallel (x)$ فيوجد مستقيم وحيد يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ ومحتوي في (x) .
(صح)

(ب) يوجد مستوي وحيد موازي لمستو معلوم .
(خاطئة) .يوجد اكثر من مستو .

(جـ) المستقيمان الموازيان لمستو واحد متوازيان .
(خاطئة) . قد يكونان متقاطعين او متوازيين .

(د) اذا وازى ضلعان من مثلث مستوياً معلوماً كان ضلعه الثالث موازياً للمستوي المعلوم .
(صائبة) اذا توازى مستويان فالمستقيم المحتوى في احدهما يوازي الاخر .

(هـ) المستقيمان المخالفان لمستقيم ثالث متخلفان .
(خاطئة) قد يكونان متوازيين .

(و) اذا كان (x)،(y) مستويين غير متوازيين فانهما يتقاطعان بنقطة واحدة .
(خاطئة) لانهما يتقاطعان في خط مستقيم .

(ز) اذا كانت $A , B \in (x)$ فان $\overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \{A , B\}$
(خاطئة) (المستقيم يقطع المستوي في نقطة واحدة وليس في نقطتين)
فالمستقيم محتوى في المستوي .

(ح) كل مستقيم يمكن ان يمر به عدد غير منتهي من المستويات .
(صائبة)
لان تتقاطع المستويات مع بعضها البعض بخط مستقيم واحد كاوراق الكتاب او الدفتر .

(ط) عدد المستويات المختلفة المارة بثلاث نقاط مختلفة ليس على استقامة واحدة هو (3) مستويات
(خاطئة)
لكل ثلاث نقاط ليس على استقامة واحدة يوجد مستوى واحد فقط وحيد يحويها .

(ي) يوجد مستوٍ وحيد يحوي مستقيمين متخالفين
(خاطئة) لان المستقيمين المتخالفين لايمكن ان يحتويهما مستو واحد (لانهما غير متقاطعين وغير متوازيين)

(2) صح ماتراه خطا في العبارات الاتية :

(أ) اذا كان $\overleftrightarrow{K} \subset (x)\ ,\ \overleftrightarrow{L} \cap (x) = \{A\}$

فان $\overleftrightarrow{K} \cap \overleftrightarrow{L} = \{A\}$ حيث $A \in (x)\ ,\ A \in \overleftrightarrow{K}$

(ب) يتقاطع المستويان المختلفان في مستو .

(خاطئة) . يتقاطع المستويان اذا اشتركا بمستقيم واحد فقط

(جـ) اذا كان تقاطع المستقيم $\overleftrightarrow{L}$ والمستوي (x) يساوي ϕ فان $\overleftrightarrow{L} // (x)$

(د) اذا كان $\overleftrightarrow{L} // (x)$ فان $\overleftrightarrow{L} \cap (x) = \{A\}$ حيث $A \in (x)$

الصحيح هو $\overleftrightarrow{L} \cap (x) = \phi$

(هـ) اذا كان المستقيم $\overleftrightarrow{K} \subset (x)$ فان $\overleftrightarrow{K} \cap (x) = \phi$

الصحيح هو $\overleftrightarrow{K} \cap (x) = \overleftrightarrow{K}$

(و) يكون المستويان متوازيين اذا اشتركا في نقطة واحدة على الاقل .

(الصحيح هو يكون المستويان متوازيين اذا لم يشتركا في نقطة واحدة) .

(ز) المستقيم المحتوى في احد مستويين متوازيين يقطع المستوى الاخر

(الصحيح يوازي المستوي الاخر) .

(ح) يكون المستقيم محتوى في المستوي عندما يشترك معه بنقطة واحدة على الاقل .

(الصحيح بنقطتين على الاقل) .

(ط) اذا توازى مستقيمان ومر بكل منهما مستوى وتقاطع المستويان فان مستقيم تقاطعهما يقطع كلا المستقيمين

(الصحيح هو يوازي كلا المستقيمين) .

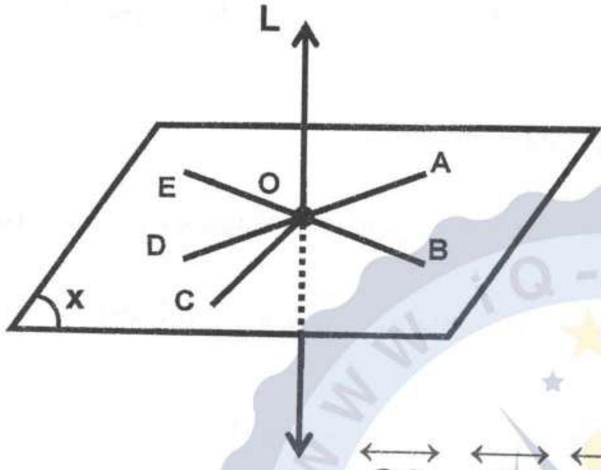
(ي) اذا قطع مستوي كلاً من مستويين متوازيين فان خطي تقاطعه معهما يكونان متخالفين

(الصحيح يكونان متوازيين) .

تعامد المستقيمات والمستويات

تعريف 1 /

المستقيم العمودي على مستو يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي



$\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, ... \subset (x)$, $\overleftrightarrow{L} \perp (x)$

فيكون

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}, ...$

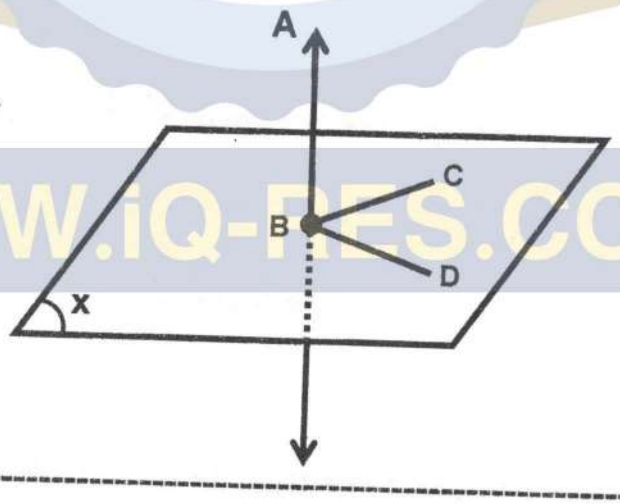
تعريف 2 /

المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \subset (x)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$

فيكون $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

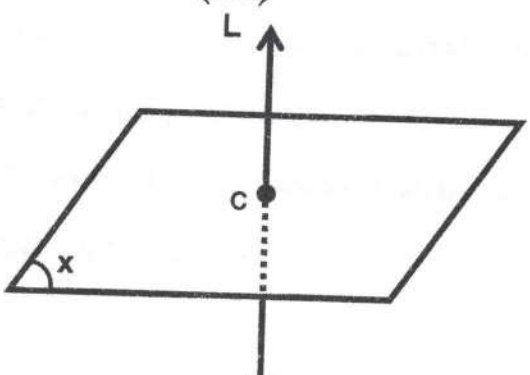


تعريف 3 / من نقطة معلومة يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستو معلوم

C نقطة اما $C \in (x)$ او $C \notin (x)$

$\therefore$ يوجد مستقيم وحيد مثل $\overleftrightarrow{L}$

يمر من نقطة C بحيث $\overleftrightarrow{L} \perp (x)$



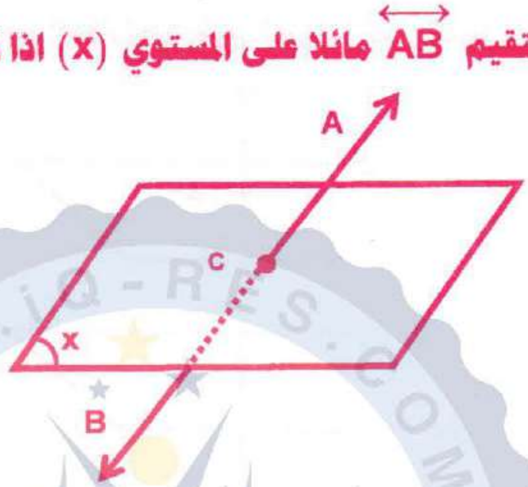
تعريف 4 /

يكون المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ مائلا على المستوي (x) اذا كان قاطعا له وغير عمودي عليه

$\overleftrightarrow{AB} \cap (x) = \{c\}$

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (x)

$\overleftrightarrow{AB}$ مائل على (x)

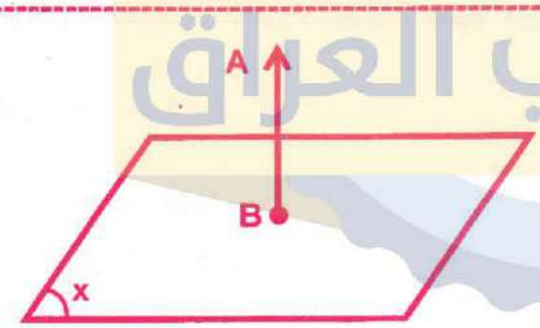


ملاحظة /

يكون $\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (x) اذا كان مائلاً عليه او موازياً له

تعريف 5 /

يقال لطول قطعة المستقيم المحددة بنقطة معلومة
واثر العمود النازل منها على المستوي المعلوم
(بعد النقطة المعلومة عن المستوي)

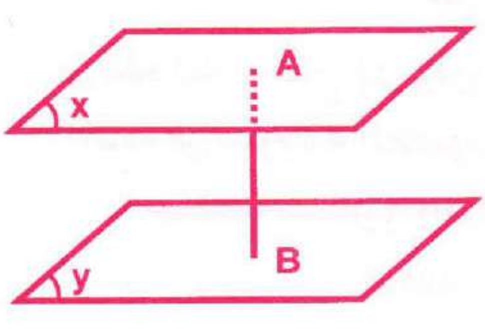


$\overleftrightarrow{AB}$ هو بعد النقطة A عن (x)
وهو اقصر مسافة بين النقطة A و (x)

تعريف 6 /

يقال لطول القطعة المستقيمة العمودية على مستويين متوازيين والمحددة بهما
(البعد بين المستويين المتوازيين)

اذا كان $(x) // (y) , \overline{AB} \perp (x) , \overline{AB} \perp (y)$
اذن $\overline{AB}$ يمثل البعد بين $(x) , (y)$



ملاحظة /

البعد بين مستويين متوازيين ثابت

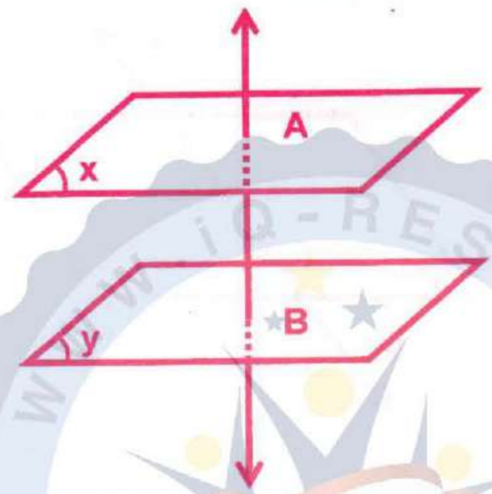
تعريف 7 /

المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر

اذا كان $(x)//(y)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

فان $\overleftrightarrow{AB} \perp (y)$



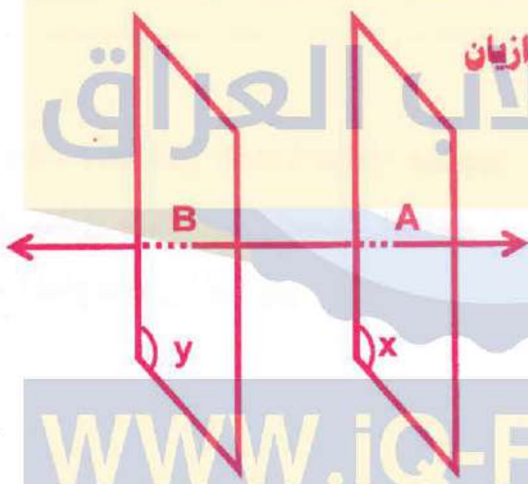
تعريف 8 /

المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان

اذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (y)$

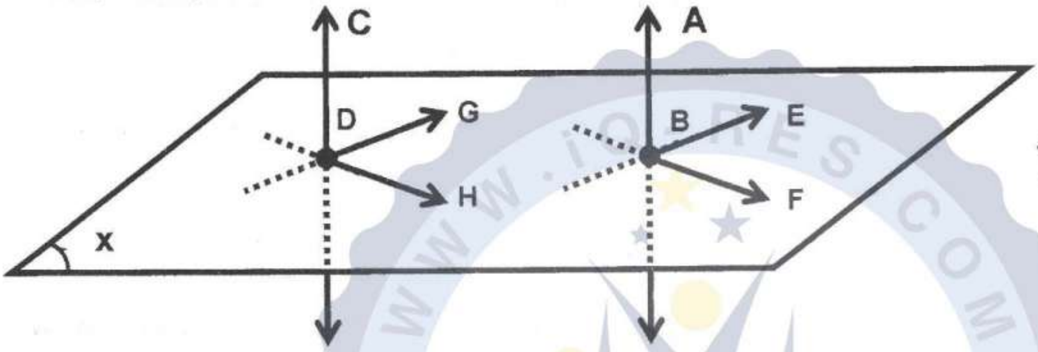
فان $(x)//(y)$



مبرهنة (5)

المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر

المعطيات / $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}\ ,\ \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$



المطلوب اثباته /

$\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان /

$\overleftrightarrow{CD} \cap (x) = \{D\}$

{ المستوي الذي يقطع احد مستقيمين متوازيين يقطع الاخر }

في (x) نرسم $\overleftrightarrow{BF}\ ,\ \overleftrightarrow{BE}$

ثم نرسم $\overleftrightarrow{DG} \parallel \overleftrightarrow{BE}$

$\overleftrightarrow{DH} \parallel \overleftrightarrow{BF}$ { عبارة التوازي }

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG$

$m\angle ABF = m\angle CDH$ { اذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية اخرى تساوى قياسهما وتوازى مستواهما }

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}\ ,\ \overleftrightarrow{BF}$ { العمود على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي }

$\therefore m\angle ABE = m\angle CDG = 90^\circ$

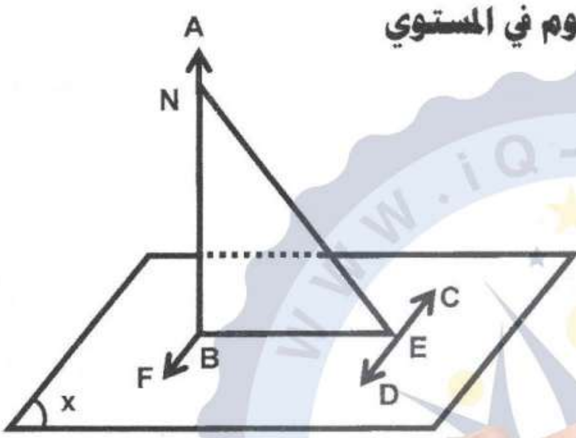
$m\angle ABF = m\angle CDH = 90^\circ$

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ { المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما }

(و.هـ.م)

مبرهنة (6) مبرهنة الاعمدة الثلاثة

اذا رسم من نقطة في مستو مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والاخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي فالمستقيم الواصل بين اية نقطة من نقط المستقيم العمودي على المستوي ونقطة تلاقي المستقيمين يكون عمودياً على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات / $B\in(x)$ ، $\overleftrightarrow{CD}\subset(x)$

$\overleftrightarrow{AB}\perp(x)$ ، $\overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

المطلوب اثباته / $\forall N\in\overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{NE}\perp\overleftrightarrow{CD}$

البرهان / من نقطة B نرسم $\overleftrightarrow{BF}\parallel\overleftrightarrow{CD}$

$\because \overleftrightarrow{CD}\subset(x)$ {معطى}

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF}\subset(x)$ {اذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما ونقطة من الاخر يحويهما}

$\because \overleftrightarrow{BE}\perp\overleftrightarrow{CD}$ {معطى}

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF}\perp\overleftrightarrow{BE}$ {في المستوي الواحد المستقيم العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر}

$\because \overleftrightarrow{AB}\perp(x)$ {معطى}

$\therefore \overleftrightarrow{NB}\perp\overleftrightarrow{BF}$ {المستوي العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي}

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BF}\perp(NBE)$ {المستقيم العمود على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما}

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp(NBE)$ {المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر}

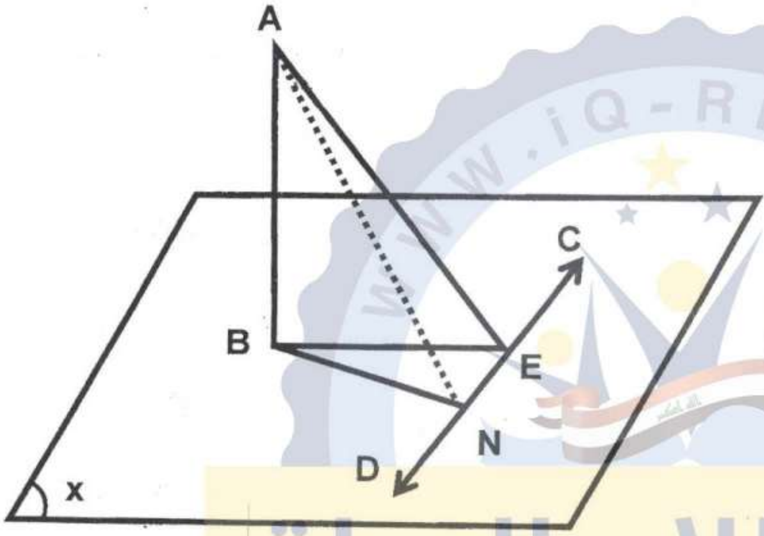
$\therefore \overleftrightarrow{EN}\perp\overleftrightarrow{CD}$ {المستوي العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المرسومة من اثره ضمن ذلك المستوي}

وهذا شان كل مستقيم يصل اية نقطة من نقاط $\overleftrightarrow{AB}$ بالنقطة E يكون عموديا على $\overleftrightarrow{CD}$

(و.هـ . م)

نتيجة مبرهنة (6) مبرهنة الاعمدة الثلاثة

اذا رسم من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم مستقيمان احدهما عمودي على المستوي والاخر عمودي على مستقيم معلوم في المستوي . فالمستقيم الواصل بين اثري العمودين يكون عموديا على المستقيم المعلوم في المستوي



المعطيات/ $\overleftrightarrow{CD} \subset (x)$ ، $A \notin (x)$

$\overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

البرهان / ان لم يكن $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ من نقطة B

نرسم $\overleftrightarrow{NB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ {يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه}

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ {معطى}

$\therefore \overleftrightarrow{AN} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\because \overleftrightarrow{AE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ {معطى}

$\therefore \overleftrightarrow{AN} \equiv \overleftrightarrow{AE}$ {يمكن رسم مستقيم عمود وحيد على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي اليه}

$\therefore N = E$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{BE} \equiv \overleftrightarrow{BN}$

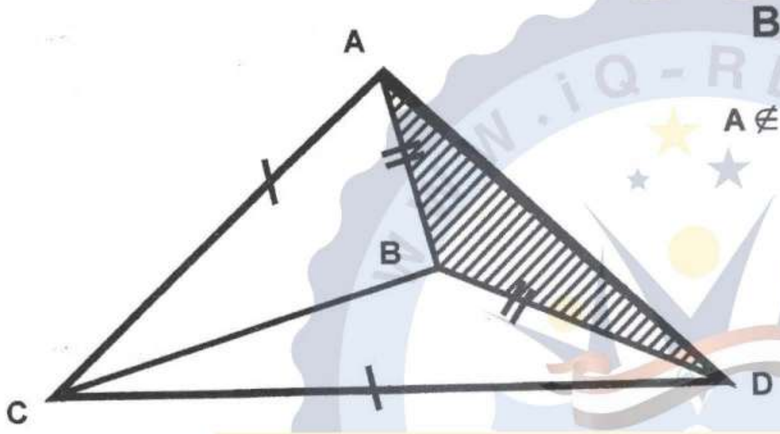
$\therefore \overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$

(و.هـ . م)

مثال محلول

(1) مثلث BCD قائم الزاوية في B ، A نقطة ليست في مستوي هذا المثلث بحيث AC=CD

AB=BD برهن ان $\overline{BC}$ عمودي على مستوي المثلث ABD



__المعطيات/__ المثلث BCD قائم الزاوية في B

$A \notin (BCD)$, $AB = BD$, $AC = CD$

__المطلوب اثباته /__ $\overline{BC} \perp (ABD)$

__البرهان /__ المثلثان ABC , BCD فيهما :

$AB = BD$ } معطى

$AC = CD$

$\overline{BC}$ ضلع مشترك

∴ يتطابق المثلثان يتساوى ثلاثة اضلاع من احدهما مع ثلاثة اضلاع من الاخر

ومن التطابق ينتج : $m\angle CBD = m\angle ABC = 90°$

$\because \overline{BC} \perp \overline{BD}$

$\overline{BC} \perp \overline{AB}$

$\therefore \overline{BC} \perp (ABD)$ {المستقيم العمود على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عموديا على مستويهما}

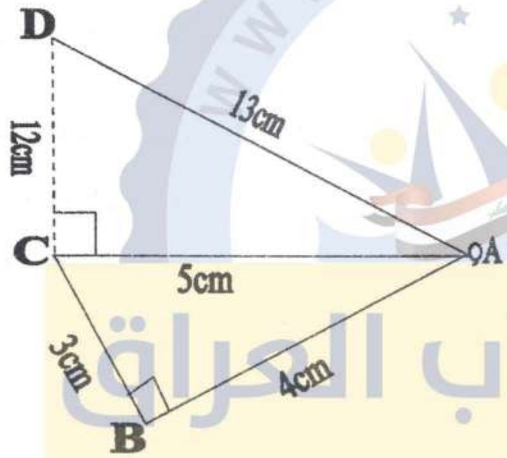
(و.هـ . م)

حلول تمارين (2 – 7)

(1) ABC مثلث قائم الزاوية في B ، $\overline{AB} = 4cm$ ، $\overline{BC} = 3cm$ ، رسم $\overline{CD} \perp (ABC)$ بحيث $\overline{CD} = 12cm$. جد طول $\overline{AD}$ ؟

<u>المطلوب اثباته</u> / ايجاد طول $\overline{AD}$

<u>البرهان</u> / في المثلث ABC القائم الزاوية في B



$\overline{AB} = 4cm$
$\overline{BC} = 3cm$
} معطى

$$(\overline{AC})^2 = (\overline{BC})^2 + (\overline{AB})^2$$

$$(\overline{AC})^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$\overline{AC} = 5\ cm$$

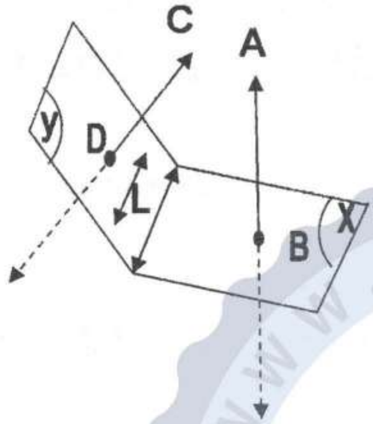
$$(\overline{AD})^2 = (\overline{CD})^2 + (\overline{AC})^2$$

$$(\overline{AD})^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$$

$$\overline{AD} = 13\ cm$$

(و.هـ. م)

(2) برهن على ان المستقيمين العموديين على مستويين متقاطعين لا يتوازيان ؟



المعطيات / $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{L}$

$\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$, $\overleftrightarrow{CD} \perp (y)$

المطلوب اثباته / $\overleftrightarrow{AB} \not\parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان / نفرض ان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

بما ان $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى) $\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ ،

لكن $\overleftrightarrow{CD} \perp (y)$ { المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عموديا على الاخر }

$\therefore (x) \parallel (y)$ { المستويان العموديان على مستقيم واحد متوازيان }

وهذا خلاف المعطى حيث ان (x) يقطع (y)

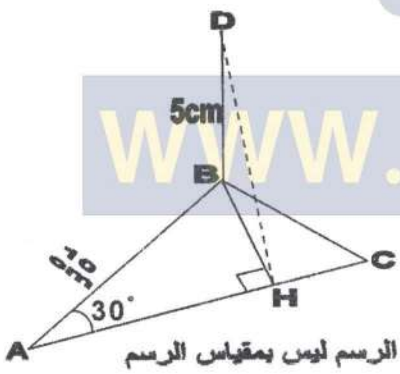
$\therefore \overleftrightarrow{AB} \not\parallel \overleftrightarrow{CD}$

(و.هـ . م)

---

(3) في $\triangle ABC$ ، $m\angle A = 30°$ ، $\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $\overline{BD} = 5cm$ ، $\overline{AB} = 10cm$

فاذا كان $\overline{BH}$ عمودي على $\overline{AC}$ جد قياس BHD



الرسم ليس بمقياس الرسم

المطلوب اثباته / ايجاد قياس $m\angle BHD$

البرهان / $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ (معطى)

$\therefore \triangle BHA$ قائم الزاوية في H

$$\sin 30° = \frac{BH}{AB}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{BH}{10} \rightarrow BH = \frac{10}{2}$$

$BH = 5$ cm

$\therefore \overline{BD} \perp \overline{BH}$

في $\triangle DBH$ قائم الزاوية في B فيه،

$\overline{DB} = \overline{DH} = 5$ cm

$\therefore \triangle DBH$ قائم الزاوية ومتساوي الساقين

وهذا يعني ان قياس $m\angle BHD = 45°$

(و.هـ . م)

الفصل الثامن

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

[1 – 8] مبدا العد Counting Method

اذا امكن اجراء عملية ما بكيفيات مختلفة عددها (m) وبعد ان اجريت العملية باحدى هذه الكيفيات وجد انه يمكن اجراء عملية اخرى بكيفيات مختلفة عددها (n) فان عدد الكيفيات المختلفة التي يمكن بها اجراء العمليتين معاً هو $\boxed{m \times n}$

لانه اذا اجريت العملية الاولى باحدى الكيفيات التي عددها (m) مقابل ذلك إمكان اجراء العملية الثانية بأي كيفية من الكيفيات التي عددها (n) فهناك اذن (n) من الكيفيات المختلفة لاجراء العمليتين معاً مقابل كل كيفية من الكيفيات الممكن اجراء العملية الاولى بها أي ان لكل من الكيفيات التي عددها (m) الممكن اجراء العملية الاولى بها (n) من الكيفيات المختلفة لاجراء العمليتين معاً وذلك ينتج ان عدد الكيفيات التي بها يمكن اجراء العمليتين معاً هو حاصل الضرب (m×n) .

مثال 1 /

يوجد لدى صاحب مخزن ثلاثة انواع من الدراجات الهوائية ومن كل نوع يوجد اربعة احجام ومن كل حجم يوجد ست دراجات فما عدد الدراجات ؟

الحل / عدد الدراجات هو : $3 \times 4 \times 6 = 72$ دراجة

مثال 2 /

كم عدد رمزه مكون من ثلاث مراتب يمكن تكوينه من مجموعة الارقام { 9 , 8 , 7 , 5 , 2 , 1 }

أ / التكرار مسموح

ب / التكرار غير مسموح

الحل / أ / التكرار مسموح

عدد اختبارات الرقم الاول = 6

عدد اختبارات الرقم الثاني = 6

عدد اختبارات الرقم الثالث = 6

عدد الاعداد = $6 \times 6 \times 6 = 216$ عدد

ب / التكرار غير مسموح

عدد اختبارات الرقم الاول = 6

عدد اختبارت الرقم الثاني = 5

عدد اختبارات الرقم الثالث = 4

عدد الاعداد = $6 \times 5 \times 4 = 120$ عدد

مثال 3/

كم عدد رمزه مكون من رقمين واصغر من (40) يمكن تكوينه باستخدام الارقام {5 , 4 , 3 , 2 , 1}

أ/ تكرار الرقم مسموح في العدد نفسه

ب/ تكرار الرقم غير مسموح في العدد نفسه

الحل /

أ/ عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5 ← تكرار الرقم مسموح

15 = 3 × 5 = عدد الاعداد

ب/ عدد اختيارات رقم العشرات = 3

عدد اختيارات رقم الاحاد = 4

تكرار الرقم غير مسموح رقم العشرات يخرج للعدد الاول (4 = 1 − 5)

12 = 4 × 3 = عدد الاعداد

مثال 4/

كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب واكبر من **500** يمكن تكوينه من الارقام : {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7}

أ/ تكرار الرقم مسموح

ب/ تكرار الرقم غير مسموح

الحل /

أ/ عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم الاحاد = 7

147 = 3 × 7 × 7 = عدد الاعداد

ب/ عدد اختيارات رقم المئات = 3

عدد اختيارات رقم العشرات = 6

عدد اختيارات رقم الاحاد = 5

عدد 90 = 3 × 6 × 5 = عدد الاعداد

[8 − 1 − 1] رمز المضروب

يظهر في احيان كثيرة في الرياضيات ضرب الاعداد الصحيحة الموجبة من العدد (n) حتى العدد (1) ويرمز له $\underline{n|} = n!$ ويقرا : (مضروب n)

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\ \dots\ 1}$$

مثال 1 / $5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$

اتفق على ان $\boxed{1! = 1}$ ، $\boxed{0! = 1}$

ولاثبات ان $\boxed{0! = 1}$ حيث

الحل / $n! = n(n-1)!$

نفرض ان $n = 1$

$1! = 1(1-1)!$

$1 = 1\times0!$ (مضروب الـ 1 = 1)

$$\therefore 0! = \frac{1}{1} = 1$$

مثال 2 / اذا كان $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$ **فجد قيمة (n) ؟**

الحل /

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 30$$

$$\therefore \frac{(n+1)n\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = 30$$

$$(n+1)n = 30$$

$$n^2+n-30 = 0$$

$$(n-5)(n+6) = 0$$

$$\therefore n=5 \ , \ n=-6$$

6 – يهمل لان n يجب ان تكون عدد صحيح موجب

مثال 3 / اذا كان $n! = 5040$ **فما قيمة (n) ؟**

الحل /

نحلل الى العوامل المتسلسلة وهذه العوامل هي ليست عوامل اولية ولا هي عوامل العدد (5040)

5040	1
5040	2
2520	3
840	4
210	5
42	6
7	7
1	

$$n!=5040$$

$$\therefore n! = 7\times6\times5\times4\times3\times2\times1$$

$$n! = 7!$$

$$n = 7$$

التباديل

يسمى وضع (n) من الاشياء في ترتيب معين بانه تبديل لهذه الاشياء (**بشرط ان تاخذ جميع هذه الاشياء**) وتقرأ تبديل (n) مأخوذ منه (r) ويرمز للتباديل :

$$\boxed{P^n_r} \text{ أو } \boxed{P(n,r)}$$

[1 - 2 – 8] قوانين التباديل

(1) $P^n_r = P(n,r) = n(n-1)(n-2)....(n-r+1) \quad r < n$ **حيث**

(2) $P^n_n = n! = n(n-1)(n-2)......1$

(3) $P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

(4) $P^n_0 = 1$

مثال / لنفرض ان (7) أشخاص يريدون الجلوس على (3) كراسي . فبكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي؟

الحل / الكرسي الاول يمكن ملؤه بعدد من الطرق وهي 7

الكرسي الثاني يمكن ملؤه بطرق عددها 6

الكرسي الثالث يمكن ملؤه بطرق عددها 5

وبذلك يكون عدد كل الطرق الممكن اجراؤها يساوي

$7\times6\times5=210$ طريقة

نلاحظ من المثال انه يوجد (7) أشخاص أخذ منهم ثلاثة للجلوس .

عندئذ نقول تباديل (7) ماخوذة ثلاثة ثلاثة ويرمز لها $P(7,3)$ أو P_3^8 فيكون

$$P_3^8=7\times6\times5!=210$$

مثال 1 / إحسب P_3^8

الحل / حسب القانون الثالث

$$P_3^8=\frac{8!}{(8-3)!}=\frac{8\times7\times6\times5!}{5!}=336$$

* وممكن حل المثال حسب القانون الاول كما يلي

$$P_3^8=\overset{(1)}{8}\times\overset{(2)}{7}\times\overset{(3)}{6}=336$$

مثال 2 / إحسب P_4^4

الحل / (حسب القانون الثاني)

$$P_4^4=4!=\overset{(1)}{4}\times\overset{(2)}{3}\times\overset{(3)}{2}\times\overset{(4)}{1}=24$$

مثال 3 / إحسب P_0^5

الحل / (حسب القانون الرابع)

$$P_0^5=1$$

ويمكن توضيح ذلك حسب القانون الثالث

$$P_0^5=\frac{5!}{(5-0)!}=\frac{5!}{5!}=1$$

مثال 4 / جد عدد التباديل للحروف أ ، ب ، ج المأخوذ منها اثنين في كل مرة ؟

الحل / $P_2^3=3\times2=6$

مثال 5 / ما عدد طرق توزيع (4) اشخاص على (4) وظائف شاغرة بحيث كل شخص له فرصة عمل متساوية مع الاخرين ؟

الحل / عدد الطرق $24=4\times3\times2\times1=P_4^4$

مثال 6/ بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة اشخاص في حفل ان يرتبوا انفسهم بحيث يجلسون في صف مستقيم به سبعة مقاعد ؟

الحل / عدد الطرق

$$P_7^7=7!=7\times6\times5\times4\times3\times2\times1=5040$$

مثال7 / جد قيمة (n) اذا كان $P_2^n = 90$

الحل /

$P_2^n=90$

$n(n-1) = 90$

$n^2-n-90 = 0$

$(n-10)(n+9) = 0$

$n=10$, $n=-9$ يهمل

[8 – 3] التوافيق Combination

هو كل مجموعة يمكن تكوينها من مجموعة من الاشياء مأخوذة كلها او بعضها بصرف النظر عن ترتيبها ويرمز لها :

$$\boxed{C_r^n = \binom{n}{r} = C(n,r)}$$

[8 – 3 - 1] قوانين التوافيق

(1) $C_r^n=\dfrac{P_r^n}{r!}$

(2) $C_r^n=\dfrac{n!}{(n-r)!\times r!}$

(3) $C_r^n=C_{n-r}^n$

(4) $C_n^n=C_0^n=1$

(5) $C_1^n=n$

مثال 1/ إحسب كل من :

$$\left.\begin{aligned}&(1)\ C_2^5=\frac{5\times4}{2\times1}=10\\ &(2)\ C_3^8=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56\end{aligned}\right\}\text{حسب القانون الاول}$$

مثال2/ كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من (6) اشخاص ؟

الحل /

$$C_3^6=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$$

مثال3/ اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة الرياضيات هو (8) اسئلة المطلوب حل (5) اسئلة فقط . بكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل /

$$C_5^8=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}=56$$

مثال4/ بكم طريقة يمكن اختيار لجنة من ثلاثة رجال وسيدتين من بين (7) رجال و (5) سيدات ؟

الحل / يمكن اختيار ثلاثة رجال من بين سبعة رجال بطرق عددها C_3^7

يمكن اختيار السيدتين من بين خمسة سيدات بطرق عددها C_2^5

اذن اختيار اللجنة بطرق عددها :

$$C_3^7 \times C_2^5 = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} \times \frac{5\times4}{2\times1} = 350$$

مثال5 / كيس فيه (10) كرات حمراء و (6) كرات بيضاء سحبت منه (4) كرات معاً دون ارجاع .

ما عدد الطرق التي تكون فيها الكرات المسحوبة من نفس اللون ؟

الحل /

$$C_4^{10} + C_4^6 = \frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1} + \frac{6\times5\times4\times3}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 210 + 15 = 225 \text{ عدد الطرق}$$

مثال6/ اثبت ان :

$$\binom{70}{3} = \binom{70}{67}$$

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \quad \text{حسب القانون الثالث}$$

$$\therefore \binom{70}{3} = \binom{70}{70-3} = \binom{70}{67}$$

مثال7/ جد قيمة (n) اذا كان $C_2^n = 55$

الحل/

$$C_2^n = \frac{n(n-1)}{2\times1}$$

$$\therefore \frac{n(n-1)}{2\times1} = 55$$

$$n(n-1) = 110$$

$$n^2 - n - 110 = 0$$

$$(n-11)(n+10) = 0$$

$n = 11$, $n = -10$ يهمل

[8 – 4]

عدد طرق سحب عينة عناصرها (r) من مجموعة عدد عناصرها (n) حيث $n \in N^{+}$, $n \geq 1$, $r \leq n$

ملاحظة / عند السحب يجب مراعاة الاتي :

(1) السحب بالارجاع يعني ان كل عينة تسحب تُعاد الى المجموعة الاصلية قبل الشروع بسحب عينة اخرى

(2) السحب بدون ارجاع يعني ان العينة التي تسحب لاتعاد مرة اخرى الى المجموعة الاصلية .

والمخطط الاتي يوضح عملية السحب :-

عدد طرق سحب لعينة (r) من مجتمع حجمه (n)

بالارجاع		بدون ارجاع	
وجود ترتيب	بدون ترتيب	وجود ترتيب	بدون ترتيب
عدد الطرق $= n^{r}$	عدد الطرق $= C_{r}^{n+r-1}$	عدد الطرق P_{r}^{n}	عدد الطرق C_{r}^{n}

ملاحظة / اذا لم تذكر طريقة السحب فتعتبر دون ارجاع ولا وجود للترتيب

مثال 8 / بكم طريقة يمكن سحب (3) كرات من وعاء به (7) كرات

(أ) مع الارجاع ومراعاة الترتيب

(ب) مع الارجاع وعدم مراعاة الترتيب

(ج) دون الارجاع ومراعاة الترتيب

(د) دون الارجاع وعدم مراعاة الترتيب

الحل /

(أ) عدد الطرق $n^{r}=7^{3}=7\times7\times7=343$

(ب) عدد الطرق $C_{r}^{n+r-1}=C_{3}^{7+3-1}=C_{3}^{9}=\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84$

(ج) عدد الطرق $P_{3}^{7}=7\times6\times5=210$

(د) عدد الطرق $C_{3}^{7}=\dfrac{7\times6\times5}{3\times2\times1}=35$

حلول تمارين (1 - 8)

(1) في معرض للسيارات توجد (5) انواع من السيارات ومن كل نوع (3) نماذج ومن كل نموذج توجد (4) فما عدد السيارات في المعرض ؟

الحل / عدد السيارات = $5\times3\times4 = 60$ سيارة

---

(2) كم عدد زوجي يمكن تكوينه من اربع مراتب مأخوذة من الارقام $\{5,1,6,2,7,4,8\}$

(أ) التكرار مسموح به في العدد نفسه .

(ب) التكرار غير مسموح به في العدد نفسه .

الحل / (أ) **التكرار مسموح به**

عدد اختيارات رقم الاحاد (زوجي) = 4 أرقام زوجية

عدد اختيارات رقم العشرات = 7

عدد اختيارات رقم المئات = 7

عدد اختيارات رقم الالاف = 7

عدد الاعداد الزوجية الممكن تكوينها = عدد $1372 = 7\times7\times7\times4$

(ب) **التكرار غير مسموح به**

عدد اختيارات رقم الاحاد (زوجي) = 4

عدد اختيارات رقم العشرات = 6

عدد اختيارات رقم المئات =5

عدد اختيارات رقم الالاف = 4

عدد الاعداد الزوجية الممكن تكوينها = عدد $480 = 4\times5\times6\times4$

---

(3) صندوق يحتوي على (10) مصابيح ، (4) منها عاطلة . سحبت ثلاثة (3) مصابيح .

جد عدد طرق سحب :

(أ) اثنان صالحة وواحد عاطل .

(ب) على الاقل مصباح صالح .

الحل/ لم تذكر طريقة السحب لذلك تعتبر دون ارجاع ولا وجود للترتيب

∴ يطبق قانون التوافق C^n_r

(أ) ان تكون اثنان صالحة وواحد عاطل $\quad 10-4 = 6$ (صالحة 6، عاطلة 4)

عدد الطرق $C^{n1}_{r1}\times C^{n2}_{r2}=C^6_2.C^4_1=\dfrac{6\times5}{2\times1}\times\dfrac{4}{1}=60$

(ب) ان يكون على الاقل مصباح صالح

عدد الطرق = عدد الطرق الكلي – عدد طرق سحب ثلاثة عاطلة

$$C^{10}_3-C^4_3=\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}-\frac{4\times3\times2\times1}{3\times2\times1}=116$$

OR

طريقة اخرى $\boxed{C^6_1\times C^4_2+C^6_2\times C^4_1+C^6_3 = 116}$

---

(4) اذا كان عدد اسئلة امتحان مادة ما ، هو (8) اسئلة وكان المطلوب حل خمسة اسئلة منها فقط بشرط ان تكون ثلاثة منها من الاسئلة الاربعة الاولى . فبكم طريقة يمكن الاجابة ؟

الحل / بالطريقة الاعتيادية

(الثلاثة اسئلة ٣) من (٤ الاربعة الاولى)

عدد الطرق عند ترك سؤال واحد من الاربعة اسئلة الاولى هو :

$$C_3^4=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4 \quad \text{OR} \quad C_1^4=\frac{4}{1}=4$$

عدد الطرق عند ترك السؤلان من الاربعة الثانية ٢ من ٤ سؤالين من الاربعة الثانية او عند حل سؤالين من الاربعة الثانية

$$C_2^4=\frac{4\times3}{2\times1}=6$$

عدد الطرق الاجمالي $C_3^4.C_2^4=4\times6=24$

---

(5) ماعدد الطرق لاختيار فريق لكرة الطائرة من (6) لاعبين من بين (11) لاعب .
(الاختيار دون ارجاع وعدم مراعاة الترتيب) ؟

الحل / نطبق قانون التوافيق من ملاحظة السؤال

عدد الطرق $C_6^{11}=\frac{11\times10\times9\times8\times7\times6}{6\times5\times4\times3\times2\times1}=462$

---

(6) بكم طريقة يمكن اختيار لجنة مؤلفة من خمسة اشخاص على شرط ان تحتوي على (3)طلاب و (2) طالبة من بين (7) طلاب و (6) طالبات .

(أ) استبعاد احد الطلاب من اللجنة

(ب) احدى الطالبات لايحق لها المشاركة في اللجنة .

الحل /

(أ) عدد الطرق = $C_3^6\times C_2^6=\frac{\cancel{6}^{2}\times5\times\cancel{4}^{2}}{\cancel{3}_{1}\times\cancel{2}\times1}\times\frac{\cancel{6}^{3}\times5}{\cancel{2}\times1}=300$

(ب) عدد الطرق = $C_3^7\times C_2^5=\frac{7\times\cancel{6}\times5}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}\times\frac{5\times\cancel{4}^{2}}{\cancel{2}\times1}=350$

---

(7) جد قيمة (n) اذا كان

(1) $P_2^n=72$

الحل /

$n(n-1)=72$

$n^2-n-72=0 \rightarrow (n-9)(n+8)=0$

$\rightarrow n=9 \ , \ n=-8$ يهمل

(2) $\binom{n}{2}=10$

الحل /

$$\frac{n(n-1)}{2\times1}=10$$

$$n(n-1)=20$$

$$n^2-n-20=0 \rightarrow (n-5)(n+4)=0 \rightarrow n=5\ ,\ n=-4$$ يهمل

---

(3) $2\binom{n}{2}=\binom{n+3}{3}$

الحل /

$$2\times\frac{n(n-1)}{2\times1}=\frac{(n+1)n(n-1)}{3\times2\times1}$$

$$n(n-1)=\frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$

$$6n\cancel{(n-1)}=n\cancel{(n-1)}(n+1)$$

$$n+1=6 \rightarrow n=5$$

---

(8) كم عدد رمزه مكون من ثلاثة مراتب واصغر من 600 يمكن تكوينه من الارقام {5,3,6,2,7,9}
(أ) يسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه
(ب) لايسمح بتكرار الرقم في العدد نفسه

الحل /

الاصغر من 600 تكونه 5,3,2 كالارقام مئات

(أ) عدد اختيارات رقم المئات = 3
عدد اختيارات رقم العشرات = 6
عدد اختيارات رقم الاحاد = 6

عدد الاعداد $3\times6\times6=108$

(ب) عدد اختيارات رقم المئات = 3
عدد اختيارات رقم العشرات = 5
عدد اختيارات رقم الاحاد = 4

عدد الاعداد $3\times5\times4=60$

---

(9) اذا كانت $x=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ فكم عدد رمزه مكون من (5) ارقام مختلفة يمكن تكوينه من عناصر x ؟

الحل / طالما الاعداد مختلفة يعني الترتيب مهم لذلك نستخدم التباديل

فالعدد مثلاً $(56423\neq65423)$

$(32456\neq65423)$

$$P(n,r)=P(9,5)=9\times8\times7\times6\times5$$

عدد الاعداد $=15120$

[5 - 8] الاحتمال Probablity

نبذة تأريخية

في منتصف القرن السابع عشر ومن خلال الابحاث التي قام بها كل من باسكال (pascal) وفيرمات (fermat) عند دراستهم لارقام معينة في عالم المراهنة نشأت (نظرية الاحتمالات) واصبحت الان تكتسب اهمية كبيرة في مجالات متعددة مثل الارصاد الجوية ، العلوم الهندسية ، التأمين ، الطب الحيوي حيث نظرية الوراثة تعتبر افضل تطبيق لنظرية الاحتمالات في هذا المجال والتي جاءت عن طريق (العالم مندل) .

بعض المفاهيم الاساسية

(1) التجربة (Experiment)

هو القيام بفعل معين ثم ملاحظة جميع ماينتج عن هذا الفعل .

(2) التجربة العشوائية (Random Experiment)

وهي التجربة التي تحقق الشرطين التاليين :

(أ) يمكن لنا ان نصف جميع نواتج التجربة قبل وقوعها .

(ب) لا يمكن تحديد أي من النواتج ، التي يمكن ان تتحقق فعلاً في حالة حدوث التجربة .

مثال 1/

رمي حجر النرد (Dice) مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي (الوجه الظاهر) ، نعلم مسبقاً ان الوجه الظاهر في الرمية سيكون احد الارقام (1,2,3,4,5,6) أي يمكن تحديد جميع النتائج الممكنة لكن من غير الممكن تحديد النتيجة بعينها لذا سميت هذه التجربة بالتجربة العشوائية .

(3) فضاء العينة (Sample Space)

فضاء العينة في تجربة عشوائية هو جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة ويرمز له S ويرمز الى عدد عناصر الفضاء بالرمز n(s) ففي المثال السابق :

فضاء العينة $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

عدد عناصر الفضاء $n(s) = 6$

(4) الحدث (Event)

هو مجموعة جزئية من فضاء العينة ، A حدث من فضاء العينة S . $\boxed{A \subseteq S}$

(5) الاحداث الشاملة

لتكن C,B,A احداث من فضاء العينة S يقال لهذه الاحداث شاملة اذا حققت الشروط التالية :

(1) اتحاد الاحداث = S فضاء العينة .

(2) تقاطعها مثنى مثنى (كل اثنين منهما) = $\emptyset$

(3) كل مجموعة منها ليست خالية .

مثال 2/ ليكن $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

نأخذ بعض الاحداث من S

$A_1=\{4,1\}$ حدث مركب (compound Event) لان عدد عناصره اكبر من (1)

$A_2=\{3\}$ حدث بسيط (Simple Event) لان عدد عناصره = 1

$A_3=\{6\}$ بسيط

$A_4=\{1,2,3,4,5\}$ مركب

A_5 = عدد يقبل القسمة على (5) ، (2) في نفس الوقت ← $A5=\emptyset$

A_5 = حدث مستحيل (Impossible Event)

$A_6=\{5,2\}$ مركب

$A_7=\{6,5,3,2\}$ مركب

$A_8=\{1,3,4,2,5,6\}$ = A_8 حدث مؤكد Sure Event) لان $A_8=S$

نلاحظ A_7 و A_1 احداث شاملة من S لماذا ؟

(1) $A_1 \cup A_7 = \{4,1\} \cup \{6,5,3,2\} = \{1,2,3,4,5,6\} = S$

(2) $A_1 \cap A_7 = \{4,1\} \cap \{6,5,3,2\} = \phi$

(3) $A_1 = \{4,1\} \neq \phi$, $A7 = \{6,5,3,2\} \neq \phi$

العمليات على الحوادث

(1) $A \subseteq S$ معناه A حدث من S .

(2) $\emptyset$ تسمى بالحدث المستحيل (الحدث الذي لا يمكن وقوعه) .

(3) S فضاء العينة = الحدث المؤكد (يقع دائماً) .

(4) Ac=S-A يسمى الحدث المكمل للحدث A (او عدم وقوع الحدث A)

Ac = Complement Event

(5) $B \cup A$ يعني حدث وقوع الحدث A او B أي حدث وقوع احد الحدثين على الاقل .

(6) $B \cap A$ يعني حدث وقوع الحدث A و B أي حدث وقوع الحدثين معاً .

(7) $A \subseteq B$ يعني حدث وقوع الحدث A يستلزم وقوع الحدث B .

(8) $A \cap B = \phi \Leftrightarrow$ B , A حدثين متنافيين Mutually Exclusive Event .

(9) الحدث الذي يتكون من عنصر واحد يسمى حدث بسيط .

(10) الحدث الذي يتكون من عنصرين او اكثر يسمى حدث مركب .

ملاحظة / اذا كانت تجربة مركبة من تجربتين متتاليتين ولكن فضاء العينة الاولى S_1 والثانية S_2 فأن :

(1) فضاء العينة للتجربة المركبة = $S_1 \times S_2$ (حاصل ضرب ديكارتي)

(2) " مبدأ العد" $n(s) = n(S_1) \times n(S_2)$ (عدد العناصر = n)

مثال3/ التجربة : إلقاء حجز نرد ثم قطعة نقود ثم حجر نرد مرة اخرى التجربة هنا مركبة . من التجارب الثلاث الاتية :

الحل / فضاء العينة لحجر النرد الاول $S_1=\{1,2,3,4,5,6\}$

فضاء العينة لقطعة النقود $S_2=\{H,T\}$

حيث

H(Head) = الصورة

T(Tail) = الكتابة

فضاء العينة لحجر النرد الثاني $S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$

فأن (يمثل فضاء العينة للتجربة المركبة) $S = S_1 \times S_2 \times S_3$

∴ عدد عناصر فضاء العينة للتجربة المركبة $n(s)=n(s1)\times n(s2)\times n(s3)$

$n(s) = 6\times2\times6 = 72$ ثلاثي مرتب

حلول تمارين (2 – 8)

(1) رمينا حجرين من احجار النرد ، جد :-

(أ) عدد عناصر فضاء العينة $n(s)$.

(ب) اكتب فضاء العينة S

(ج) اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين ≥ 9 .

(د) اكتب الحدث الذي قيمة مجموع العددين على وجهي الحجرين يقبل القسمة على ٦ بدون باق .

(هـ) اكتب الحدث الذي قيمة العدد الذي على وجه احد الاحجار ضعف العدد الذي على وجه الحجر الاخر.

الحل /

(أ) عدد عناصر فضاء العينة

$n(s) = n(s_1)\times n(s_2)$

$=6\times6=36$

(ب) فضاء العينة

$$S=\left\{\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\end{array}\right\} \quad 6\times6=36,\ 6^2=36$$

(ج) الحدث $A=\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(4,6),(6,4),(5,6),(6,5)(5,5),(6,6)\}$

(د) الحدث $B=\{(1,5),(5,1),(4,2),(2,4),(3,3),(6,6)\}$

(هـ) الحدث $C=\{(2,1),(4,2),(6,3),(1,2),(2,4),(3,6)\}$

---

(2) من رمي حجر نرد مرة واحدة اكتب الاحداث الاتية ثم بين أي الحدثين منهما متنافيين :-

(أ) الحدث ظهور عدد أولي .

(ب) الحدث ظهور عدد زوجي .

(ج) الحدث ظهور عدد فردي .

الحل /

(أ) ظهور عدد اولي (العدد ١ لاحظ لايعتبر عدد اولي) $A=\{2,3,5\}$

(ب) ظهور عدد زوجي $B=\{2,4,6\}$

(ج) ظهور عدد فردي $C=\{1,3,5\}$

الحدثين C,B متنافيين $B\cap C=\varnothing, \{2,4,6\}\cap\{1,3,5\}=\varnothing$

---

(3) رميت ثلاث قطع نقدية مرة واحدة جد :-

(أ) صف فضاء العينة .

(ب) جد الحث وجه واحد على الاقل صورة (H) .

(ج) ظهور على الاكثر كتابة (T) .

الحل /

(أ) فضاء العينة $S=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)$

$(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$ $\quad 2^3=8$

(ب) على الاقل صورة ← تعني صورة واحدة فأكثر

$A=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

(ج) على الاكثر كتابة ← تعني كتابة واحدة فأقل

$B=\{(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,H,H)\}$

تعريف

ليكن A حدث من S حيث فضاء ذي احتمالات متساوية (فضاء منتظم Uniform Space)

[8 – 5] نسبة الاحتمال Probability

$$\text{نسبة احتمال حدوث الحدث } A = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر الفضاء}} \qquad \text{الاحتمال}=P \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

[8 – 5 - 1] قوانين الاحتمال

ليكن كل من B , A حدثين من S

القانون الاول /

$0 \le P(A) \le 1$ حيث $P(A) = 0$ اذا كان A حدثا مستحيلا

$P(A) = 1$ اذا كان A حدثا مؤكدا

أي ان نسبة احتمال أي حدث تنتمي للفترة المغلقة [0 , 1]

القانون الثاني /

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ حدثان مستقلان (احتمال حدوث أي منهما لا يشترط حدوث الاخر)

القانون الثالث /

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

اذا كان $A\cap B=\phi$ يكون : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

القانون الرابع/

$P(A) + P(A^c) = 1$

أي ان $P(A^c) = 1 - P(A)$

مثال 1 / اقراص مرقمة من 10 الى 21 سحب منها قرص واحد ، جد نسبة احتمال ان هذا القرص يحمل عدداً زوجياً او عدداً يقبل القسمة على (3) بدون باق ؟

الحل /

$S=\{10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21\}$

نستخرج عدد عناصر S لان نسبة الاحتمال = $\frac{\text{عدد عناصر A}}{\text{عدد عناصر S}}$ ويمكن عدها كالاتي $n(S) = 21-10+1 = 12$

عدد الاعداد الزوجية (ليكن A حدث يحمل عدداً زوجياً) $n(A)=6$

مجموعة (A) $A=\{10,12,14,16,18,20\}$

نسبة احتمال A $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

ليكن B حدث للعدد الذي يقبل القسمة على (3) بدون باق

$B=\{12,15,18,21\}$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{21}=\frac{1}{3}$

$A \cap B=\{\overset{(1)}{12},\overset{(2)}{18}\}$ عنصران من n(s)

$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$

$=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{2}{12}$ $\frac{\text{عنصران}}{\text{من } n(s)}$

$=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ نسبة احتمال القرص المعني

مثال 2 / شركة افرادها 60 رجلاً و 20 امراة ، من الرجال 35 رجل متزوج ومن النسوة 12

متزوجة من هذه الشركة . اختبر شخص واحد عشوائياً جد احتمال ان يكون :

(1) هذا الشخص رجل

(2) هذا الشخص امراة غير متزوجة

الحل / $n(S)=60+20=80$

(1) ليكن A الحدث "الشخص رجل"

$n(A)=60$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{60}{80}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

(2) ليكن B الحدث "الشخص امراة غير متزوجة"

عدد الغير متزوجات يساوي $8=12-20$

$n(S)=80$

$n(B)=8$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$=\frac{8}{80}=\frac{1}{10}$$

مثال 3/ القينا حجري نرد متمايزين مرة واحدة جد احتمال ان يكون مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي *10* او مجموع العددين على الوجهين الظاهرين *9* ؟

الحل / $n(S)=6^2$

$$n(s)=6^2=6\times 6=36$$

n(s) ناتجة عن ضرب ديكارتي لمجموعتين كل مجموعة عدد عناصرها ٦ وهي اوجه الزار (النرد)

$$6^2=6\times 6$$

ليكن A = الحدث : مجموع العددين على الجهين الظاهرين =*10*

$$A=\left\{\overset{(1)}{(5,5)},\overset{(2)}{(4,6)},\overset{(3)}{(6,4)}\right\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

ليكن B = الحدث: مجموع العددين على الوجهين الظاهرين $= 9$

$B=\left\{\overset{(1)}{(4,5)},\overset{(2)}{(5,4)},\overset{(3)}{(3,6)},\overset{(4)}{(6,3)}\right\}$ الازواج مرتبة وكأنها متناظرة

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{4}{36}$$

$$A\cap B=\{(5,5),(4,6),(6,4)\}\cap\{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\}=\phi$$

$A\cap B=\phi$ ∴ الحدثان متنافيان

∴ نطبق القانون (قانون الجمع) الذي هو قانون الجمع لوجود كلمة (او) في السؤال

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)$$

$$=\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{7}{36}$$

ملاحظة هامة

في لغة المنطق الرايضي ان كلمة او تعني الاتحاد $\cup$ (الجمع) وهكذا الحال في موضوع الاحتمال أي (الجمع) أما حرف (و) فيعني التقاطع $\cap$ (الضرب) وهكذا الحال في موضوع الاحتمال أي (الضرب)

مثال 4/ رمينا حجري متمايزين من احجار النرد مرة واحدة ما احتمال ان يكون العدد على وجه احد الحجرين هو ضعف العدد على الوجه الاخر (او) العددين على الوجهين الظاهرين مجموعهما = ٦ ؟

الحل /

لتكن A = الحدث : العدد على الوجه الظاهري لاحد الحجرين ضعف العدد على الوجه الاخر .

$A=\left\{\overset{(1)}{(6,3)},\overset{(2)}{(3,6)},\overset{(3)}{(4,2)},\overset{(4)}{(2,4)},\overset{(5)}{(2,1)},\overset{(6)}{(1,2)}\right\}$

$n(A)=6$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}$$

ليكن B= الحدث : مجموع العددين على الوجهين $= 6$

$B=\left\{\overset{(1)}{(3,3)},\overset{(2)}{(2,4)},\overset{(3)}{(4,2)},\overset{(4)}{(1,5)},\overset{(5)}{(5,1)}\right\}$

$n(B)=5$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{5}{36}$$

$A\cap B=\left\{\overset{(1)}{(2,4)},\overset{(2)}{(4,2)}\right\}$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{2}{36}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{6}{36}+\frac{5}{36}-\frac{2}{36}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

مثال 5/ ليكن احتمال نجاح طالب في امتحان الرياضيات هو 90% وليكن احتمال نجاح طالب اخر في الرياضيات هو 70% جد نسبة احتمال نجاحهما معاً في امتحان الرياضيات ؟

الحل/ ليكن P(A) نسبة احتمال نجاح الطالب الاول في الرياضيات .

$$P(A)=\frac{90}{100}=0.90$$

ليكن P(B) نسبة احتمال نجاح الطالب الثاني في الرياضيات .

$$P(B)=0.70$$

من الواضح ان A,B حدثين مستقلين (لان نجاح احدهما لا يتأثر بنجاح الاخر)

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$
$$=0.90\times 0.70=0.63$$

مثال 6/ صندوق يحتوي 8 اقراص بيضاء ، 4 اقراص حمراء ، 3 اقراص خضراء . سحبت (3) اقراص مرة واحدة جد نسبة احتمال الاقراص المسحوبة من اللون ؟

الحل/

$n=8+4+3=15$ قرص

$r=3$

$$P=\frac{C_3^8+C_3^4+C_3^3}{C_3^{15}}=\frac{\frac{8\times7\times\cancel{6}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}+\frac{4\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}+1}{\frac{\overset{5}{\cancel{15}}\times\overset{7}{\cancel{14}}\times13}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}}$$

$$=\frac{36+4+1}{5\times7\times13}=\frac{61}{455}$$

مثال 7/ يراد تكوين لجنة من 5 اشخاص من بين 8 طلاب و 6 طالبات

(أ) جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطلاب

(ب) جد نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطالبات

الحل/ عدد الطرق $n(S)=C_5^{14}$

(1) نفرض نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطلاب = P(A)

$$P(A)=\frac{C_5^8}{C_5^{14}}=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{5\times4\times3\times2\times1}\div\frac{14\times13\times12\times11\times10}{5\times4\times3\times2\times1}$$

$$=\frac{8\times7\times6\times5\times4}{\cancel{5\times4\times3\times2}\times1}\times\frac{\cancel{5\times4\times3\times2}\times1}{14\times13\times12\times11\times10}$$

$$=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\times\cancel{7}\times\cancel{6}\times\overset{1}{\cancel{5}}\times\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{2}{\cancel{14}}\times13\times\underset{2}{\cancel{12}}\times11\times\underset{2}{\cancel{10}}}=\frac{4}{143}$$

(2) نفرض ان نسبة احتمال اللجنة جميعها من الطالبات = P(B)

$$P(B)=\frac{C_5^6}{C_5^{14}}=\frac{\overset{3}{\cancel{6}}\times\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\underset{7}{\cancel{14}}\times13\times\cancel{12}\times11\times\cancel{10}}=\frac{3}{1001}$$

حلول تمارين (3 - 8)

(1) صندوق يحتوي على 3 ثلاث كرات بيضاء مرقمة بالارقام (1,2,3) وكرتين (2) سوداوتين مرقمتين (2,1) اذا علمت ان الكرات متماثلة بالحجم . سحبت كرة واحدة جد احتمال :

(أ) الكرة سوداء (ب) الكرة بيضاء (ج) الكرة بيضاء وتحمل رقم فردي .

الحل/

(أ) ليكن الحدث A يمثل سحب كرة سوداء $P(A)=\frac{C_1^2}{C_1^5}=\frac{2}{5}$

(ب) ليكن الحدث B يمثل سحب كرة بيضاء $P(B)=\frac{C_1^3}{C_1^5}=\frac{3}{5}$

لاحظ $P(S)=\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=1$

(ج) ليكن الحدث C يمثل سحب كرة فردية بيضاء $P(C)=\frac{C_1^2}{C_1^5}=\frac{2}{5}$

احتمال الكرة بيضاء وتحمل رقم فردي $P(\underset{C}{B})=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$

---

(2) رميت حجرين متمايزين من احجار النرد :

(أ) ماهو احتمال العددين الظاهرين = 6 (مجموع العددين =6)

(ب) ماهو احتمال الحصول على مجموع 7 أو مجموع 11

الحل /

(أ) ليكن $A=\left\{\overset{(1)}{(1,5)},\overset{(2)}{(5,1)},\overset{(3)}{(2,4)},\overset{(4)}{(4,2)},\overset{(5)}{(3,3)}\right\}$

$$P(A)=\frac{5}{36}$$

(ب) ليكن $B=\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$

وليكن $C=\{(5,6),(6,5)\}$

$$\left.\begin{aligned}P(B)&=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}\\ P(C)&=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}\end{aligned}\right\}$$

الحدثان C,B متنافيان $B\cap C=\varnothing$

$$\therefore P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{6}{36}+\frac{2}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$$

---

(3) صندوقان يحتوي كل منهما على *6* كرات بيضاء و *4* حمراء ، جد نسبة احتمال سحب *3* كرات بيضاء من الصندوق الاول ، و سحب كرتين بيضاويتين وكرة واحدة حمراء من الصندوق الثاني ؟

الحل/ كرات 6+4=10

$$P(A)=\frac{C_3^6}{C_3^{10}}=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}\div\frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=\frac{6\times5\times4}{\cancel{3\times2\times1}}\times\frac{\cancel{3\times2\times1}}{10\times9\times8}=\frac{\cancel{6}^{1}\times\cancel{5}^{1}\times\cancel{4}^{1}}{\cancel{10}_{2}\times\cancel{9}_{3}\times\cancel{8}_{2}}=\frac{1}{6}$$

$$P(B)=\frac{C_2^6\times C_1^4}{C_3^{10}}=\frac{\frac{6\times5}{\cancel{2}\times1}\times\cancel{4}^{2}}{\frac{10\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{2}}{\cancel{3}_{1}\times\cancel{2}_{1}\times1}}=\frac{60}{120}=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$$

---

(4) لدينا *5* بطاقات مرقمة من *1* الى *5* سحبت بطاقة واحدة جد نسبة احتمال البطاقة التي لا تحمل رقم *(3)*

الحل /

نسبة احتمال سحب البطاقة رقم *(3)* $P(A)=\frac{1}{5}$

نسبة احتمال التي لا تحمل رقم *(3)* **complement event** $P(B_c)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$

---

(5) كيس يحتوي على 20 كرة متجانسة في جميع عناصرها مرقمة من 1 ....20 سحبت كرة واحدة. جد
(أ) احتمال العدد الذي تحمله عدداً اصغر من 9 .
(ب) احتمال العدد الذي تحمله الكرة عدداً اكبر من 5 .

$a > 5$

الحل/ $a < 9$

$n(S)=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

(أ) $A<9$

$$P(A)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$

(ب) $B>5$

$$P(B)=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$$

(6) صندوق يحتوي على 21 قرص مرقم من 1 ....21 سحب قرصان جد نسبة احتمال
(أ) القرصان زوجيان (ب) الاول زوجي والثاني فردي ؟

الحل/ (أ) الحدث A القرصان زوجيان
عدد الاقراص الزوجية (10) قرص
عدد الاقراص الفردية (11) قرص

$$P(A)=\frac{C_2^{10}}{C_2^{21}}=\frac{\frac{10\times 9}{2\times 1}}{\frac{21\times 20}{2\times 1}}$$

$$=\frac{10\times 9}{21\times 20}=\frac{3}{14}$$

(ب) الحدث B الاول زوجي والثاني فردي
الاول زوجي
الثاني فردي

$$P(B)=\frac{C_1^{10}\times C_1^{11}}{C_2^{21}}=\frac{10\times 11}{\frac{21\times 20}{2\times 1}}=\frac{11}{21}$$

(7) لدينا 50 بطاقة مرقمة من 1 ...50 جد احتمال العدد على البطاقة المسحوبة :
(أ) يقبل القسمة على 5
(ب) يقبل القسمة على 7 (ج) يقبل القسمة على 5 او 7

الحل/ (أ) جدول ضرب الـ 5

$$A=\{\overset{(1)}{5},\overset{(2)}{10},\overset{(3)}{15},\overset{(4)}{20},\overset{(5)}{25},\overset{(6)}{30},\overset{(7)}{35},\overset{(8)}{40},\overset{(9)}{45},\overset{(10)}{50}\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

$$\text{or } P(A)=\frac{C_1^{10}}{C_1^{50}}=\frac{10}{50}=\frac{1}{5}$$

(ب) جدول ضرب الـ 7

$$B=\{\overset{(1)}{7},\overset{(2)}{14},\overset{(3)}{21},\overset{(4)}{28},\overset{(5)}{35},\overset{(6)}{42},\overset{(7)}{49}\}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{7}{50}$$

$$\text{or } P(B)=\frac{C_1^{7}}{C_1^{50}}=\frac{7}{50}$$

$A\cap B=\{35\}$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{10}{50}+\frac{7}{50}-\frac{1}{50}=\frac{16}{50}=\frac{8}{25}$$

(8) يراد اختيار لجنة طلابية تتكون من (*3*) ثلاث اشخاص من بين (*12*) طالب و (*4*) طالبات .
مااحتمال كل مما يأتي :
(أ) ان تكون اللجنة جميعها طلاب .
(ب) ا يكون في اللجنة طالب واحد فقط .

الحل/ عدد عناصر الفضاء $12 + 4 = 16$
(أ) *3* طالب من *16* (مجموع العناصر)

بسط ومقام (3! and 3!)

$$P(A)=\frac{C_3^{12}}{C_3^{16}}=\frac{\cancel{12}\times 11\times \cancel{10}}{\cancel{16}\times \cancel{15}\times \cancel{14}}=\frac{11}{28}$$

$$P(B)=\frac{C_1^{12}\times C_2^4}{C_3^{16}}=\frac{\cancel{12}\times\frac{4\times 3}{\cancel{2}\times 1}}{\frac{16\times \cancel{15}\times \cancel{14}}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}}=\frac{\cancel{6}\times \cancel{4}\times 3}{\cancel{16}\times 5\times 7}=\frac{9}{70}$$

---

(9) رميت حجري نرد متجانسان مرة واحدة ما أحتمال ان يكون مجموع العددين الظاهرين يساوي *9* او *11*

الحل/ عدد عناصر الفضاء $n(S)=6^2=6\times 6=36$

ليكن A = الحدث مجموع العددين الظاهرين = *9*

عدد عناصر A = *4*

$A=\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$

$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

ليكن B = الحدث مجموع العددين الظاهرين = *11*

عدد عناصر B = *2*

$B=\{(5,6),(6,5)\}$

$P(B)=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$

$A\cap B=\varnothing$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

$=\frac{4}{36}+\frac{2}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$

[8 – 6] مبرهنة ذات الحدين **Binomial Theorem**

هي قانون لايجاد مايساوي أي مقدار ذي حدين مثل $(a + b)$ اذا رفع الى أي اس بدون اجراء عملية الضرب اذا كان الاس عدداً صحيحاً موجباً .

اذا كان **a,b** عددين حقيقين و **n** عدداً صحيحاً موجباً فان :

(1) $(a+b)^n = C_0^n a^n + C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 + \dots\dots C_n^n b^n$

(2) $(a-b)^n = C_0^n a^n - C_1^n a^{n-1}b + C_2^n a^{n-2}b^2 - \dots\dots\dots C_n^n(-b)^n$

نلاحظ ان حدود المفكوك (٢) تكون سالبة او موجبة على التعاقب ويكون الحد الاخير موجباً اذا كانت زوجية وسالباً اذا كانت n فردية .

ملاحظات /

(1) عدد حدود المفكوك = $n+1$

(2) أُس الحد الاول واس الحد الاخير= n .

(3) اس الحد الاول + اس الحد الثاني = n

(4) اس الحد الاول يبدأ بالتناقص من n الى 0 اس الحد الثاني يتزايد من 0 الى n

(5) اذا كان n عدد زوجي فان عدد حدود المفكوك يكون فردي ورتبة الحد الاوسط $\frac{n}{2}+1$

(6) اذا كان n عدد فردي فان عدد حدود المفكوك يكون زوجي لذا فان رتبة الحدين الاوسطين $\frac{n+1}{2}$ و $\frac{n+3}{2}$ أو $\frac{n+1}{2}+1$ و $\frac{n+1}{2}$

مثال 1/ اوجد مفكوك $(a+b)^5$

الحل/ الحد الثاني

$$(a+b)^5 = C_0^n a^5 + C_1^n a^4 b + C_2^n a^3 b^2 + C_3^n a^2 b^3 + C_4^n a b^4 + C_n^n b^5$$
$$= 1a^5 + C_1^5 a^4 b + C_2^5 a^3 b^2 + C_3^5 a^2 b^3 + C_4^5 a b^4 + 1b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b + \frac{5\times4}{2\times1} a^3 b^2 + \frac{5\times4\times3}{3\times2\times1} a^2 b^3 + \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1} a b^4 + b^5$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5$$

اذا كان مفكوك $(A+B)^n$ فان قانون الحد العام هو :

$$\boxed{P_r = C_{r-1}^n \; a^{n-r+1} \; b^{r-1}}$$

مثال 2/ اوجد قيمة $(101)^3$

الحل/ $(101)^3 = (1+100)^3 = 1 + C_1^3 100 + C_2^3 (100)^2 + C_3^3 (100)^3$
$$= 1 + 300 + 30000 + 1000000$$
$$= 1030301$$

مثال 3/ جد الحد الخامس في مفكوك $(a+b)^{10}$

الحل/ $P_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$

$$P_5 = C_{5-1}^{10} a^{10-5+1} b^{5-1}$$
$$= \frac{10\times \overset{3}{\cancel{9}}\times \cancel{8}\times 7}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}} a^6 b^4 \quad = 210\, a^6 b^4$$

مثال 4/ برهن ان مفكوك $(X^2+\frac{2}{X^3})^{10}$ **يحتوي على الحد الذي فيه** x^{15} **ثم جد معامله ؟**

الحل/

$$P_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$$
$$P_r = C_{r-1}^{10} (X^2)^{10-r+1} (\frac{2}{X^3})^{r-1}$$
$$X^{15} = (X^2)^{11-r} (X^{-3})^{r-1}$$
$$X^{15} = X^{22-2r} X^{-3r+3}$$

$\therefore 25-5r=15 \rightarrow 5r=25-15 \rightarrow 5r=10 \rightarrow r=2$

$P_2=C^{10}_{r-1}(X^2)^9(\frac{2}{X^3})^{2-1}$

$P_2=C^{10}_1 X^{18}\frac{2}{X^3} \rightarrow P_2=10\times 2X^{15}$

$P_2=20X^{15}$

$\therefore$ معامل P_2 هو (20)

مثال 6/ اثبت انه لا يوجد حد خال من (X) في مفكوك $(5X-\frac{4}{X^2})^{19}$ ؟

الحل/

$P_r=C^n_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$

$P_r=C^{19}_{r-1}(5X)^{19-r+1}(\frac{-4}{X^2})^{r-1}$

$\boxed{\text{الحد الخالي من x يعني } X^0}$

$X^0=X^{20-r}(X^{-2})^{r-1}$

$X^0=X^{20-r}X^{-2r+2} \rightarrow X^0=X^{22-3r}$

$22-3r=0 \rightarrow 3r=22 \rightarrow r=\frac{22}{3} \rightarrow r\notin z^+$

$\therefore$ لا يوجد حد خال من X

مثال 6/ اوجد الحدين الاوسطين في مفكوك $(\frac{3X}{2}-\frac{2}{3X})^7$ ؟

الحل/ رتبتا الحدين الاوسطين هما :

$\frac{n+1}{2}=\frac{7+1}{2}=4$

$\frac{n+3}{2}=\frac{7+3}{2}=5$

الحدان الاوسطان هما الرابع والخامس

$P_r=C^n_{r-1}\ a^{n-r+1}\ b^{r-1}$

$P_4=C^7_3(\frac{3X}{2})^4(-\frac{2}{3X})^3 = \frac{7\times \cancel{6}\times 5}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}(\frac{\cancel{81}^{3}X^4}{\cancel{16}_{2}})(\frac{\cancel{-8}^{-1}}{\cancel{27}_{1}X^3})=-\frac{105}{2}X$

$P_5=C^7_4\ (\frac{3X}{2})^3\ (-\frac{2}{3X})^4$

$=\frac{7\times \cancel{6}\times 5\times \cancel{4}}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}(\frac{\cancel{27}^{1}X^3}{\cancel{8}_{1}})(\frac{\cancel{16}^{2}}{\cancel{81}_{3}X^4})=\frac{70}{3X}$

مثال 7/ اذا كانت النسبة بين الحدين الخامس والعاشر في مفكوك $(1+X)^{12}$ تساوي $\frac{8}{27}$ جد قيمة X

الحل/ النسبة تعني بسط ومقام وبالتالي عملية قسمة

$P_r=C^n_{r-1}a^{n-r+1}b^{r-1}$ (الواحد المرفوع الى اي اس فانه دائما =1) $(a^{n-r+1}=1^8=1)$

$P_5=C^{12}_4X^4$

$P_{10}=C^{12}_9X^9=C^{12}_3X^9$

$(C^{12}_9=C^{12}_{12-9}=C^{12}_3)$

$C_4^{12}X^4 \div C_3^{12}X^9 = \frac{8}{27}$ (نحول القسمة الى ضرب)

$$\frac{12\times11\times10\times9(X^4)}{4\times3\times2\times1} \div \frac{12\times11\times10(X^9)}{3\times2\times1} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{\cancel{12}^{3}\times\cancel{11}\times\cancel{10}\times9(X^4)}{\cancel{4}_{1}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times1} \times \frac{\cancel{3}\times\cancel{2}\times1}{\cancel{12}_{4}\times\cancel{11}\times\cancel{10}(X^9)} = \frac{8}{27}$$

$$\frac{9}{4X^5} = \frac{8}{27}$$

$$X^5 = \frac{9\times27}{4\times8} = \frac{3^5}{2^5} \rightarrow X = \frac{3}{2}$$

مثال 8/ اختصر المقدار $(2+X)^4+(2-X)^4$ **الى ابسط صورة . ثم جد قيمة المقدار** $(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4$

الحل/

نتيجة المقدار = ضعف الحدود الفردية هكذا : $2(P_1+P_3+P_5)$

$$=2\left[2^4+C_2^4(2)^2(X)^2+X^4\right]$$

$$=2(16+24X^2+X^4)$$

نضع $X=\sqrt{3}$

$$(2+\sqrt{3})^4+(2-\sqrt{3})^4=2(16+24\times3+9)$$

$$=2\times97=194$$

مثال 9/ اختصر المقدار $(X+\frac{1}{X})^5-(X-\frac{1}{X})^5$ **ثم اوجد قيمة** $(2+\frac{1}{2})^5-(2-\frac{1}{2})^5$ **؟**

الحل/

∴ ضعف الحدود الزوجية في مفكوك $(X+\frac{1}{X})^5$ = $(X+\frac{1}{X})^5-(X-\frac{1}{X})^5$

$$(X+\frac{1}{X})^5-(X-\frac{1}{X})^5=2\left[P_2+P_4+P_6\right]$$

$$=2\left[C_1^5X^4(\frac{1}{X})+C_3^5X^2(\frac{1}{X})^3+C_5^5(\frac{1}{X})^5\right]$$

$$=2\left[5X^3+\frac{10}{X}+\frac{1}{X^5}\right]$$

نضع $X=2$

$$(2+\frac{1}{2})^5-(2-\frac{1}{2})^5=2\left[5\times8+\frac{10}{2}+\frac{1}{32}\right]$$

$$=2(40+5+\frac{1}{32}) \quad =2(45+\frac{1}{32}) \quad =90+\frac{1}{16}=90\frac{1}{16}$$

حلول تمارين (4 - 8)

(1) جد مفكوك كل مما يأتي :

(a) $(a-b)^3$

الحل/ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

(b) $(1+X)^4$

الحل/ $(1+X)^4 = 1 + 4x + 6X^2 + 4x^2 + 4X^3 + X^4$

$= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$

---

(2) اوجد الحد الثامن في مفكوك $(2X+\frac{1}{X})^{10}$ ؟

الحل/ قانون الحد العام $P_r = C^n_{r-1}\ a^{n-r+1}\ b^{r-1}$ $(n=10)(r=8)$

$P_8 = C^{10}_7\ a^3\ b^7$

$= C^{10}_3\ a^3\ b^7$ $(C^{10}_7=C^{10}_3)$

$=\frac{10\times \cancel{9}^{3}\times \cancel{8}^{4}}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}(2X)^3(\frac{1}{X})^7$

$=120(8X^3)\frac{1}{X^7}=960\frac{1}{X^4}=\frac{960}{x^4}$

---

(3) اوجد الحد الاوسط في مفكوك $(\sqrt{X}+\frac{1}{\sqrt{X}})^{10}$ ؟

الحل/ عدد الحدود $10 + 1 = 11$

رتبة الحد الاوسط $\frac{n}{2} + 1 = \frac{10}{2} + 1 = 6$

∴ جد الحد السادس في المفكوك اعلاه $P_r = C^n_{r-1}\ a^{n-r+1}\ b^{r-1}$

$P_6 = C^{10}_5\ a^5\ b^5$ $(n=10)(r=6)$

$=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}a^5b^5$

$=252a^5b^5=252(X^{\frac{1}{2}})^5(\frac{1}{X^{\frac{1}{2}}})^5$

$=252\cancel{\sqrt{X^5}}\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{X^5}}}\ =252$

(4) اوجد الحدين الاوسطين في مفكوك $\left(3X^2 + \frac{2}{3X}\right)^5$ ؟

الحل/ عدد الحدود $5 + 1 = 6$

رتبة الحد الاوسط الاول $\frac{5+1}{2} = 3$

$(n=5),(r=3)\ ,\ a=3X^2,\ b=\frac{2}{3X}$

$(a+b)^5$

$P_r = C^n_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$

$P_3 = C^5_2 a^{5-3+1} b^{3-1}$

$P_3 = C^5_2 a^3 b^2$

$P_3 = \frac{5\times 4}{2\times 1} a^3 b^2$

$=10(3X^2)^3\left(\frac{2}{3X}\right)^2$

$= 10 \cdot 27X^6 \cdot \frac{4}{9X^2}$

$=120X^4$

رتبة الحد الاوسط الثاني $\frac{5+1}{2} + 1 = 4$

$P_4 = C^5_3 a^2 b^3 \quad (n=5),(r=4)$

$a=3X^2 \quad b=\frac{2}{3X}$

$=\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}(3X^2)^2\left(\frac{2}{3X}\right)^3$

$=10\cdot \overset{1}{\cancel{9}} X^4 \cdot \frac{8}{\underset{3}{\cancel{27}} X^3}$

$=\frac{80}{3}X$

---

(5) اذا كانت نسبة الحد الثامن الى الحد الثالث في مفكوك $(3X+2)^{10}$ **تساوي** $\frac{1}{12}$ **جد قيمة X** ؟

الحل/

$P_r = C^n_{r-1} a^{n-r+1} b^{r-1}$

$n=10\ ,\ r=8\ ,\ b=2\ ,\ a=3X$

$P_8 = C^{10}_7 a^3 b^7$

$=C^{10}_3 a^3 b^7$

$=\frac{10\times \overset{3}{\cancel{9}}\times \overset{4}{\cancel{8}}}{\cancel{3}\times \cancel{2}\times 1}(3X)^3(2)^7$

$=120\ \ 27X^3(2)^7$

$P_3 = C^{10}_2 a^8 b^2$

$=\frac{\overset{5}{\cancel{10}}\times 9}{\cancel{2}\times 1}(3X)^8 \cdot 2^2 = 5\cdot 9\cdot 4\cdot 3^8 X^8$

$=\frac{\overset{\overset{6}{\cancel{30}}}{\cancel{120}} \cdot 27\cdot X^3\cdot 2^7}{\underset{1}{\cancel{5}}\cdot 9\cdot \underset{1}{\cancel{4}}\cdot 3^8 X^8} = \frac{1}{12}$

$=\frac{6\cdot 27\cdot X^3\cdot 2^7}{9\cdot 3^8 X^8} = \frac{1}{12}$

$\cdot 9\cdot 3^8\cdot X^8 = 12\cdot 6\cdot 27\cdot X^3\cdot 2^7$

$\cancel{9}\cdot \cancel{9}\cdot 3^6 X^8 = 3\cdot 4\cdot \cancel{3}\cdot 2\cdot \cancel{27}\cdot X^3\cdot 2^7$

$\cancel{3}\cdot 3^5 X^8 = \cancel{3}\cdot 2^3 X^3 2^7$

$3^5 X^8 = X^3 2^{10}$

$3^5 X^5 = 2^{10}$

$X^5 = \frac{2^{10}}{3^5}$

$X = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$

(6) اوجد الحد الخالي من X في مفكوك $(\frac{3X^2}{2}-\frac{1}{3X})^2$ ؟

الحل/ نفرض ان الحد الخالي من X في المفكوك هو X^0

$$P_r = C^{n}_{r-1}(\frac{3x^2}{2})^{9-r+1}(\frac{1}{3x})^{r-1}$$

$$X^0 = (x^2)^{9-r+1}(x^{-1})^{r-1}$$

$$X^0 = x^{20-2r} \cdot x^{-r+1}$$

$$X^0 = x^{21-3r}$$

$$0 = 21 - 3r$$

$$3r = 21 \rightarrow r = 7$$

اذن الحد السابع هو الحد الخالي من X

$$P_7 = C^{9}_{6}(\frac{3x^2}{2})^{9-7+1}(\frac{1}{3x})^{7-1}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1}(\frac{3x^2}{2})^3(\frac{1}{3x})^6$$

$$= 84 \times \frac{27}{8} \times 6 \cdot \frac{1}{729} \times 6 = \frac{1}{216}$$

ملاحظة/ $C^{9}_{6} = C^{9}_{3} = \frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$

---

(7) في مفكوك $(X^2+\frac{a}{X})^5$ **اذا كان معامل X يساوي 80 فاذا كان X=1 ، جد قيمة a ؟**

الحل/

نفرض P_r هو الحد الذي يحتوي على X

$$P_r = C^{5}_{r-1}(X^2)^{5-r+1}(\frac{1}{X})^{r-1}$$

$$= C^{5}_{r-1}X^{10-2r+2}\frac{a^{r-1}}{X^{r-1}}$$

$$X = x^{12-2r} \cdot (x^{-1})^{r-1}$$

$$X = x^{12-2r} \cdot x^{-r+1}$$

$$1 = 13 - 3r$$

$$3r = 12 \rightarrow r = 4$$

$$P_4 = C^{5}_{3}(x^2)^{5-4+1}(\frac{a}{x})^{4-1}$$

$$= \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}(x^2)^2 \cdot \frac{a^3}{x^3}$$

$$P_4 = 10a^3x$$

$$10a^3x = 80x$$

$$10a^3 = 80$$

$$a^3 = 8$$

$$a = 2$$

الفصل التاسع

المصفوفات – المحددات

اولاً : المصفوفات Matrices

التعريف العام للمصفوفة :

المصفوفات جمع كلمة مصفوفة (Matrices) وهي مفهوم رياضي يؤدي دوراً هاماً في معظم فروع المعرفة وقد لوحظت المصفوفات لاول مرة واستعملت من قبل العالم كيلي (1895-1821) وتستعمل المصفوفات في الوقت الحاضر من قبل المختصين في علم الاقتصاد وعلم الاجتماع وعلم النفس . هذا فضلاً عن الدور الكبير الذي تلعبه في الرياضيات وخاصة فيما يسمى بالجبر الخطي ولها تطبيقات اخرى لاغنى عنها في الفيزياء والكيمياء وسائر العلوم التطبيقية .

لنفرض ان اربعة طلاب A,B,C,D كانت درجاتهم في اختبار مادة الرياضيات هي على الترتيب 94,82,73,60 وفي الفيزياء 75,84,68,87 على الترتيب .

فيمكن تنظيم هذه المعلومات في جدول مستطيل يتكون من صفين واربعة اعمدة كالاتي :

صف row ، عمود column)

A matrix with m rows and n columns has order m×n(read "m by n")

الطلاب / المادة	D	C	B	A
الرياضيات	60	73	82	94
الفيزياء	87	68	84	75

ان الصف الاول في هذا المستطيل يعبر عن درجات الطلاب في الرياضيات والصف الثاني يعبر عن درجات الطلاب في الفيزياء كما ان العمود الاول يعبر عن درجات الطالب A في المادتين معاً والعمود الثاني يعبر عن درجات الطالب B في المادتين معاً وهكذا الطالبين D,C . ويمكن كتابة الجدول السابق على الصورة :

$$\begin{bmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 94 & 82 & 73 & 60 \\ 75 & 84 & 68 & 87 \end{pmatrix}$$

شكل 1   شكل 2

رتبة المصفوفة - Order of a matrix

ناخذ المثال التالي : جدول الضرب

1	2	3	4	5	6
2	4	6	8	10	12
3	6	9	12	15	18
4	8	12	16	20	24

صفوف   اعمدة

ان هذا الجدول له اربعة صفوف وستة اعمدة فتكون رتبته $\underset{4\ \times\ 6}{(m\times n)}$ وكل عنصر (عدد) في هذا الجدول يتحدد (يتعين) موقعه بالصف والعمود فمثلاً (15) يقع في الصف الثالث والعمود الخامس بينما (16) يقع في الصف الرابع والعمود الرابع .

تعريف [1 - 9] المصفوفة

عبارة عن تنظيم عددي مؤلف من $m\times n$ عنصراً مرتبة في جدول مستطيل مكون من m صفاً ، n عموداً ، $m , n\in N^+$.

تعريف [2 - 9]

نقول عن المصوفة انها من النوع (الرتبة) $m\times n$ وتقرأ m في n اذا كانت تحتوي صفوفاً عددها m واعمدة عددها n كما نقول احياناً واختصاراً انها مصفوفة $m\times n$ $m , n \in N^+$

سنرمز للمصفوفة بحرف مثل (.....,A,B,C) خشية الالتباس بين المصفوفة وعناصرها كما يجب الانتباه ان عناصر أي مصفوفة في هذا الكتاب تنتمي الى حقل الاعداد الحقيقية R .

وبصفة عامة اذا كانت A مصفوفة من النوع $m\times n$ فاننا نكتب A على الصورة :

صف $i = 1,2,\ldots\ldots\ldots m$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11}\ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{22}\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{m1}\ldots a_{m2}\ldots\ldots a_{mn} \end{bmatrix}=\left[a_{ij}\right]$$

عمود $j=1,2,\ldots\ldots\ldots n$

ان a_{ij} يمثل عنصراً اختيارياً ؟؟؟؟) في A حيث يرمز i الى ترتيب الصف الذي يقع فيه العنصر بينما يرمز j الى ترتيب العمود الذي يقع فيه العنصر وبذلك يتعين العنصر a_{ij} تماماً بمعرفة قيمتي i،j معاً .

تساوي المصفوفات

تعريف [3 - 9]

نقول ان المصفوفتين A و B متساويتين ونكتب A = B اذا تحقق الشرطان الاتيين معا :

اولاً - A , B من نوع (رتبة) واحد أي ان عدد الصفوف A يساوي عدد الصفوف B وعدد الاعمدة A يساوي عدد اعمدة B

ثانيا - $a_{ij} = b_{ij}$ لجميع قيم j و i الممكنة حيث j و i عددان طبيعيان موجبان

[4 - 9] بعض المصفوفات الشهيرة :

(أ) المصفوفة المستطيلة :

هي مصفوفة من نوع $m\times n$ حيث n (الاعمدة) $\neq$ m (الصفوف) .

وعندما m=1 تسمى (مصفوفة الصف) من النوع $1\times n$ $[4 \quad 0 \quad 12]$ 1×3

وعندما n=1 تسمى (مصفوفة العمود) من النوع $m\times 1$ $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 3×1 (واحد عمود)(3 صف)

(ب) المصفوفة المربعة :

وهي مصفوفة من النوع $m\times n$ أي ان عدد صفوفها = عدد اعمدتها.

(ج) المصفوفة القطرية :

وهي مصفوفة مربعة جميع عناصرها اصفار ماعدا العناصر الواقعة على القطر فيكون احدها على الاقل مغايراً للصفر .

(د) مصفوفة الوحدة :

وهي مصفوفة قطرية (مربعة) يكون فيها كل من العناصر الواقعة على القطر مساوياً الواحد (١) .

(هـ) المصفوفة الصفرية :

وهي مصفوفة $m\times n$ جميع عناصرها اصفار وسنرمز لها بالرمز (0) .

مثال 4/ مثال لتوضيح بعض المصفوفات المشهورة :

(أ) المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ (1) مصفوفة مستطيلة فيها صفين $m=2$ وثلاثة اعمدة $n=3$ من النوع 2×3

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة صف (1×3) صف واحد وثلاثة اعمدة

عدد الصفوف لايساوي عدد الاعمدة $(m\neq n)$

(3) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ مصفوفة عمود (1×3) ثلاثة صفوف وعمود واحد

(ب) المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $n\times n$ (عدد الصفوف = عدد الاعمدة)

القطر الثانوي

القطر الاساس

مصفوفة مربعة 3×3 قطرها الاساس (3,2,6) وقطرها الثانوني الاخر (5,2,1)

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة 3×3 عناصر قطرها الثانوي (1,-1,2)

(ج) المصفوفة $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة قطرية 3×3 عناصر قطرها الاساس (1,-1,2)

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ مصفوفة مربعة

(د) كل من المصفوفات $[1]$ ، $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ هي مصفوفة وحدة

(هـ) كل من المصفوفات $[0]$،$[0 \quad 0]$،$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$،$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$،$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ هي مصفوفة صفرية لاحظ ان كل

واحدة تختلف عن الاخرى فمثلاً : $[0 \quad 0] \neq \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ لان الاولى من النوع 1×2 والثانية من النوع 2×1

الاولى الثانية

[4 – 9] جمع المصفوفات وضربها في عدد حقيقي

تعريف /

اذا كانت $A=[aij]$ و $B=[bij]$ مصفوفتين كل منها $m\times n$ فان مجموعهما هو المصوفة $C=cij$

حيث $cij=aij+bij$

ان هذا التعريف يعني اننا نستطيع جمع أي مصفوفتين A و B اذا وفقط اذا كانتا من النوع $m\times n$ نفسه .

وحينئذ يمكننا ان نكتب مجموعهما بالصورة $A+B=aij+bij$

أي اننا نحصل على مصفوفة جديدة من النوع نفسه كل عنصر فيها يمثل مجموع العنصرين المتناظرين بالوضع في B و A .

مثال / لجمع مصفوفتين من نفس الحجم (من نفس النوع) إجمع مع العنصر المتناظر بالوضع

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\-1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 1\\0 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 4\\-1 & 0\end{bmatrix} \quad (2+6=\underline{8})(3+1=\underline{4})(-1+0=\underline{-1})(4+(-4)=\underline{0})$$

مثال5/ $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\-5 & 3 & 7\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\5 & -6 & 1\end{bmatrix}$ فأوجد A+A ، B+A ، A+B

الحل/

$$A+B=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\5 & -6 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\-5 & 3 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\0 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

$1+2=\underline{3}$, $-2+3=\underline{-1}$, $3+4=\underline{7}$, $5-5=\underline{0}$, $-6+3=\underline{-3}$, $1+7=\underline{8}$

$$B+A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\-5 & 3 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\5 & -6 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 7\\0 & -3 & 8\end{bmatrix}$$

لاحظ ان A+B=B+A

$$A+A=\underset{A}{\begin{bmatrix}1&-2&3\\5&-6&1\end{bmatrix}}+\underset{A}{\begin{bmatrix}1&-2&3\\5&-6&1\end{bmatrix}}=\underset{A+A=2A}{\begin{bmatrix}2&-4&6\\10&-12&8\end{bmatrix}}$$

لاحظ ان 2A تمثل ضرب كل عنصر من عناصر A بالعدد 2 وهكذا

$$2\begin{bmatrix}1&-2&3\\5&-6&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&-4&6\\10&-12&2\end{bmatrix}$$

$2\times1=\underline{\underline{2}}\quad 2\times(-2)=\underline{\underline{-4}}\quad 2\times3=\underline{\underline{6}}\quad 2\times5=\underline{\underline{10}}\quad 2\times(-6)=\underline{\underline{-12}}\quad 2\times2=\underline{\underline{4}}$

[1 – 5 – 9] تعريف

اذا كانت $A=a_{ij}$ مصفوفة $m\times n$ وكانت $k\in R$ فان حاصل ضرب المصفوفة A بالعدد الحقيقي $kc=[c_{ij}]$ هو المصفوفة $C=[c_{ij}]$ حيث $c_{ij}=ka_{ij}$ لجميع قيم ij الممكنة . أي ان : $KA=[ka_{ij}]$

مثال6/ اذا كانت $A=\begin{bmatrix}-3&1\\2&4\\0&-1\end{bmatrix}$ فجد المصفوفة k.A عندما تكون

(أ) $k=2$ (ب) $k=\frac{1}{2}$ (ج) $k=-1$

الحل/

(أ) $KA=2A=2\begin{bmatrix}-3&1\\2&4\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6&2\\4&8\\0&-2\end{bmatrix}$ $.\ k=2$

(ب) $KA=\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-3&1\\2&4\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{2}&\frac{1}{2}\\1&2\\0&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$ $.\ k=\frac{1}{2}$

(ج) $KA=(-1)A=-1\begin{bmatrix}-3&1\\2&4\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\-2&-4\\0&1\end{bmatrix}$ $.\ k=-1$

[6 – 9] نظير المصفوفة بالنسبة لعملية الجمع

تعريف /

اذا كانت A,B مصفوفتين من النوع $m\times n$ فأن : $A-B=A+(-1)B$

مثال7/ اذا كانت $B=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -1\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 5\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}$

فجد كلاً من A – B ، B – A وتحقق انهما غير متساويتين

الحل/

$$A-B=A+(-1)B$$

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}3 & -3 & 5\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -3 & 5\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & -7 & 1\end{bmatrix}$$

$$A-B=A+(-1)B=\begin{bmatrix}5 & -4 & 2\\ -6 & -6 & 1\end{bmatrix}$$

$$B-A=B+(-1)A$$

$$B-A=B(-1)A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -1\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}3 & -3 & 5\\ -6 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 3\\ 0 & 7 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 3 & -5\\ 6 & -1 & 0\end{bmatrix}$$

$$B-A=B(-1)A=\begin{bmatrix}-5 & 4 & -2\\ 6 & 6 & -1\end{bmatrix}$$

$$\therefore A-B\neq B-A$$

ويمكن ان نطرح مباشرة كما في المثال ادناه :

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & 4\\ 9 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}6 & 1\\ 0 & -4\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 2\\ -1 & 8\\ 6 & 8\end{bmatrix}$$

(2-6=<u>-4</u>)(-1-0=<u>-1</u>)(9-3=<u>6</u>)(3-1=<u>2</u>)(4-(-4)=<u>8</u>)(10-2=<u>8</u>)

خواص جمع المصفوفات

اذا كانت H مجموعة المصفوفات من النوع $m\times n$ (من نفس الحجم) (القياس) فأن النظام $(H,+)$ يتمتع بالخواص الاتية (حيث (+) عملية جمع المصفوفات) .

(1) العملية (+) ثنائية على H لان $\forall A,B\in H$

فأن $A+B\in H$

(2) العملية (+) إبدالية $\forall A,B\in H$

فأن $A+B=B+A$ أي ان عملية (+) ابدالية

(3) العملية (+) تجميعية $\forall A,B,C\in H$

فأن $(A+B)+C=A+(B+C)$

(4) يوجد في H عنصر محايد هو المصفوفة الصفرية (0) لان : $\forall A\in H$

فأن $0+A=A+0=A$

(5) لكل مصفوفة A تنتمي الى H توجد مصفوفة

$B=(-1)A\in H$

((النظير الجمعي)) بحيث $A+B=0$

ملاحظة /

ان تحقيق الخواص السابقة يمكن ايجازها في قولنا [ان النظام $(H,+)$ زمرة ابدالية] .

خواص ضرب عدد حقيقي بمصفوفة

اذا كانت A,B مصفوفتين من النوع $m\times n$ واكن $k , L\in R$ فأن :

(1) $k(A+B)=k.A+k.B$

(2) $(k+L).A=k.A+L.A$

(3) $k.(L.A)=(k.L)A$

(4) if $k.A=0 \Leftrightarrow$ اما$(k=0)$ or(او) $A=0$

(5) if $k.A=k.B$ $(k\neq 0)$ $\rightarrow A=B$

(6) $1.A=A$

مثال8/ جد C بحل المعادلة C+B=A حيث ان H مجموعة المصفوفات $(A , B , C \in H)$ من النوع $m \times n$

الحل/

C+B=A

بأضافة المصفوفة (B-) الى طرفي المعادلة

C+B+(-B)=A+(-B)

خاصية التجميع في المصفوفات C+(B-B)=A-B

خاصية العنصرين المتناظرين C+0=A-B

خاصية العنصر المحايد C=A-B

ملاحظة

إن B– هي النظير الجمعي للمصفوفة B وهو نظير وحيد والعنصر المحايد ، وحيد وبالتالي يكون C=A-B وحيدا للمعادلة

مثال9/ اذا كانت $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ فجد حل المعادلة C+B=A وتحقق من صحة الناتج .

الحل/

$$C=A-B=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}=\overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}$$

التحقيق دائما نحقق في المعادلة <u>الاصلية</u>

$$A=C+B=\overset{C}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}=\overset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}}=A$$

(و.هـ.م)

مثال10/ حل المعادلة المصفوفية الاتية : $-3\left(C-\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right)=(-4)C+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

الحل/

$$(-3)C+3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}=(-4)C+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(-3)C+\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}=(-4)C+\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4C-3C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$2-3=\underline{-1}$, $0-(-3)=\underline{3}$, $1-3=\underline{-2}$, $-1-0=\underline{-1}$

حلول تمارين (1 - 9)

(1) جد قيم x,y,z,h اذا كان :

(أ) $\begin{bmatrix} x-2 & 2y+1 \\ x+3 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ z & 3h-2 \end{bmatrix}$

الحل/

$x-2=3 \rightarrow x=5$

$x+3=z$

$5+3=z$

$z=8$

$2y+1=-5$

$2y=-6$

$y=-3$

$3h-2=16$

$3h=16+2$

$3h=18$

$h=6$

$\therefore x=5 \quad z=8 \quad h=6 \quad y=-3 \qquad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3x & 10 \\ 2x+z & 2y-h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 2y \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

الحل/

$3x=15 \rightarrow x=5$

$2y-h=0$

$2\times 5-h=0$

$h=10$

$2y=10 \rightarrow y=5$

$2x+z=10$

$2\times 5+z=10$

$10+z=10$

$z=10-10 \rightarrow z=0$

$x=5 \quad z=0 \quad y=5 \quad h=10 \qquad \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$

---

(2) اجر العمليات الاتية ان امكن مع ذكر السبب في حالة تعذر اجراء العملية ؟

(أ) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & -9 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$ غير ممكن لانهما من نوعين مختلفين

(غير ممكن لانهما ليسا من حجم واحد) (المصفوفتان ليس لهما نفس القياس)

(ج) $\begin{bmatrix} 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ غير ممكن لانهما مختلفتان الاولى مصفوفة صف والثانية مصفوفة عمود

(د) $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}$ غير ممكن من قياسين مختلفين

(3) اذا كانت $A=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ **فجد المصفوفة k.A عندما تكون**

(أ) $k=1$ $\qquad k.A=1\times\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(ب) $k=\frac{2}{5}$ $\qquad k.A=\frac{2}{5}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & -\frac{6}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(ج) $k=0$ $\qquad k.A=0\times\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(د) $k=-1$ $\qquad k.A=-1\times\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

(هـ) $k=2$ $\qquad k.A=2\times\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -4 & -6 \\ 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{bmatrix}$

---

(4) اذا كانت $A=[5 \quad 1], B=[0 \quad 5], C=[0 \quad -5]$ **فعبر عن كل مما يأتي كمصفوفة**

(a) $A+(B+C)=[5 \quad 1]+[0 \quad 5]+[0 \quad -5]$

$=[5 \quad 1]+[0 \quad 0]=[5 \quad 1]$

(b) $2A+B-C=2[5 \quad 1]+[0 \quad 5]-[0 \quad -5]$

$=[10 \quad 2]+[0 \quad 5]+[0 \quad 5]$

$=[10 \quad 2]+[0 \quad 10]$

$=[10 \quad 12]$

---

(5) بأستعمال المصفوفات A,B,C الواردة في التمرين (4) حل كلاً من المعادلات المصفوفية الاتية :

(a) $A+x=B+C$

$x=B+C-A$

$=\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-5 & -1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-5 & -1\end{bmatrix}$

(b) $2(B-C)=2(x-C)-B$

$2B-\cancel{2C}=2x-\cancel{2C}-B$

$2B+B=2x$

$2x=3B \Rightarrow x=\frac{3}{2}B$

$x=\frac{3}{2}B \Rightarrow x=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{15}{2}\end{bmatrix}$

(c) $\frac{1}{2}(A+x)=3x+2B$

$\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}x=3x+2B$

$\frac{1}{2}A-2B=3x-\frac{1}{2}x$

$\frac{1}{2}A-2B=2\frac{1}{2}x$

$2\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}A-2B$

$(\frac{5}{2}x=\frac{1}{2}A-2B)\frac{2}{5}$

$x=\frac{1}{5}A-\frac{4}{5}B$

$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}-\frac{4}{5}\begin{bmatrix}0 & 5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -4\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}1 & -3\frac{4}{5}\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{19}{5} \end{bmatrix}$$

مثال اثرائي / بين ان $C(KM)=(CK)M$ **علما ان** $C=2 \quad K=3 \quad M=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Solution

$$C(KM) = 2(3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}) = 2\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

$$(CK)M = (2.3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 18 & 24 \end{bmatrix}$$

ضرب المصفوفات

(a) الضرب معرف

المصفوفة الاولى · المصفوفة الثانية

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(b) الضرب غير معرف

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$$

(c) الضرب غير معرف

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان تكونان قابلتين للضرب اذا وفقط اذا كان عدد اعمدة المصفوفة الاولى (اليسرى) يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية (اليمنى) .

الاولى من النوع $\underset{m}{1}$ (صف واحد) $\times$ $\underset{n}{3}$ (ثلاثة اعمدة) $\leftarrow$ k (أعمدة) $\times$ $m^{(1)}$ (1×1)

ناتج الضرب $m\times n$

الثانية من النوع 1 (عمود واحد) $\times$ 3 (ثلاثة صفوف) $n^{(1)} \times k$ (صفوف) يتحدد لـ عدد الصفوف عدد الاعمدة

ناتج الضرب هو $\rightarrow$ thefirst $\times$ thefirst+thesecond $\times$ thesecond+third $\times$ third

الثالث $\times$ الثالث+ الثاني $\times$ الثاني + الاول $\times$ الاول $\longrightarrow$ اتجاه القراءة

ناتج ضرب المصفوفتين في (a) اعلاه هو : $1.4+2.5+3.6=[32]\, m\times n(1\times1)$

مثال/ لتوضيح ضرب المصفوفات .

جد ناتج الضرب AB عندما تكون $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$

اولاً : نختبر هل ان المصفوفتين قابلتين للضرب . لاحظ ان الاولى عمودين والثانية صفين
∴ المصفوفتان قابلتان للضرب .

ثانيا : ماهو حجم ناتج الضرب (نوع المصفوفة) ؟
ستكون المصفوفة الناتجة ذات صفوف بقدر صفوف A وذات اعمدة بقدر اعمدة B .

أي سيكون حجمها $\overset{m}{2}\times\overset{n}{3}$ ← اتجاه القراءة

لاحظ ثانياً $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}?&?&?\\?&?&?\end{bmatrix}$ لاحظ ثانياً

الجدول ادناه يوضح تسلسل عملية الضرب

ناتج عملية الضرب والجمع	تسلسل الضرب	ارقام الصفوف والاعمدة
$1\cdot5+2\cdot7=(19)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$ column	Row1,column1 صف عمود
$1\cdot6+2\cdot8=(22)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$ column	Row1,column2
$1\cdot0+2\cdot1=(2)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$ column	Row1,column3
$3\cdot5+4\cdot7=(43)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$ Column	Row2,column1
$3\cdot6+4\cdot8=(50)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$ Column	Row2,column2
$3\cdot0+4\cdot1=(4)$	Row $\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}$	Row2,column3

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6&0\\7&8&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22&2\\43&50&4\end{bmatrix}$$

مثال / لتكن $B=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}$ and $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$

احسب AB ثم BA ، بين ان $BA\neq AB$ وهذا يبين عموماً ان ضرب المصفوفة ليس ابدالي .

Solution

$$AB=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot5+2\cdot7&1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7&3\cdot6+4\cdot8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19&22\\43&50\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\cdot1+6\cdot3&5\cdot2+6\cdot4\\7\cdot1+8\cdot3&7\cdot2+8\cdot4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23&34\\31&46\end{bmatrix}$$

قارن النتائج ستلاحظ $AB\neq BA$

ملاحظة

شروط ضرب $A\times B$ هي :
(١) اعمدة A = صفوف B
(٢) اذا كانت A من النوع $M\times L$ وكانت B من النوع $L\times n$ فأن حاصل ضرب $A\times B$ يكون مصفوفة من النوع $m\times n$ أي ان المصفوفة AB يكون صفوفها بقدر صفوف A واعمدتها بقدر اعمدة B .
(٣) اذا كانت A,B مصفوفتين مربعتين $m\times m$ فان كلاً من $A\times B$ و $B\times A$ مصفوفة مربعة $m\times m$ وبصفة خاصة اذا كنات A=B فسنكتب AA بالصورة x^2 أى ان $A^2=AA$

مثال1/ اذا كانت $B=\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}2&-3\\4&5\end{bmatrix}$

فجد ان امكن : (a)$A\times B$ (b)$B\times A$ (c)A^2 (d)B^2

الحل/ ∵ عدد اعمدة A = عدد صفوف B فأن $A\times B$ يمكن ايجادها :

(a) $A\times B=\begin{bmatrix}2&-3\\4&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0&3\\2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&-3&6\\14&5&12\end{bmatrix}$

(b) $B\times A$ ← لايمكن ايجادها لان عدد اعمدةB ≠ عدد صفوف A

(c) $A^2=A\times A=\begin{bmatrix}2&-3\\4&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-3\\4&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&-21\\28&13\end{bmatrix}$

(d) $B^2=B\times B$ لايمكن ايجادها لان اعمدة B ≠ صفوف B

مثال 3/ اذا كانت $*I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ Identity* محايدة $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$

فأثبت ان $A\times I = I\times A$ وماذا تستنتج من ذلك ؟

الحل/ $A\times I=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}+0&0+a_{12}\\a_{21}+0&0+a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=A$

وكذلك $I\times A=A$ ∴ نستنتج ان : $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$

مصفوفة محايدة بالنسبة لعملية ضرب المصفوفة المربعة من النوع 2×2 (Identity)

مثال 4/ اذا علمت ان : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ **فجد كلاً من x,y,z**

الحل/

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1+0\times(-2)+-1\times 3 \\ 0\times 1+-2\times -2+3\times 3 \\ 2\times 1+1\times -2+0\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 13 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore x=-2 \quad , \quad y=13 \quad ,c=0$

مثال5/ اذا علمت ان A مصفوفة من النوع 3×2 (ثلاثة اعمدة) ، B مصفوفة من النوع 2×3 (ثلاثة صفوف) فجد نوع كل من المصفوفات التالية :

(أ) $A\times B$ (ب) $B\times A$ (ج) $(A\times B)\times A$ (د) $(B\times A)\times B$

الحل/

(أ) A مصفوفة 2×3 ، B مصفوفة 3×2 ← $A\times B$ مصفوفة بقدر صفوف A واعمدة B وهي مصفوفة 2×2 .

(ب) B مصفوفة 3×2 ، A مصفوفة 2×3 ← $B\times A$ مصفوفة بقدر صفوف B واعمدة A وهي 3×3 .

(ج) $A\times B$ مصفوفة 2×2 ،A مصفوفة 2×3 ← $(B\times A)\times A$ بقدر صفوف $(A\times B)$ واعمدة A 2×3 .

(د) $B\times A$ مصفوفة 3×3 ، B مصفوفة 3×2 ← $(B\times A)\times B$ بقدر صفوف $(B\times A)$ واعمدة B 3×2

مثال6/ اذا كانت : $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، **فأثبت ان :** (محايدة I=Identity) $A^2-3A+2I=0$ ؟

الحل/

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

. الطرف الايسر L.S $A^2-3A+2I=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=0 \ = R.S$$

حلول تمارين (2 - 9)

(1) اذا كانت $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$ ، $C=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$

(a) $A\times B$

$$A\times B=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=C$$

(b) $A\times C$

$$A\times C=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=B$$

(c) $B\times C$

$$B\times C=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=A$$

(d) $B\times A$

$$B\times A=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

(e) $C\times A$

$$C\times A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

(f) $C\times B$

$$C\times B=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$$

(g)

$$(A\times B)\times C=\overset{A\times B}{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}}\overset{C}{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

(h)

$$A\times(B\times C)=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

---

(2) اذا كانت A,B,C كما في التمرين السابق وكانت I مصفوفة فأثبت ان :

(فيها القطر الاساس كل عناصره ١) مصفوفة الوحدة $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

(a) $A\times B=-(B\times A)$

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

الطرف الايسر $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}^*$

الطرف الايمن $-\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}^*$

= الايسر

(b) $A^2=C^2=I$

$$A^2=A\times A=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$C^2=C\times C=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$$

(c) $B^2=-I$

$B^2=B\times B=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$ الطرف الايسر

$-I=-\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=$ الطرف الايمن

(d) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

$\left(\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$ الطرف الايسر

$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=I$ الطرف الايمن

---

(3) اذا كانت A مصفوفة 2×3

B مصفوفة 3×3

C مصفوفة 4×3

D مصفوفة 3×2

فبين نوع كل من المصفوفات الاتية :

(أ) $A\times B$ تكون المصفوفة بقدر صفوف A واعمدة B 2×3 .

(ب) $D\times A$ تكون المصفوفة بقدر صفوف D واعمدة A 3×3 .

(ج) $A\times D$ تكون المصفوفة بقدر صفوف A واعمدة D 2×2 .

(د) $C\times B$ تكون المصوفة بقدر صفوف C واعمدة B 4×3 .

(هـ) $B\times D$ تكون المصفوفة بقدر صفوف B واعمدة D 3×2 .

(و) $D(A\times B)$ تكون المصفوفة بقدر صفوف D واعمدة $(A\times B)$ 3×3 .

(ز) $(C\times B)\times D$ تكون المصفوفة بقدر صفوف $(C\times B)$ واعمدة D 4×2 .

(ح) $(D\times A)\times A$ تكون المصوفة بقدر صفوف $(D\times A)$ واعمدة A 3×3 .

---

(4) اجر عملية الضرب فيما يأتي ان امكن واذكر السبب في حالة تعذر اجراء عملية الضرب .

(a) $\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -3 & 6\\2 & -1 & 2\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ تسعة عناصر $= 3\times 3$

(b) $\begin{bmatrix}-2 & 1 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10+0+18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}28\end{bmatrix}$

لاحظ عدد صفوف الاولى × عدد اعمدة الثانية = 1×1 عمود واحد صف واحد $[28]$

(c) $\begin{bmatrix}-1 & 3\\0 & 1\\2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0 & 4\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\1 & 1 & 1\\8 & 4 & 12\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}2 & -1 & 8 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$ $4\neq 3$ اعمدة الاولى ٤ صفوف الثانية ٣

غير ممكنة لان عدد اعمدة الاولى لايساوي عدد صفوف الثانية

(e) $\begin{bmatrix}-1 & -3 & 2\\5 & 3 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9 & 1 & 0\\2 & -4 & 5\end{bmatrix}$ $3\neq 2$ عدد اعمدة الاولى عدد صفوف الثانية

غير ممكنة لان عدد اعمدة الاولى لايساوي عدد صفوف الثانية

(f) $\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\2 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}$ الاولى صفين الناتجة صفين

دائما عدد صفوف الناتجة = عدد صفوف الاولى

$\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 3\\2 & -1 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 4 & -2 & 3\\1 & -3 & 1 & -3\end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 4\\-3 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}$ $3\neq 2$ اعمدة الاولى صفوف الثانية

غير ممكنة لان $2\neq 3$

(h) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\4 & 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\0 & 1 & 4\\-3 & 2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 2 & -2\\-14 & 9 & 38\end{bmatrix}$

(5) اذا كانت $C=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$

بين صحة او خطا كل من العبارات الاتية مع ذكر السبب :

(a) $A\times(B\times C)=A\times B+A\times C$

$$L.S=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}*$$

$$R.S=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&1\\3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}*$$

صائبة عملية الضرب توزيعية على الجمع $L.S=R.S$

(b) $(B+C)\times A=B\times A+C\times A$

$$L.S=\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\0&0\end{bmatrix}*$$

$$R.S=\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\0&0\end{bmatrix}*$$

صائبة عملية الضرب توزيعية $L.S=R.S$

(c) $A\times(B+A)=A\times B+A^2$

$$L.S=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\1&12\end{bmatrix}*$$

$$R.S=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&8\\4&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&9\\1&12\end{bmatrix}*$$

صائبة عملية توزيعية على الجمع $L.S=R.S$

(d) $A\times(B+C)=B\times A+C\times A$

$$L.S=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2\\0&2\end{bmatrix}*$$

$$R.S=\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&3\\-1&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&3\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&6\\0&0\end{bmatrix}*$$

$\therefore$ خاطئة عملية ضرب المصفوفات غير ابدالية $L.S\neq R.S$

(e) $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$

$$L.S=\left(\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\-3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-3\end{bmatrix}\ *$$

$$R.S=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2\\1&-3\end{bmatrix}\ *$$

صائبة عملية الضرب تجميعية L.S=R.S

---

(6) اذا كانت $B=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}$ فأثبت ان :

(a) $A^2-2A-3I=0$

البرهان

$$L.S=\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&4\\0&9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&-4\\0&-6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3&0\\0&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0\ \ R.S$$

(b) $B^2-2B+2I=0$

البرهان

$$L.S=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&2\\-2&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2&-2\\2&-2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=0\ \ R.S$$

(c) $A\times B\neq B\times A$

$$L.S=\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3&1\\-3&3\end{bmatrix}$$

$$R.S=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&2\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&5\\1&1\end{bmatrix}\quad \therefore A\times B\neq B\times A$$

---

(7) اذا كانت $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فاثبت ان $A\times B=B\times A=I$

الحل / لاحظ ان $A\times B$ كل منهما النظير الضربي للاخر .

$$L.S=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$R.S=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

[7 – 9] النظير الضربي لمصفوفة

سنتناول هنا دراسة النظير الضربي للمصفوفات المربعة من النوع 2×2 فقط .

تعريف

النظير الضربي للمصفوفة A من النوع 2×2 (ان وجد) هو المصوفة B من النوع نفسه .
بحيث يكون : $A\times B=BA=I$.
حيث I هي المصفوفة المحايدة بالنسبة لعملية الضرب (أي مصفوفة الوحدة من النوع 2×2)
سنرمز للنظير الضربي للمصفوفة A بالرمز A^{-1} (أي ان $B=A^{-1}$)

تعريف [8 – 9]

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

فان المقدار ad-bc يسمى محدد المصفوفة A ويرمز له بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ او بالرمز Δ وتقرأ دلتا أي ان

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=a.d-b.c$$

تجدر الاشارة الى ان المقدار a.d-b.c هو عبارة عن حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الاساس * في المصفوفة A مطروحاً منه حاصل ضرب العنصرين الواقعين على القطر الاخر . كما ان الخطين | | لا يرمزان للقيم المطلقة .

مثال 1/ اذا علمت ان $B=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$ فأوجد

(أ) محدد A (ب) محدد B (ج) $A \times B$ (د) $B \times A$

ماذا تستنتج من الفرعين (ج) و (د)

الحل/ (أ) محددة A

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - 0 \times -6 = 6 - 0 = 6$$

(ب) محددة B

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} - 0 \times 1 = \frac{1}{6}$$

(ج) $A \times B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(د) $B \times A$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

نستنتج من الفرعين (ج) و (د) ان كلاً من A,B نظير ضربي للاخرى أي ان حسب تعريف (٧-١٠)

$A^{-1}=B, B^{-1}=A$

تعريف [9 - 9]

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، فأن النظير الضربي للمصفوفة A يكون موجوداً (معروفاً) عندما تكون محددة $A=\Delta$ و $(\Delta \neq 0)$

فأن : $A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{d}{\Delta} & \frac{-b}{\Delta} \\ \frac{-c}{\Delta} & \frac{a}{\Delta} \end{bmatrix}$

ملاحظة

اذا كانت $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وللحصول على A^{-1} (ان كان موجوداً) فيجب اتباع الخطوات الاتية لايجاده

ويكون امراً سهلاً : وذلك بعد بعد ان نجد قيمة Δ

(أ) نبادل بين مكاني العنصرين الواقعين على القطر الاساس للمصفو A .

(ب) نغير كل من اشاراتي العنصرين الواقعين على القطر الاخر للمصفوفة A .

(ج) نضرب المصفوفة الناتجة بعد اجراء عمليتي أ ، ب بالعدد $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على A^{-1} .

مثال 2/ اذا كانت $B=\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ حيث $xy \neq 0$

فأثبت ان لكل من B ،A ، $A \times B$ نظير ضربي ثم اوجده ؟

الحل/

بالنسبة للمصفوفة A : $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=ad-bc=3\times4-0\times0=12\neq0$

∴ للمصفوفة A نظير ضربي هو : غيرنا مواقع القطر الاساس

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{4}{12} & \frac{0}{12} \\ \frac{0}{12} & \frac{3}{12} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

بالنسبة للمصفوفة B : $\Delta=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{vmatrix}=xy\neq0$

∴ للمصفوفة B نظير ضربي هو :

$$B^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\frac{1}{xy}\begin{bmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{y}{xy} & 0 \\ 0 & \frac{x}{xy} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y} \end{bmatrix}$$

وان هذا يعني انه اذا كانت B مصفوفة قطرية عناصر قطرها الاساس مغايرة للصفر فأن نظيرها مصفوفة قطرية ايضاً عناصر قطرها الاساس هي مقلوب عناصر القطر الاساس في B .

بالنسبة للمصفوفة $A\times B$:

$$A\times B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}$$

ولما كانت $A\times B$ مصفوفة قطرية قطرها مغايراً للصفر فأن :

$$(A\times B)^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}$$

تحقق بنفسك ان

$$(A\times B)^{-1}(A\times B)=(A\times B)(A\times B)^{-1}=I$$

$$L.S=\begin{bmatrix} \frac{1}{3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$R.S=\begin{bmatrix} 3x & 0 \\ 0 & 4y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{3x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I$$

$$\therefore LS=RS$$

مثال 3/ احسب قيم x التي تجعل المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي ؟

الحل/

المصفوفة $\begin{bmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{bmatrix}$ ليس لها نظير ضربي عندما تكون محددتها صفراً أي :

$$\begin{vmatrix} x & 3 \\ 12 & x \end{vmatrix} = x^2 - 3 \times 12 = \Delta$$

ليس لها نظير ضربي يعني $\Delta=0$

$\therefore x^2-36=0 \quad (x-6)(x+6)=0 \quad \left.\begin{matrix} x=6 \\ x=-6 \end{matrix}\right\}$ (تجعلان المصفوفة المعطاة ليس لها نظير ضربي)

[10 – 9] حل معادلات الدرجة الاولى في مجهولين بأستخدام المصفوفات

اذا اعطينا نظام المعادلتين :

$$ax+by=L$$
$$cx+dy=k$$

يمكن كتابتها بالصيغة المصوفية :

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{C}{\begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}}$$

فأذا فرضنا $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $C\begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$

$$A \times B = C \text{............(1)}$$

تسمى A مصفوفة المعادلات ، B مصفوفة المجاهيل ، C مصفوفة الثوابت

واذا كانت المحددة $\Delta \neq 0$ أي $\vec{\Delta} = ad - bc \neq 0$ فمن الممكن ايجاد حل المعادلة (١) كما يلي :

$A \times B = C$ .... (١)

بضرب طرفي (1) في A^{-1} $\qquad A^{-1}(A \times B) = A^{-1} \times C$

خاصية التجميع $\qquad (A^{-1} \times A)B = A^{-1} \times C$

من تعريف نظير A $\qquad I \times B = A^{-1} \times C$

لان I عنصر محايد $I \times n = n$ $\qquad \boxed{B=A^{-1}C}$

ومن الواضح انه بمقدورنا الان ايجاد المجهولين x,y (اللذين يشكلان حل نظام المعادلتين الاصليتين) بدلالة الثوابت العددية a,b,c,d,L,k .

مثال 6/ حل نظام المعادلتين الاتيتين بأستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج :

$2x+5y=1$.................(1)

$3x+7y=2$...................(2)

الحل/ نكتب المعادلة المصفوفية

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}\underset{B}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$B=A^{-1}C$

لاستخراج A^{-1} يجب ان نجد Δ لمن ....لـ A

محددة A $=\Delta=2\times7-5\times3=14-15=-1\neq0$

∴ A لها نظير ويكون الحل $\boxed{B=A^{-1}C}$

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} *$$

$$* \begin{bmatrix} -7+10 \\ 3+(-4) \end{bmatrix} \begin{matrix} -7\times1+5\times2=10-7=3 \\ 3\times1+(-2)\times2=-4+3=-1 \end{matrix}$$

$x=3 \quad , \quad y=-1$

التحقيق :

بالتعويض المباشر في (2) و (1) بقيمتي x,y نجد ان :

$2\times3+5(-1)=1$

$3\times3+7(-1)=2$

حلول تمارين (3 - 9)

(1) جد النظير الضربي لكل من المصفوفات الاتية كلما امكن ذلك :

(أ) $\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}$ $A=\begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}4&0\\0&2\end{vmatrix}$

علامة المصفوفة علامة المحددة

$\Delta=4\times2-0\times0=8\neq0$ ∴ يوجد A^{-1}

$$\therefore A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}2&0\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{8}&\frac{0}{8}\\\frac{0}{8}&\frac{4}{8}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

او ∵ A مصفوفة قطرية فيمكن ايجاد النظير مباشرة $\therefore A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

(ب) $A=\begin{bmatrix}-3&9\\3&-6\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}-3&9\\3&-6\end{vmatrix}\rightarrow\Delta=(-3)(-6)-3\times9=18-27=-9\neq0$

∴ يوجد A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{-9}\begin{bmatrix}-6&-9\\-3&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&1\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(ج) $A=\begin{bmatrix}3&3\\3&3\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}3&3\\3&3\end{vmatrix}\rightarrow3\times3-3\times3=0$ ∴ لايوجد نظير ضربي لـ A

(د) $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\2&4\end{vmatrix}\rightarrow\Delta=1\times4-2\times2=0$ ∴ ليس لها نظير ضربي

(هـ) $A=\begin{bmatrix}-1&3\\0&4\end{bmatrix}$ $\Delta=\begin{vmatrix}-1&3\\0&4\end{vmatrix}=-1\times4-3\times0=-4\neq0$ ∴ يوجد نظير ضربي لـ A

$$A^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & \frac{3}{4}\\ 0 & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

(و) $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}3 & 6\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3\times 2-(-1\times 6)=6+6=12\neq 0$ $\therefore$ يوجد A^{-1}

$$A^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}2 & -6\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{12} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

(ز) $A=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=ab-0=ab\neq 0$ where $a\neq 0$, $b\neq 0$

$$A^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a} & 0\\ 0 & \frac{1}{b}\end{bmatrix}$$ {ويمكن ايجادها مباشرة لانها مصفوفة قطرية}

(2) احسب قيم x التي تجعل كلاً من المصفوفات الاتية ليس لها نظير ضربي :

(أ) $A=\begin{bmatrix}x & 2\\ 6 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta \begin{vmatrix}x & 2\\ 6 & 3\end{vmatrix}=3x-12=0 \Rightarrow x=4$

(ب) $A=\begin{bmatrix}9 & x\\ 4 & x\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}9 & x\\ 4 & x\end{vmatrix}=9x-4x=0 \Rightarrow 5x=0 \Rightarrow x=0$

واذا $A=\begin{bmatrix}4 & x\\ 4 & x\end{bmatrix} \Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix}4 & x\\ 4 & x\end{vmatrix}=4x-4x=0 \Rightarrow x=R$

(ج) $\begin{bmatrix}x & 4\\ 2 & x^{-2}\end{bmatrix}$

$$x\cdot x^{-2}-8=0$$

$$x^{-1}=8 \Rightarrow \frac{1}{x}=8 \Rightarrow x=\frac{1}{8}$$

(د) $A=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 1 & x^{2}\end{bmatrix}$

$$x^{-2}\cdot x^{-2}-2=0$$

$$x^{-4}=2 \Rightarrow \frac{1}{x^4}=2$$

$$x^4=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\mp\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

(3) اذا كانت $x=\begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ فأثبت ان $x^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

الحل/

$$x=\begin{bmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=12-0=12 \neq 0$$

$$x^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

---

(4) اذا كانت $y=\begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix}$ فأثبت ان $y^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$ حيث $ab \neq 0$

الحل/

$$Ay=\begin{bmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{bmatrix} \rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} a & -ab \\ 0 & b \end{vmatrix}=ab-0=ab \neq 0$$

$$\therefore y^{-1}=\frac{1}{ab}\begin{bmatrix} b & ab \\ 0 & a \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 1 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix}$$

---

(5) اذا كانت $A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ فأبت ان $A^{-1}=A$ ؟

الحل/

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1-0=-1 \neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=-1\begin{bmatrix} -1 & -x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & -1 \end{bmatrix}=A$$

---

(6) اذا كانت $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}$ ، $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ فأجب عما يأتي :

(أ) احسب كلاً من : B^{-1} ، A^{-1}

الحل/

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \Delta\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}=1\times 8-2\times 3=8-6=2 \neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}8 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ \frac{-3}{4} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}\rightarrow \Delta\begin{vmatrix}2 & 0\\ 8 & 3\end{vmatrix}=6-0=6\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}3 & 0\\ -8 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

(ب) جد ناتج $B^{-1}\times A^{-1}$ ، $A^{-1}\times B^{-1}$

الحل/

$$A^{-1}\times B^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{17}{12} & \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$$B^{-1}\times A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{35}{6} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

(ج) جد ناتجهما $(A\times B)^{-1}$ ، $A\times B$

الحل/

$$A\times B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 8 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 70 & 24\end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix}18 & 6\\ 70 & 24\end{bmatrix}\rightarrow \Delta\begin{vmatrix}18 & 6\\ 70 & 24\end{vmatrix}=18\times 24-6\times 70=12\neq 0$$

$$(A\times B)^{-1}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}24 & -6\\ -70 & 18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{35}{6} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

(د) تحقق من ان $(A^{-1})^{-1}=A$

الحل/ من الحل السابق نكتب قيمة A^{-1}

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\rightarrow \Delta\begin{vmatrix}4 & -1\\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

$$(A^{-1})^{-1}=(1\div\frac{1}{2})\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}=1\times 2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 8\end{bmatrix}=A$$

(7) $3x-4y=-5$

$3y-5x=1$ **حل نظام المعادلتين اعلاه بأستخدام المصفوفات ثم حقق النتائج ؟**

الحل/ نرتب المعادلتين حسب المعادلة القياسية $ax+by=k$

$3x-4y=-5$

$-5x+3y=1$

$$A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-5\\ 1\end{bmatrix}\quad \Delta=3\times3-(-5\times-4)=9-20=-11\neq0$$

$\therefore$ A لها نظير ويكون الحل $B=A^{-1}\times C$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{-11}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{3}{4} & \frac{-4}{11}\\ -\frac{5}{11} & \frac{-3}{11}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-3}{11} & \frac{-4}{11}\\ \frac{-5}{11} & \frac{-3}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{11}-\frac{4}{11}\\ \frac{25}{11}-\frac{3}{11}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}\quad \therefore x=1\ ,\ y=2$$

التحقيق $3\times1-4\times2=-5\quad -5\times1+3\times2=1$

ثانياً : المحددات DETERMINANTS

رتب المحددات

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 6 & 4 & 3\\ -9 & 9 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}\begin{vmatrix}3 & 7 & 8 & 9\\ 5 & 6 & 4 & 3\\ -9 & 9 & 0 & 1\\ 1 & 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

اعلاه مصفوفات مربعة ومحدداتها مرسومة اسفلها . المحددة ذات عدد الصفوف (n) والاعمدة (n) تعرف بالمحددة ذا ت الرتبة النونية nth-order determinant

وبالتالي فأن المحددات اعلاه يطلق عليها على التوالي :

محددة الرتبة الثانية – الثالثة والرابعة – وهكذا .

[11 – 9] محددات الرتبة الثانية واستخداماتها في حل معادلات المجهولين

اذا اعطينا نظام المعادلتين الاتيتين في مجهولين x,y :

$$ax+by=L.............(1)$$

$$cx+dy=k.............(2)$$

فأن الاعداد a,b,c,d تسمى المعاملات ، اما العددان L,k فيسميان الثوابت .

تسمى $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ محددة المعاملات ويرمز لها بالرمز Δ ، نلاحظ ان معاملات المجهول x تكون العمود الاول للمحددة Δ .

تسمى $\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}$ محددة المجهول X ونرمز لها بالرمز Δx ونحصل عليها من محددة Δ وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الاول (معاملات x) بالثوابت L,k .

كما تسمى $\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}$ محددة المجهول y ونرمز لها بالرمز Δy وذلك بعد الاستعاضة عن العمود الثاني (معاملات y) بالثوابت L,k .

والان بفرض ان $\Delta \neq 0$

$$\overset{\Delta x}{}\qquad \left|\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}\right| \begin{matrix} L \\ k \end{matrix} \qquad \underset{\Delta y}{}$$

فأن قيميت المجهولين x,y تتحددان بالعلاقتين

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} L & b \\ k & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{Ld-bk}{ad-bc}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a & L \\ c & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ak-cL}{ad-bc}$$

مثال/ حل نظام المعادلتين الاتيتين باستخدام المحددات .

$$\begin{matrix} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{matrix} \qquad \overset{\Delta x}{} \left|\begin{matrix} 2 & \Delta & 5 \\ 3 & & 7 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \underset{\Delta y}{}$$

$$2x+5y=1..............................(1)$$

$$3x+7y=2..............................(2)$$

تنقل الى

ايجاد Δx

$$\text{ايجاد } \Delta \left\{ \begin{matrix} \rightarrow & 2 & \rightarrow & 5 \\ \rightarrow & 3 & \rightarrow & 7 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$

تنقل الى

ايجاد Δx

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}1&5\\2&7\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}}=\frac{1\times7-2\times5}{2\times7-3\times5}=\frac{-3}{-1}=3$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&5\\3&7\end{vmatrix}}=\frac{2\times2-3\times1}{2\times7-3\times5}=\frac{1}{-1}=-1$$

التحقيق
$2(3)+5(-1)=6-5=1$
$3(3)+7(-1)=9-7=2$

المحددات من الرتبة الثالثة

مثال 4/ اذا كانت $A=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&0&4\\0&-1&5\end{bmatrix}$

فجد قيمة محددة A(Δ)

محددة A = $\Delta=2(0\times5-(-1\times4)-3(1\times5-4\times0)+0(1\times-1-0\times0)$
$=2(4)-3(5)+0$
$=8-15 \quad =-7$

الحل/ للحل طريقتان

(1) طريقة الستائر

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&0\\1&0&4\\0&-1&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0&4\\-1&5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&4\\0&5\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&0\\0&-1\end{vmatrix}$$

$=2(0\times5-(-1\times4)-3(1\times5-4\times0)+0((1\times-1)-0\times0)$
$=2(4)-3(5)+0$
$=8-15=-7$

(2) طريقة كريمر

نكتب المحددة ثم نضيف تكرار العمودين الاول والثاني ومن ثم نضرب حسب الاسهم مبتدئين من اول العمود الاول ، الثلاثة الاولى تجميع ويطرح منها مجموع الثلاثة الاخيرة .

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}$$

$\Delta=(2\times0\times5+3\times4\times0+0\times1\times-1)-(0\times0\times0+2\times4\times-1+3\times1\times5)$

$=(0+0+0)-(0+(-8)+15)$

$=-(7)=-7$

[1 - 11 - 9] استخدام المحددات في حل ثلاث معادلات من الدرجة الاولى في ثلاث متغيرات x,y,z

اذا كان لدينا نظام المعادلات الاتي في ثلاث مجاهيل x,y,z

$ax+by+cz=d$

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$

$a_2x+b_2y+c_2z=d_2$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

ابدالها Δx

يحل مكان العمود الاول

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \begin{matrix} d \\ d_1 \\ d_2 \end{matrix}$$

مكان العمود 3

مكان العمود 2

ابدالها Δz

ابدالها Δy

محددة المعاملات (Δ)

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d & b & c \\ d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta y=\begin{vmatrix} a & d & c \\ a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \end{vmatrix} \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

نضع الثوابت مكان معاملات x نضع الثوابت مكان معاملات y نضع الثوابت مكان معاملات z

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta} \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}$$

(و.هـ.م)

مثال 6/ جد حل نظام المعادلات الاتي :

$x+3y-z=1$

$2x+2y+z=0$

$3x+y+2z=-1$

الحل/ نجد محدد المعاملات Δ

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$\Delta = 1(4-1)-3(4-3)+(-1)(2-6) = 3-3+4 = 4$$

نجد محددات المجاهيل بالتسلسل

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x=1(4-1)-3(0-(-1))+(-1)(0-(-2))$$
$$=3-2-3=-2$$

Δx

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right|$$

Δy

Δz

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y=1(0-(-1))-1(4-3)+(-1)(-2-0) = 1-1+2=2$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta=1(-2-0)-3(-2-0)+1(2-6) = -2+6-4=6-6=0$$

$$x=\frac{\Delta x}{x}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{0}{4}=0$$

مثال 7/ جد قيم k التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

$x+ky=0$

$2x-y=0$

الحل/ يكون لهذا النظام حل عندما تكون محددة معاملاته لا تساوي صفراً .

عندما

$$\begin{vmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow -1-2k \neq 0 \rightarrow 2k \neq -1 \rightarrow k \neq -\frac{1}{2}$$

$$\therefore k \in R \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

خواص المحددات

(1) في أي محدد اذا بدلت الصفوف بالاعمدة والاعمدة بالصفوف بنفس ترتيبها فان قيمة المحدد لا تتغير .

مثلاً/

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 8 & 14 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -3 & 0 & 14 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix}$$

---

(2) قيمة المحدد لاتتغير عند ايجاد قيمته عن طريق عناصر احد صفوفه او احد اعمدته .

مثلاً/ لايجاد قيمة المحدد :

اولاً / نجده عن طريق عناصر احد صفوفه

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 54$$

ثانياً. نجده عن طريق عناصر احد اعمدته

$$= 2\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 54$$

---

(3) اذا كانت جميع عناصر أي صف او عمود في محدد كلها اصفار فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

مثلاً/

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

---

(4) في أي محدد اذا بدلنا موضعي صفين او عمودين فان قيمة المحدد الناتج تساوي قيمة المحدد الاصلي مضروباً في (١-) .

مثلاً/ تبديل عمودين احدهما بدل الاخر

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix}$$

تبديل عمودين

(5) اذا تساوت العناصر المتناظرة في أي صفين (او عمودين) في محدد فان قيمة المحدد تساوي صفراً .

مثلاً/ لان عناصر الصف الاول = عناصر الصف الثالث

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

(6) اذا وجد عامل مشترك في جميع عناصر أي صف (او أي عمود) في محدد فان هذا العامل يمكن اخذه خارج المحدد

$$2\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 10 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ -1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6^* & 5 & 1 \\ 12^* & 7 & 8 \\ -2^* & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

(7) لا تتغير قيمة المحدد اذا اضيفت عناصر أي صف او (عمود) مضروبة بعدد(k) الى العناصر المقابلة لها في صف او عمود اخر .

مثلا/ بدون فك المحدد اثبت ان :

$$\begin{vmatrix} a+b & c+1 & 1 \\ b+c & a+1 & 1 \\ a+c & b+1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

الحل/

نضيف العمود الاول الى الثاني فنحصل على :

$$\begin{vmatrix} a+b & a+b+c+1 & 1 \\ b+c & a+b+c+1 & 1 \\ a+c & a+b+c+1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

∵ عناصر العمودين الثاني والثالث متساوية (كيف) فناتج المحددة = 0

كيف ؟ كما يلي :

ان ناتج اضافة الاعداد الثلاثة (a,b,c) الى الواحد
ام ان يكون =0 او أي عدد سالب او أي عدد موجب
فمثلاً اذا كان =صفر (حسب الخاصية الثالثة) فان ناتج المحدد =0
واذا كان العدد سالب وليكن فرضاً 7- (حسب الخاصية السادسة) يمكن اخذه خارج

المحددة هكذا $\begin{array}{cc} -7 & 1 \\ -7=-7 & 1 \\ -7 & 1 \end{array}$

واذا كان العدد موجب وليكن فرضاً ٨ (كذلك حسب الخاصية السادسة) يمكن اخذه خارج

المحددة هكذا $\begin{array}{cc} 8 & 1 \\ 8=8 & 1 \\ 8 & 1 \end{array}$

∴ بتساوي العمودان الثاني والثالث

مثال 1/ اثبت ان قيمة المحدد = 0 دون استخدام طريقة المحددات

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}=0$$

الحل/

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & -2 \\ -1 & -3 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}_{(5)}$$

اخراج عامل مشترك (3) من عناصر العمود الثاني خاصية (6)

حسب الخاصية (5) $\Delta = 3 \times 0 = 0$

مثال 2/ اثبت ان : (باستخدام خواص المحددات)

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = -42\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل/

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 42 & -15 & 6 \\ 21 & 2 & 12 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 6 & -15 & 6 \\ 3 & 2 & 12 \end{vmatrix}$$ خاصية (6)

(7) عامل مشترك من عناصر العمود الاول

$$= 7\times 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 6 & -15 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$ خاصية (6)

(2) عامل مشترك من عناصر العمود الثالث

$$= 7\times 2\times(-3)\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$ خاصية (6)

(-3) عامل مشترك من عناصر الصف الثاني

$$= -42\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

حلول تمارين (4 – 9)

(1) احسب قيمة المحددات الاتية :

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 30-0 = 30$

(b) $\begin{vmatrix} -7 & 13 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} = 49-169 = -120$

(c) $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 12-12 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 5 & 0 \end{matrix} \rightarrow \Delta=(0-5+0)-(-1+0+0)=-5+1=-4$

(e) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 3 \times 0 - 0 + 0 = 0$ (خاصية ٣)

(f) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta=0$ (خاصية ٥)

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{matrix} \rightarrow \Delta=(64+120+72)-(64+72+120)=0$

---

(2) جد حل كل من انظمة المعادلات الاتية باستخدام المحددات :

ثم استخدم المصفوفات لحل انظمة هذه المعادلات .

(a) $x+2y=0$
$2x-3y=1$

الحل/

$$\begin{array}{cc|c} & \Delta x & \\ 1 & \Delta\ 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ & & \Delta y \end{array}$$

$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta=-3-4=-7$

$\Delta x=\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta x=0-2=-2$

$\Delta y=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \Delta y=1-0=1$

$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-2}{-7}=\frac{2}{7}$

$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{1}{-7}=-\frac{1}{7}$

(b) $-3x-5y=-1$
$x+6y=3$

الحل/

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & -5\\ 1 & 6\end{vmatrix} \rightarrow \Delta=-18-(-5)=-13$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}-1 & -5\\ 3 & 6\end{vmatrix} \rightarrow \Delta x=-6-(-15)=9$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix} \rightarrow \Delta y=-9-(-1)=-8$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{9}{-13}=-\frac{9}{13}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-8}{-13}=\frac{8}{13}$$

(c) $2x=3y+4$
$5y=-4x-1$

الحل/ نرتب حسب المعادلة القياسية

$2x-3y=4$
$4x+5y=-1$

$$\left|\begin{array}{cc|c}2 & -3 & 4\\ 4 & 5 & -1\end{array}\right.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 5\end{vmatrix} \rightarrow \Delta=10-(-12)=10+12=22$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}4 & -3\\ -1 & 5\end{vmatrix} \rightarrow \Delta x=20-3=17$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 4 & -1\end{vmatrix} \rightarrow \Delta y=-2-16=-18$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{17}{22}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-18}{22}=\frac{-9}{11}$$

(d) $6L-7k=0$
$4L+3k=0$

$$\left|\begin{array}{cc|c}6 & -7 & 0\\ 4 & 3 & 0\end{array}\right.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}6 & -7\\4 & 3\end{vmatrix} \rightarrow \Delta=18-(-28)=46$$

حسب الخاصية (٣)

$$\Delta y=\begin{vmatrix}6 & 0\\4 & 0\end{vmatrix} \quad \Delta x=\begin{vmatrix}0 & -7\\0 & 3\end{vmatrix}$$

ان قيمة المحددات اعلاه تساوي صفراً

$$x=\frac{0}{46}=0 \qquad y=\frac{0}{46}=0$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}0 & -7\\0 & 3\end{vmatrix} \rightarrow \Delta x=0-0=0$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}6 & 0\\4 & 0\end{vmatrix} \Delta y=0-0=0$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{0}{46}=0 \quad , \quad \Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{0}{46}=0$$

نعود ونحلها بالمصفوفات

$$B=A^{-1}\times C$$

$$ax+by=L$$
$$cx+dy=k$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L\\k\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}L\\k\end{bmatrix}$$

(a) $x+2y=0$
$2x-3y=1$

الحل/ نكتب المعادلة المصفوفية

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & -3\end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

$\Delta=-3-4=-7$ محددة A

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix}-3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{-7}\begin{bmatrix}-3 & -2\\-2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\\frac{2}{7} & \frac{-1}{7}\end{bmatrix}$$

$$B=A^{-1}C=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{7} & \frac{2}{7}\\\frac{2}{7} & \frac{-1}{7}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{7}\\-\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

$$x=\frac{2}{7} \quad , \quad y=-\frac{1}{7}$$

(b) $B=A^{-1}\cdot C$

$-3x-5y=-1$
$x+6y=3$

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -5\\1 & 6\end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}=-18+5=-13$$

$$A^{-1}=\frac{1}{-13}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot C=\begin{bmatrix} -\frac{6}{13} & \frac{-5}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\frac{9}{13} \\ \frac{8}{13} \end{bmatrix}$$

$$x=\frac{-9}{13} \quad , \quad y=\frac{8}{13}$$

(c) $2x-3y=4$

$4x+5y=-1$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Delta=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}=10+12=22 \qquad A^{-1}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot C=\begin{bmatrix} \frac{5}{22} & \frac{3}{22} \\ -\frac{2}{11} & \frac{1}{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{17}{22} \\ -\frac{9}{11} \end{bmatrix} \rightarrow \quad x=\frac{17}{22} \qquad y=\frac{-9}{11}$$

(d) $6L-7k=0$

$4L+3k=0$

$$A=\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}$$

$$\Delta=18-(-28)=46\cdot A^{-1}=\frac{1}{46}\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{46} & \frac{7}{46} \\ \frac{-2}{23} & \frac{3}{23} \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} L \\ k \end{bmatrix}=A^{-1}\cdot C=\begin{bmatrix} \frac{3}{46} & \frac{7}{46} \\ -\frac{2}{23} & \frac{3}{23} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad x=0 \quad , \quad y=0$$

(3) جد قيمة m التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

x+2y=1
3x+my=4

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & m\end{vmatrix}=m-6\neq 0 \rightarrow m\neq 6$$

$$\therefore m\in R\backslash\{6\}$$

---

(4) استخدم المحددات لحل انظمة المعادلات الاتية :

(a) x+y+z=1
2x-y-z=-1
3x+2y+0z=2 (الاصلية 3x+2y=2)

<u>الحل/</u>

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 2\end{matrix} \rightarrow \Delta=(0-3+4)-(0-2-3)=6$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{vmatrix} \rightarrow \Delta x=0$$

حسب الخاصية (٥) اذا تساوت العناصر المتناظرة فان قيمة المحدد = 0

$$\Delta y=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 3 & 2\end{matrix} \rightarrow \Delta y=(0-3+4)-(0-2-3)=6$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 3 & 2 & 2\end{vmatrix} \rightarrow \Delta z=0$$

حسب الخاصية (٥)

$$\therefore\ x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{0}{6}=0\ ,\ y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{6}{6}=1\ ,\ Z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{0}{6}=0$$

(b) -x+3y+z=0
3x-2y-z=1
x+y+2z=0

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 3 & 1\\ 3 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=-(-4+1)-3(6+1)+(3+2)=-13$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}0&3&1\\1&-2&-1\\0&1&2\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}-2&-1\\1&2\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}$$

$$=zero-3(2-0)+1(1-0)=-6+1=-5$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}-1&0&1\\3&1&-1\\1&0&2\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}1&-1\\0&2\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3&-1\\1&2\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}$$

$$=-1(2-0)-zero+1(0-1)=-2-1=-3$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}-1&3&0\\3&-2&1\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\begin{vmatrix}-2&1\\1&0\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}$$

$$=-1(0-1)-3(0-1)+zero=4$$

$$\therefore x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-5}{-13}=\frac{5}{13}\quad,\quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-3}{-13}=\frac{3}{13}\quad,\quad Z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{4}{-13}=\frac{-4}{13}$$

نرتب المعادلات

(c) $3x-2y-Z=3$
$2x-y-Z=-4$
$x+y+Z=3$

الحل/

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc}3&-2&-1&3&-2\\2&-1&-1&2&-1\\1&1&1&1&1\end{array}\right|\Rightarrow\Delta=(-3+2-2)-(-4-3+1)=3$$

$$\Delta x=\left|\begin{array}{ccc|cc}3&-2&-1&3&-2\\-4&-1&-1&-4&-1\\3&1&1&3&1\end{array}\right|\Rightarrow\Delta x=(-3+6+4)-(8-3+3)=-1$$

$$\Delta y\left|\begin{array}{ccc|cc}3&3&-1&3&3\\2&-4&-1&2&-4\\1&3&1&1&3\end{array}\right|\Rightarrow\Delta y=(-12-3-6)-(4-9+6)=-22$$

$$\Delta z=\left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & -2 & 3 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta z=(-9+8+6)-(-3-12-12)=32$$

$$\therefore x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-1}{3}=-\frac{1}{3}\quad , \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-22}{3}=-\frac{22}{3}\quad , \quad Z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{32}{3}$$

(d) $\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y+\frac{3}{4}z=1$

$3x+y-z=-2$

$6x-y+2z=0$

الحل/

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 6 & -1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta=(1+4-\frac{9}{4})-(\frac{9}{2}+\frac{1}{2}-4)=\frac{7}{4}$$

$$\Delta x=\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & 1 & -\frac{2}{3} \\ -2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta x=(2+0+\frac{3}{2})-(0+1+\frac{8}{3})=\frac{-1}{6}$$

$$=(\frac{4}{2}+\frac{3}{2})-(\frac{3}{3}+\frac{8}{3})=\frac{7}{2}-\frac{11}{3}=\frac{21-22}{6}=\frac{-1}{6}$$

$$\Delta y=\left|\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right| \rightarrow \Delta y=(-2-6+0)-(-9+0+6)=-5$$

$$\Delta z=\left|\begin{array}{ccc|cc} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & -1 & 0 & 6 & -1 \end{array}\right| \rightarrow \Delta z=(0+8-3)-(6+1+0)=-2$$

$$\therefore x=\frac{\Delta x}{\Delta}=-\frac{1}{6}\div\frac{7}{4}=-\frac{1}{6}\times\frac{4}{7}=\frac{-4}{42}=-\frac{2}{21}$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=-5\div\frac{7}{4}=-5\times\frac{4}{7}=\frac{-20}{7}$$

$$Z=\frac{\Delta z}{\Delta}=-2\div\frac{7}{4}=-2\times\frac{4}{7}=\frac{-8}{7}$$

---

(5) جد قيم m التي تجعل لنظام المعادلات الاتية حلاً :

$$x-y+Z=0$$
$$x+y+mz=0$$
$$-x-y+7=1$$

الحل/

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & m\\ -1 & -1 & 1\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & -1\\ 1 & 1\\ -1 & -1\end{matrix}\rightarrow\Delta=(1+m-1)-(-1-m-1)\neq 0$$

$$\rightarrow m+2+m\neq 0\quad\rightarrow 2m+2\neq 0\quad\rightarrow 2m\neq -2$$

$$m\neq -1$$

$$\therefore m\in R\setminus\{-1\}$$

---

(6) اثبت ان المبادلة بين صفي محددة من الدرجة (الرتبة) الثانية يغير من اشارتها فقط أي ان :

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c & d\\ a & b\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc$$

$$\begin{vmatrix}c & d\\ a & b\end{vmatrix}=bc-ad=-(ad-bc)$$

$$\therefore\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}c & d\\ a & b\end{vmatrix}$$

---

(7) حل المعادلة الاتية واوجد قيمة (X)

$$\begin{vmatrix}x & 0 & 1\\ 8 & 1-x & -x\\ x & -1 & 1+x\end{vmatrix}=0$$

الحل/

$$\begin{vmatrix}x & 0 & 1\\ 8 & 1-x & -x\\ x & -1 & 1+x\end{vmatrix}=0=\Delta$$

$$\Delta=x((1-x)(1+x)-x)-0(8(1+x)+x^2)+1(-8-x(1-x))$$

$$\Delta=x(1-x^2-x)+(-8-x+x^2)$$

$$\Delta=\underline{x}-x^2-x^2+x^2-\underline{x}-8$$

$$\Delta=-x^3-8\qquad\because\Delta=0$$

$$\therefore -x^3-8=0\rightarrow -x^3=8\rightarrow x^3=-8\rightarrow x=-2$$

التحقيق

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

$$\Delta=-2(-3+2)-0(\ \ )+1(-8+6)$$

$$=2+6-8=8-8=0$$

---

(8) باستخدام خواص المحددات جد قيمة ناتج المحدد :

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -7 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$ خاصية (6)

$$3\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & 7 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\times 0 = 0$$ خاصية (5)

---

(9) اثبت باستخدام خواص المحددات

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

الطرف الايسر (الخاصية السادسة)

$$\begin{vmatrix} 15 & 6 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 2 * & 0 * & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=6\begin{vmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$ الطرف الايمن