2021

الروعة في حلول

الرياضيات

للصف السادس الاحيائي

حسب تقليصات
وزارة التربية

للأستاذ
خالد الحيالي

1414

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة

الحمد لله رب العالمين, والصلاة والسلام على المبعوث رحمة للعالمين, محمد وعلى اله وصحبه وسلم, ومن ولاه بإحسان الى يوم الدين وبعد.......

استكمالناً لسلسلة (ملازم الطريق الى 100) تم بتوفيق من الله اكتمال (ملزمة الروعة في حلول الرياضيات) للسادس الاحيائي والتي تحتوي على جميع الاسئلة الوزارية مرتبة حسب فصول الكتاب من عام 1996 ولغاية 2020 الدور الثالث ولجميع الادوار" الاول والثاني والثالث واسئلات التمهيدي وخارج القطر والنازحين"

قبل البدء في الملزمة يجب على الطالب التعرف على نمط والية توزيع الدرجات في الامتحان الوزاري وعلى الطلاب ان يتعرف ايضاً مماً يتكون الكتاب في طبعته الحديثة بعد تغير المنهج القديم.

اعلم ان هذا الكتاب تم تأليفه عام1996 ولذلك ستجد الاسئلة الوزارية في هذه الملزمة من عام1996 .وان هذا الكتاب كانت رموزه باللغة العربية .وتم تحويل الرموز الى اللغة الانكليزية عام 2011 مع بقاء 90% من المنهج القديم حيث تم حذف الفصل السادس في الكتاب القديم الذي كان يسمى "الاحتمالية" واضافة فصل جديد كلياً وهو الفصل الخامس حالياً"المعادلات التفاضلية الاعتيادية" وتم ايضا حذف بعض المواضيع في الفصل الثالث" التفاضل" مثل الغاية واضافة بعض المواضيع للفصل الرابع"التكامل " مثل اللوغارتم الطبيعي . ليستقر الكتاب حاليا على 6 فصول وهي: الفصل الاول" الاعداد المركبة" والفصل الثاني" القطوع المخروطية" والفصل الثالث" التفاضل: والفصل الرابع" التكامل" والفصل الخامس" المعادلات التفاضلية الاعتيادية" والفصل السادس" الهندسة الفضائية"

توزيع درجات الرياضيات في الامتحان الوزاري.

اعلم قبل كل شيء ان ورقة الامتحان الوزاري غالباً ترد فيها 150 درجة مع الترك مطلوب الاجابة عن 100 درجة ولكل فرع 10 درجات وهي موزعه على الفصول كالتالي:

ملاحظة: تم تقليص المنهج للعام 2021 وتم حذف بعض المواضيع من الفصول مع حذف الفصل السادس بالكامل.

1-الفصل الاول" الاعداد المركبة" يكون نصيبه " 30 درجة"

2-الفصل الثاني" القطوع المخروطية" يكون نصيبه " 30 درجة"

3-الفصل الثالث" التفاضل" يكون نصيبه " 40 درجة"

4-الفصل الرابع" التكامل" يكون نصيبه " 30 درجة"

5-الفصل الخامس" المعادلات التفاضلية الاعتيادية" يكون نصيبه " 20 درجة"

وفي النهاية ان كان هناك خطأ او سهو فهو مني فلا يوجد كمال الا لله سبحانه وتعالى ونحن بشر نصيب مره ونخطىء مرات لذا استميحكم عذرا من الان ان كان هناك خطأ املائي فأتمنى من اخواني الطلاب واخواتي الطالبات ابلاغي به لكي اتجاوزه في الاصدارات القادمة للملزمة وفقناً الله لعمل الخير واسئل الله تعالى ان تكون ملازمي مفيدة لجميع الطلبة واتمنى لهم الموفقية في دراستهم وان يقدرنا على مساعدتهم خدمة لهذا الوطن الجريح ومن الله التوفيق.

اخوكم : خالد الحيالي

مؤسس سلسلة ملازم الطريق الى 100

اعزائي الطلبة ستجد ورقة الاسئلة يوم الامتحان الوزاري على النحو التالي:

ملاحظة: الاجابة عن خمسة اسئلة فقط (لكل سؤال 20 درجة)

س1: A- (سؤال من الفصل الاول " ايجاد قيم x و y " ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثالث"رول او القيمة المتوسطة " ويكون نصيبه "10 درجات")

س2: A-(سؤال من الفصل الرابع" المساحة المحددة بمنحني الدالة " ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثاني "قطع مشترك" ويكون نصيبه "10 درجات")

س3: A-(سؤال من الفصل الثاني"قطع زائد او ناقص او مكافىء " ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الثالث" ايجاد قيم a,b ,c " ويكون نصيبه "10 درجات")

س4: A-(سؤال من الفصل الخامس"هل ان او معادلات تنفصل متغيراتها" ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الرابع"جد تكاملات كل من: " ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثاني" قطع زائد او ناقص" ويكون نصيبه "10 درجات")

س5: A-(سؤال من الفصل الاول "مبرهنة ديموافر على الاغلب"ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الرابع" المسافة " ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثالث "رسم الدالة أو التقريب باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة"ويكون نصيبه "10 درجات")

س6: A-(سؤال من الفصل الاول" ايجاد المعادلة التربيعية او حل المعادلة التربيعية" ويكون نصيبه "10 درجات")

B-(سؤال من الفصل الخامس"المعادلات من النوع الاول " ويكون نصيبه "10 درجات")

C-(سؤال من الفصل الثالث"المعادلات المرتبطة بالزمن" ويكون نصيبه "10 درجات")

اعزائي الطلبة هذا النمط قريب جدا من النمط الوزاري مع وجود اختلاف في اماكن الفروع في بعض الادوار اي بمعنى بدل ان يكون سؤال المعادلات المرتبطة بالزمن س6 فرع C يكون س3فرع B وهكذا اي اختلاف في مواقع الاسئلة فقط .

الاسئلة الوزارية حول الفصل الاول" الاعداد المركبة"

30 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول "الصيغة الجبرية(العادية) للعدد المركب والعمليات على مجموعة الاعداد المركبة"

1/1998

س/ ضع بالصورة العادية للعدد المركب $(1+3i)^2+(3-2i)^2$

Sol:

$(1+3i)^2+(3-2i)^2$
$=(1+6i+9i^2)+(9-12i+4i^2)$
$=(-8+6i)+(5-12i)$
$=-3-6i$

1/1999

س/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $(\frac{3-i}{1+i})^2$

Sol:

$(\frac{3-i}{1+i})^2$
$=(\frac{3-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i})^2$
$=(\frac{(3-i)+(-3-i)i}{1+1})^2$
$=(\frac{2-4i}{2})^2$
$=(1-2i)^2=1-4i+4i^2=-3-4i$

1/2000

س/ اذا كان $x=2+3i, y=3-i$ جد قيمة x^2+2y^2

sol:

$x^2+2y^2=(2+3i)^2+2(3-i)^2$
$=(4+12i+9i^2)+2(9-6i+i^2)$
$=(-5+12i)+2(8-6i)$
$=(-5+12i)+(16-12i)$
$=11+0i$

1/2002

س/ ضع مايأتي بالصيغة العادية ثم جد نظيره الضربي
$(-2+i)(3+2i)$

sol : $c=(3+2i)(-2+i)$
$=-6+3i-4i+2i^2=-8-i$

$c^{-1}=\frac{1}{c}=\frac{1}{-8-i}$
$=\frac{1}{-8-i}\cdot\frac{-8+i}{-8+i}$
$=\frac{-8+i}{64+1}=\frac{-8}{65}+\frac{1}{65}i$

1/2003

س/ جد النظير الضربي للعدد المركب $3+5i$ ثم ضعه بالصورة العادية.

sol :

$c^{-1}=\frac{1}{c}=\frac{1}{3+5i}$
$=\frac{1}{3+5i}\cdot\frac{3-5i}{3-5i}$
$=\frac{3-5i}{9+25}=\frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$

1/2004

س/ جد الصيغة العادية للعدد المركب $(1-\sqrt{3}\,i)^2-(2-\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$(1-\sqrt{3}\,i)^2-(2-\sqrt{3}\,i)^2$
$=(1-2\sqrt{3}\,i+3i^2)-(4-4\sqrt{3}\,i+3i^2)$
$=(-2-2\sqrt{3}\,i)-(1-4\sqrt{3}\,i)$
$=(-2-2\sqrt{3}\,i)+(-1+4\sqrt{3}\,i)=-3+2\sqrt{3}\,i$

1/2005

س/ جد ناتج بالصيغة الديكارتية $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$

sol:

$(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$
$=(9+24i+16i^2)+(5+5i-3i-3i^2)$
$=(-7+24i)+(8+2i)=1+26i$
$=(1,26)$

2/2005

س/ اذا كانت $x=-1+2i$ جد قيمة x^2+3x+5 بالصيغة الديكارتية (ارجاند)

sol:

$x2+3x+5$
$=(-1+2i)^2+3(-1+2i)+5$
$=(1-4i+4i^2)+(-3+6i)+5$
$=(-3-4i)+(2+6i)$
$=(-1+2i)=(-1,2)$ وهي صيغة ارجاند المطلوبة

2006/ تمهيدي

س/ اذا كان $x = 3 + 2i\,,\ y = 1 - i$ اثبت ان $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

sol :

$$LHS: \overline{x+y} = \overline{(3+2i)+(1-i)}$$
$$= \overline{4+i} = 4 - i$$
$$RHS: \bar{x} + \bar{y} = \overline{(3+2i)} + \overline{(1-i)}$$
$$= (3-2i) + (1+i) = 4 - i$$
$$\rightarrow LHS = RHS$$

1/2007 (اسئلة خارج القطر)

س/ اذا كانت $x = 2i - 1$ جد قيمة $x^2 + 2x + 6$

sol:

$$x^2 + 2x + 6 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 6$$
$$= (1 - 4i + 4i^2) + (-2 + 4i) + 6$$
$$= (-3 - 4i) + (4 + 4i)$$
$$= 1 + 0i$$

2/2009

س/ حل المعادلة $Z^4+13Z^2+36=0$

sol :

$z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

$(z^2 + 9)(z^2 + 4) = 0$

either $z^2 = -9 \rightarrow Z = \pm 3i$

OR $z^2 = -4 \rightarrow Z = \pm 2i$

2010/ تمهيدي

س/ اذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ اثبت ان $2(a^3 + b^3) = 7$

sol :

$$a + bi = \frac{2+i}{1-i} = \frac{2+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{2 + 2i + i - 1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$$

$a = \frac{1}{2}\,,\ b = \frac{3}{2}$

$$2(a^3 + b^3) = 2\left(\frac{1}{8} + \frac{27}{8}\right) = 2\left(\frac{28}{8}\right) = 7$$

---

2 /2012

س/ ضع بالصيغة العادية للعدد المركب $(1+i)^5 - (1-i)^5$

sol :

$$(1+i)^5 = (1+i)^4(1+i) = [(1+i)^2]^2(1+i)$$
$$= (1 + 2i + i^2)^2(1+i)$$
$$= (2i)^2(1+i) = 4i^2(1+i)$$
$$= -4(1+i) = -4 - 4i$$
$$(1-i)^5 = (1-i)^4(1-i) = [(1-1)^2]^2(1-i)$$
$$= (1 - 2i + i^2)^2(1-i)$$
$$= (-2i)^2(1-i) = 4i^2(1-i)$$
$$= -4(1-i) = -4 + 4i$$
$$(1+i)^5 - (1-i)^5$$
$$= (-4 - 4i) - (-4 + 4i)$$
$$= (-4 - 4i) + (4 - 4i) = 0 - 8i$$

---

3 /2012

س/ اثبت ان $\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = -2$

sol :

$$\frac{(1-i)^2}{1+i} + \frac{(1+i)^2}{1-i} = \frac{1-2i+i^2}{1+i} + \frac{1+2i+i^2}{1-i}$$
$$= \frac{-2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} + \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$
$$= \frac{-2i+2i^2}{1+1} + \frac{2i+2i^2}{1+1}$$
$$= (-1-i) + (-1+i) = -2$$

---

1 /2013

س/جد قيمة $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

sol :

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$$
$$= (1-i)(1+1)(1+i)$$
$$= (2)(1+1) = (2)(2) = 4$$

---

1 /2013 (اسئلة خارج القطر)

س/ ضع المقدار $\frac{(1-i)^{13}}{64}$ بالصيغة العادية للعدد المركب

sol :

$$\frac{(1-i)^{13}}{64} = \frac{(1-i)^{12}(1-i)}{64}$$
$$= \frac{[(1-i)^2]^6(1-i)}{64} = \frac{(1-2i+i^2)^6(1-i)}{64}$$
$$= \frac{(-2i)^6(1-i)}{64} = \frac{64i^6(1-i)}{64}$$
$$= \frac{-64(1-i)}{64} = -(1-i) = -1 + i$$

1 /2017

س/ اثبت ان $\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}=\frac{-6}{25}$

sol : نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(1+2i)^2}+\frac{1}{(1-2i)^2}$$
$$=\frac{1}{1+4i+4i^2}+\frac{1}{1-4i+4i^2}$$
$$=\frac{1}{-3+4i}+\frac{1}{-3-4i}=\frac{-3-4i-3+4i}{(-3+4i)(-3-4i)}$$
$$=\frac{-6}{9+16}=\frac{-6}{25}$$ الطرف الايمن

2 /2017

س/ جد مجموعة حلول المعادلة في $\mathbb{C}$

$$Z^2+2i(3-2i)=3Z$$

sol :

$Z^2-3Z+2i(3-2i)=0$

$(Z-2i)\big(Z-(3-2i)\big)=0$

$if\ Z=2i \quad OR \quad Z=(3-2i)$

طريقة ثانية بالدستور

$a=1 \quad ,b=-3 \quad ,c=2i(3-2i)$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(4+6i)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16-24i}}{2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{-7-24i}}{2}$$

$let\ \sqrt{-7-24i}=a+bi$ بتربيع الطرفين

$-7-24i=a^2+b^2i^2+2abi$

$a^2-b^2=-7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2ab=-24 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

من (2) نستنتج $a=\frac{-12}{b}$

نعوض في (1) $\frac{144}{b^2}-b^2=-7$

$144-b^4=-7b^2 \quad \rightarrow b^4-7b^2-144=0$

$(b^2-16)(b^2+9)=0$ اما $b^2+9=0$ يهمل

او $\rightarrow b^2=16 \rightarrow b=\pm4 \quad \therefore a=\frac{-12}{\pm4} \quad \rightarrow a=3$

فالعددين $(3-4i),(-3+4i)$

$$\therefore Z=\frac{3+(-3+4i)}{2}=\frac{4i}{2}$$
$=2i$ وبنفس الطريقة يتم تعويض الجذر الثاني

$$or\ Z=\frac{3-(-3+4i)}{2}=\frac{6-4i}{2}=3-2i$$

الطريقة الثالثة

$Z^2-3Z+6i-4i^2=0 \quad \rightarrow Z^2-4i^2-3Z+6i=0$

$(Z-2i)(Z+2i)-3(Z-2i)=0$

$\rightarrow (Z-2i)(Z+2i-3)=0$

$\therefore Z=2i \quad or \quad Z=-2i+3=3-2i$

2014/ تمهيدي

س/ اذا كان $C_1=7-4i\ ,C_2=2-3i$ فتحقق من:

$$\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$$

sol :

$$LHS: \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7-4i}{2-3i}\cdot\frac{2+3i}{2+3i}\right)}$$
$$=\overline{\left(\frac{14+21i-8i+12}{4+9}\right)}=\overline{\left(\frac{26+13i}{13}\right)}$$
$$=\overline{2+i}=2-i$$
$$RHS: \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}=\frac{\overline{7-4i}}{\overline{2-3i}}=\frac{7+4i}{2+3i}=\frac{7+4i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i}$$
$$=\frac{14-21i+8i+12}{4+9}=\frac{26-13i}{13}=2-i$$

1/2018

س/ ضع العدد بالصيغة العادية للعدد المركب $\frac{(1+i)^{15}}{128}$: ثم مثل العدد ومرافقه على شكل ارجاند

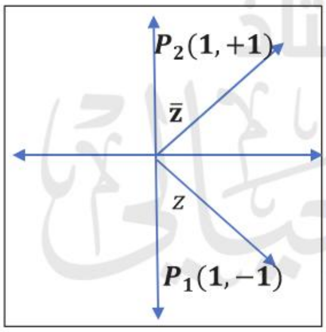
sol :

$$\frac{(1+i)^{15}}{128}=\frac{\left((1+i)^2\right)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{(1+2i-1)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{(2i)^7(1+i)}{128}$$
$$=\frac{128i^4.i^3(1+i)}{128}$$
$=-i(1+i)$

$-i(1+i)$

$Z=(1-i) \ \rightarrow P_1(1,-1)$

$\bar{z}=(1+i) \ \rightarrow P_2(1,1)$



2/2018

س/ اذا علمت ان $x=8-i$, وكان $y=2+i$, تحقق من ان

$$\overline{xy}=\bar{x}\ .\ \bar{y}$$

sol :

$x=8-i \ \rightarrow \bar{x}=8+i$

$y=2+i \ \rightarrow \bar{y}=2-i$

نأخذ الطرف الايسر

$x.y=(8-i)(2+i)$

$=16+8i-2i-i^2$

$=17+6i$

$\overline{x.y}=17-6i$

نأخذ الطرف الايمن

$\bar{x}.\bar{y}=(8+i)(2-i)$

$=16-8i+2i-i^2$

$=17-6i$

$\therefore$ الطرف الايمن = الطرف الايسر فالعلاقة صحيحة

2020/تمهيدي

س/ اثبت ان : $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

sol :

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}$$

طريقة اولى

$$=\frac{1}{4-4i-1}-\frac{1}{4+4i-1}$$

$$=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$$

$$=\frac{3+4i-3+4i}{(3-4i)(3+4i)}$$

$$=\frac{8i}{9-16i^2}=\frac{8i}{9+16}$$

$$=\frac{8i}{25}=$$ الطرف الايمن

الطريقة الثانية

نأخذ الطرف الايسر

$$\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}$$

$$=\frac{(2+i)^2-(2-i)^2}{(2-i)^2*(2+i)^2}$$

$$=\frac{3+4i-3+4i}{(5)^2}=\frac{8i}{25}=$$ الطرف الايمن

1/2020

س/ ضع بالصيغة العادية (الجبرية) ناتج : $\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}$

sol :

$$\frac{i}{(\sqrt{2}+i)^2}+\frac{i}{(\sqrt{2}-i)^2}$$

$$=\frac{i}{2+2\sqrt{2}i-1}+\frac{i}{2-2\sqrt{2}i-1}$$

$$=\frac{i}{1+2\sqrt{2}i}+\frac{i}{1-2\sqrt{2}i}\ *$$

اذا وحد المقامات وبسط الحل تعطى الدرجة كاملة او في الخطوة * اذا ضرب بمرافق العدد

$$=\frac{i(1-2\sqrt{2}i)+i(1+2\sqrt{2}i)}{(1+2\sqrt{2}i)(1-2\sqrt{2}i)}$$

$$=\frac{i+2\sqrt{2}+i-2\sqrt{2}}{1^2+(2\sqrt{2})^2}=\frac{2i}{1+8}$$

$$=\frac{2}{9}i=\left(0+\frac{2}{9}i\right)$$

لا يمكنك أن ترى صورتك في الماء وهو يغلي .. وكذلك لا يمكنك أن ترى الحقائق وانت غاضب .. إنتظر حتى تهدأ ثم أعط قرارك كي لاتندم

2-الاسئلة الوزارية حول" ايجاد قيمة x , y الحقيقيتين"

1 /1996

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$$(2x+i)(y-2i) = -2-9i$$

sol : $(2xy+2)+(-4x+y)i = -2-9i$

$2xy+2=-2$

$\rightarrow 2xy=-4 \ldots\ldots\ldots\ldots(1$

$-4x+y=-9$

$\rightarrow y=4x-9 \ldots\ldots\ldots\ldots(2$

نعوض (2) في (1)

$2x(4x-9)=-4$

$\rightarrow [8x^2-18x+4=0]\div 2$

$\rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$(4x-1)(x-2)=0$

$\rightarrow 4x-1=0 \ \rightarrow 4x=1$ اما $x=\frac{1}{4}$ نعوضها في (2)

$y=4x-9$

$\rightarrow y=4\frac{1}{4}-9 \qquad \therefore y=1-9=-8$

او $x-2=0 \rightarrow x=2$ نعوضها في (2)

$y=4x-9 \rightarrow y=4(2)-9$

$\therefore y=8-9=-1$

2 /1998

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$$(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$$

sol : $(2+xi)(-x+i)=\frac{9y^2+49}{3y+7i}$

$\rightarrow (-2x+2i-x^2i+x\,i^2)=\dfrac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$(-2x-x)+(2-x^2)i=\dfrac{(3y-7i)(3y+7i)}{3y+7i}$

$\rightarrow (-3x)+(2-x^2)i=3y-7i$

$-3x=3y$

$\rightarrow -x=y \ldots\ldots\ldots(1)$

$2-x^2=-7$

$\rightarrow x^2=9 \rightarrow x=\pm 3$

$x=3 \rightarrow$ نعوضها في (1)

$y=-3 \ , \ x=-3$ نعوضها في (1)

$\rightarrow y=3$

2 /1999

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$

sol :

$(3x+2yi)^2=\frac{200}{4+3i}$

$\rightarrow 9x^2+12xyi+4y^2i^2=\dfrac{200}{4+3i}\cdot\dfrac{4-3i}{4-3i}$

$(9x^2-4y^2)+(12xy)i=\dfrac{200(4-3i)}{25}$

$\rightarrow (9x^2-4y^2)+(12xy)i=8(4-3i)$

$(9x^2-4y^2)+(12xy)i=32-24i$

$9x^2-4y^2=32 \ldots\ldots\ldots(1)$

$12xy=-24$

$\rightarrow y=\dfrac{-2}{x}\ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$9x^2-4\left(\dfrac{-2}{x}\right)^2=32$

$\rightarrow \left[9x^2-\dfrac{16}{x^2}=32\right].x^2$

$9x^4-16=32x^2$

$\rightarrow 9x^4-32x^2-16=0$

$(9x^2+4)(x^2-4)=0$

$\rightarrow$ اما $9x^2+4=0$ غير ممكن لانه مجموع مربعين

او $x^2=4 \rightarrow$ اما $x=2$ (1)نعوضها في

$\rightarrow y=-1$, او $x=-2$ (1)نعوضها في

$\rightarrow y=1$

2 /2000

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق

$$x(x+i)+y(y-i)+i=13$$

sol :

$(x^2+xi)+(y^2-yi)=13-i$

$\rightarrow (x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

$x^2+y^2=13 \ldots\ldots\ldots(1)$

$x-y=-1$

$\rightarrow x=y-1 \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض (2) في (1)

$(y-1)^2+y^2=13$

$\rightarrow y^2-2y+1+y^2-13=0$

$\rightarrow 2y^2-2y-12=0$

$y^2-y-6=0$

$\rightarrow (y-3)(y+2)=0$

اما $y=3$ (2)نعوضها في

$\rightarrow x=3-1=2$, او $y=-2$ (2)نعوضها في

$\rightarrow x=-2-1=-3$

2003/ 3

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة
$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$

sol : $\frac{x^2-4i^2}{x+2i}=\frac{y}{1+i}$
$\rightarrow \frac{(x-2i)(x+2i)}{x+2i}=\frac{y}{1+i}$
$\rightarrow x-2i=\frac{y}{1+i}$
$(x-2i)(1+i)=y$
$\rightarrow (x+2)+(x-2)i=y+0i$
$x+2=y \ldots\ldots\ldots(1)$
$x-2=0$
$\rightarrow x=2 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (2) في (1)
$y=2+2=4$

(2004/ 2)(2005/ 2)

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

sol :
$\left(\frac{2-i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}\right)x+\left(\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}\right)y=\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{-i}{-i}\right)$
$\left(\frac{(2-1)+(-2-1)i}{1+1}\right)x+\left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{4+1}\right)y=-i$
$\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)x+(1-i)y=0-i$
$\rightarrow \left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}xi\right)+(y-yi)=0-i$
$\left(\frac{1}{2}x+y\right)+\left(-\frac{3}{2}x-y\right)i=0-i$
$\frac{1}{2}x+y=0 \quad \rightarrow x+2y=0$
$\rightarrow x=-2y \ldots\ldots\ldots(1)$
$-\frac{3}{2}x-y=-1$
$\rightarrow -3x-2y=-2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (1) في (2)
$-3(-2y)-2y=-2$
$\rightarrow 6y-2y=-2$
$\rightarrow 4y=-2 \quad \rightarrow y=\frac{-1}{2}$
$\rightarrow x=(-2)\left(\frac{-1}{2}\right)=1$

2006/ تمهيدي

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$(x+i)(y-3i)=-1-13i$

sol :
$xy-3ix+iy-3i^2=-1-13i$
$(xy+3)+(-3x+y)i=-1-13i$
$xy+3=-1$
$\rightarrow xy=-4 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$-3x+y=-13$
$\rightarrow y=3x-13 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (2) في (1)
$x(3x-13)=-4$
$\rightarrow 3x^2-13x+4=0$
$\rightarrow (3x-1)(x-4)=0$
اما $x=\frac{1}{3}$ نعوضها في (2)
$\rightarrow y=3(\frac{1}{3})-13=1-13=-12$
او $x=4\rightarrow(2)$ في
نعوضها $y=12-13=-1$

2006/ 2

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ التي تحقق
$(3x-i)(2y+i)+11=7i$

Sol
: $6xy+3xi-2yi-i^2=-11+7i$
$\rightarrow (6xy+1)+(3x-2y)i=-11+7i$
$6xy+1=-11$
$\rightarrow 6xy=-12$
$\rightarrow y=\frac{-2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$
$3x-2y=7 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$
نعوض (1) في (2)
$\left[3x+\frac{4}{x}=7\right].x$
$\rightarrow 3x^2+4=7x$
$\rightarrow 3x^2-7x+4=0$
$\rightarrow (3x-4)(x-1)=0$
اما $x=\frac{4}{3}\rightarrow(1)$ نعوضها في
$y=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=-2\left(\frac{3}{4}\right),$
$=\frac{-3}{2}$ او $x=1\rightarrow(1)$ نعوضها في
$y=\frac{-2}{1}=-2$

(2/2008) (2020/تمهيدي"احيائي")

س/ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$y + 5i = (2x + i)(x + i)$

sol :
$y + 5i = 2x^2 + 2xi + xi + i^2$
$\rightarrow y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$
$2x^2 - 1 = y \dots\dots\dots (1)$
$3x = 5$
$\rightarrow x = \frac{5}{3} \dots\dots\dots (2)$
نعوض (2) في (1)
$2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = y,$
$\rightarrow y = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50 - 9}{9} = \frac{41}{9}$

2009/ تمهيدي

س/ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$(3 + 2i)^2 y = (x + 3i)^2$

sol : $(9 + 12i + 4i^2)y = (x^2 + 6ix + 9i^2)$
$(5 + 12i)y = (x^2 - 9) + 6ix$
$\rightarrow 5y + 12yi = (x^2 - 9) + 6ix$
$5y = x^2 - 9 \dots\dots\dots (1)$
$12y = 6x$
$\rightarrow x = 2y \dots\dots\dots (2)$
نعوض (2) في (1)
$5y = 4y^2 - 9$
$\rightarrow 4y^2 - 5y - 9 = 0$
$\rightarrow (4y - 9)(y + 1) = 0$
اما $y = \frac{9}{4}$ نعوضها في (2)
$\rightarrow x = 2\frac{9}{4} \rightarrow x = \frac{9}{2}$
او , $y = -1$ نعوضها في (2)
$\rightarrow x = 2(-1) \rightarrow x = -2$

2012/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان
$\left(\frac{1-i}{1+i}\right) + (x + yi) = (1 + 2i)^2$

sol : $\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) + (x + yi) = (1 + 4i + 4i^2)$
$\rightarrow \left(\frac{1 - 2i - 1}{1 + 1}\right) + (x + yi) = (1 + 4i - 4)$
$(0 - i) + (x + yi) = -3 + 4i$
$\rightarrow (x) + (-1 + y)i = -3 + 4i$
$x = -3$
$-1 + y = 4$
$\rightarrow y = 5$

2010/ 1

س/ جد قيمتي $x, y \in R$ التي تحقق
$12 + 5i = (x + 3i)(y - 2i)$

sol : $12 + 5i = xy - 2xi + 3yi - 6i^2$
$\rightarrow 12 + 5i = (xy + 6) + (-2x + 3y)i$
$xy + 6 = 12$
$\rightarrow xy = 6$
$\rightarrow y = \frac{6}{x} \dots\dots\dots (1)$
$-2x + 3y = 5 \dots\dots\dots (2)$
نعوض (1) في (2)
$\left[-2x + 3\frac{6}{x} = 5\right] . x$
$\rightarrow -2x^2 + 18 = 5x$
$\rightarrow 2x^2 + 5x - 18 = 0$
$(2x + 9)(x - 2) = 0$
اما $x = \frac{-9}{2}$ $\rightarrow$ نعوضها في(1)
$y = \frac{6}{\frac{-9}{2}} = 6\left(\frac{-2}{9}\right)$
$\rightarrow x = \frac{-4}{3}$
او , $x = 2$ نعوضها في (1)
$\rightarrow y = \frac{6}{2} \rightarrow y = 3$

2012/ 1

س/ جد قيمتي x, y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{2+i}{3-i}, \frac{5}{x+yi}$ مترافقان

sol : $\overline{\left(\frac{2+i}{3-i}\right)} = \frac{5}{x+yi}$
$\rightarrow \left(\frac{2-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}\right) = \frac{5}{x + yi}$
$\rightarrow \left(\frac{(6-1) + (-3-2)i}{10}\right) = \frac{5}{x + yi}$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i = \frac{5}{x + yi}$
$\rightarrow 1 - i = \frac{10}{x + yi}$
$\rightarrow x + yi = \frac{10}{1 - i} \cdot \frac{1 + i}{1 + i}$
$\rightarrow x + yi = \frac{10(1 + i)}{2}$
$x + yi = 5 + 5i$
$\rightarrow x = 5 \ , y = 5$

(2015/ 3)(2017/ تمهيدي) (2020/تمهيدي"تطبيقي")

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان

sol :

$\left(\frac{3+i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{3-i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow \left(\frac{(6-1)+(-3-2)i}{5}\right) = \frac{6}{x+yi}$

$1 - i = \frac{6}{x+yi}$

$\rightarrow x + yi = \frac{6}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$\rightarrow x + yi = \frac{6(1+i)}{2}$

$x + yi = 3 + 3i$

$\rightarrow x = 3 \quad , y = 3$

2016/ تمهيدي

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتان التي تحقق المعادلة

$\frac{125}{11+2i} x + (1-i)^2 y = 11$

sol :

$\frac{125}{11+2i} \cdot \frac{11-2i}{11-2i} x + (1 - 2i + i^2) y = 11$

$\rightarrow \frac{125(11-2i)}{125} x + (-2i) y = 11$

$(11x - 2xi) + (0 - 2yi) = 11$

$\rightarrow (11x) + (-2x - 2y)i = 11 + 0i$

$11x = 11 \quad \rightarrow x = 1 \quad ,$

$-2x - 2y = 0 \quad \rightarrow -x - y = 0$

$\rightarrow -1 - y = 0$

$\rightarrow y = -1$

---

2 /2016

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ اذا علمت ان

$(x + 2i)(x - i) = \frac{121+9y^2}{11+3yi}$

sol :

$(x^2 - xi + 2xi - 2i^2) = \frac{121-9y^2i^2}{11+3yi}$

$(x^2 + 2) + (-x + 2x)i = \frac{(11-3yi)(11+3yi)}{11+3yi}$

$(x^2 + 2) + (x)i = 11 - 3yi$

$x^2 + 2 = 11 \rightarrow x^2 = 9$

$\rightarrow x = \pm 3$

$x = -3y$

$\rightarrow x = 3 \quad \rightarrow 3 = -3y$

$\rightarrow y = -1 \, , x = -3$

$\rightarrow -3 = -3y$

$\rightarrow y = 1$

---

3 /2016

س/ اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ عددان مركبان مترافقان, فجد قيمة كل من y, x

sol :

$\overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)} = \frac{3-2i}{i}$

$\frac{x+yi}{1-5i} = \frac{3-2i}{i}$

$i(x + yi) = (3 - 2i)(1 - 5i)$

$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$

$xi - y = -7 - 17i$

$\rightarrow -y + xi = -7 - 17i$

$\therefore x = -17$

$\rightarrow -y = -7 \quad \rightarrow y = 7$

ملاحظة / يمكن للطالب ان ياخذ $\overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)} = \frac{x-yi}{1+5i}$ ويكمل الحل بشكل مضبوط

1/2017"اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمتي $x , y \in R$ إذا علمت ان:

$\frac{1-i}{1+i} x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$

sol :

$\frac{1-i}{1+i} x + (1+3i)^2 y = (1-i)(1+3i)$

$\left(\frac{1-i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}\right) x + (1 + 6i - 9) y = 1 + 3i - i + 3$

$\left(\frac{1-2i-1}{1+1}\right) x + (-8 + 6i) y = 4 + 2i$

$-xi - 8y + 6yi = 4 + 2i$

$-8y + (-x + 6y)i = 4 + 2i$

$-8y = 4$

$\rightarrow y = \frac{-4}{8}$

$\rightarrow y = \frac{-1}{2}$

$-x + 6y = 2$

$\rightarrow -x + 6\left(\frac{-1}{2}\right) = 2$

$\rightarrow -x - 3 = 2$

$\rightarrow x = -5$

2018/ تمهيدي

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين التي تحقق المعادلة $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+9}{x+3i}$

sol :

$\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+9}{x+3i}$

$\frac{y}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{x^2-9i^2}{x+3i}$

$\rightarrow \frac{y-yi}{1+1}=\frac{(x-3i)(x+3i)}{x+3i}$

$\frac{y}{2}-\frac{y}{2}i=x-3i$

$\frac{y}{2}=x \ldots\ldots\ldots (1)$

$\frac{-y}{2}=-3$

$\rightarrow y=6 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$\frac{6}{2}=x\rightarrow \quad x=3$

ملاحظة// يمكن للطالب ان يضرب الطرف الايمن بالمرافق دون تغير اشارة البسط ويكمل الحل بشكل صحيح. او يضرب الطرفين في الوسطين

(1/2019)

س/ جد قيمة كلا من x,y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة

$\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i$

sol :

$\frac{6}{x+yi}+(2-i)^2=4-3i$

$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(2-i)^2$

$\frac{6}{x+yi}=(4-3i)-(4-4i-1)$

$\frac{6}{x+yi}=4-3i-3+4i$

$\frac{6}{x+yi}=(1+i)$

$x+yi=\frac{6}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}$

$x+yi=\frac{6(1-i)}{1+i}$

$\Rightarrow x+yi=\frac{6^3(1-i)}{2}$

$x+yi=3-3i$

$\therefore x=3$

$y=-3$

1/2018"اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمتي x , y الحقيقيتين اذا علمت ان

$\frac{x-yi}{x^2+y^2}=\frac{1}{(1+xi)(3+i)}$

sol :

$\frac{x-yi}{x^2-y^2i^2}=\frac{1}{3+i+3xi+xi^2}$

$\frac{x-yi}{(x-yi)(x+yi)}=\frac{1}{(3-x)(1+3x)i}$

$\therefore x+yi=(3-x)+(1+3x)i$

وحسب تساوي العددين المركبين:

$x=3-x$

$\rightarrow x+x=3$

$\rightarrow 2x=3$

$\rightarrow x=\frac{3}{2}$

$y=1+3x$

$\rightarrow y=1+3\left(\frac{3}{2}\right)=1+\frac{9}{2}$

$\rightarrow y=\frac{11}{2}$

(3/2019)

س/ اذا كان $y=\frac{3-i}{1+i}$ و $x=(3-2i)^2$, جد x, y بالصيغة العادية ثم اثبت ان : $\overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$

sol :

$x=(3-2i)^2=9-12i-4$

$=5-12i$

$y=\frac{3-i}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i-i-1}{1+1}$

$=\frac{3-4i}{2}=1-2i$

الطرف الايسر $\overline{x+y}=\overline{(5-12i)+(1-2i)}$

$=\overline{6-4i}=6+14i$

الطرف الايمن $\bar{x}+\bar{y}=\overline{(5-12i)}+\overline{(1-2i)}$

$=5+12i+1+2i$

$=6+14i$

$\therefore \overline{x+y}=\bar{x}+\bar{y}$

او الطرف الايمن = الطرف الايسر

2020/ تمهيدي

س/ جد قيمة x ، y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة :

$$(y+5i)=(2x+i)(x+2i)$$

sol :

$(y+5i)=(2x+i)*(x+2i)$

$=(2x^2-2)+(x+4x)i$

$y+5i=(2x^2-2)+5xi$

$y=2x^2-2$

$5=5x$

$\Rightarrow x=1$

$\therefore y=0$

1/2020

س/ جد $x, y \in R$, اذا علمت ان $\frac{1-5i}{3-2i}$ ، $\frac{-2}{x+yi}$ مترافقان

sol :

بما ان العددين مترافقين

$\frac{-2}{x+yi}=\overline{\left(\frac{1-5i}{3-2i}\right)}$

$\frac{-2}{x+yi}=\frac{1+5i}{3+2i}$ *

ملاحظة :- اذا قام الطالب من الخطوة * وبالضرب الطرفين في الوسطين وبسط الحل تعطى درجة الخطوة كاملة

$\frac{x+yi}{-2}=\frac{3+2i}{1+5i}\cdot\frac{1-5i}{1-5i}$

$\frac{x+yi}{-2}=\frac{3-15i+2i+10}{1+25}$

$\frac{x+yi}{-\cancel{2}_{\,1}}=\frac{13-13i}{\cancel{26}_{\,13}}$

$x+yi=\frac{-(13-13i)}{13}$

$x+yi=-1+i$

$\therefore x=-1 \quad , \quad y=1$

3- الاسئلة الوزارية حول "الجذور التربيعية للعدد المركب"

1/ 1997

س/ اذا كان $c , d \in R$ وكان $c + di = \frac{7-4i}{2+i}$ جد $\sqrt{2c - di}$

sol :

$$c + di = \frac{7-4i}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{14-7i-8i-4}{4+1}$$

$$= \frac{10+15i}{5} = 2 - 3i \rightarrow c = 2, \quad d = -3$$

$\sqrt{2c - di} = \sqrt{4+3i}$

$\sqrt{4+3i} = x + yi$

$4 + 3i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 4 \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = 3 \rightarrow y = \frac{3}{2x} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{2x}\right)^2 = 4$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{4x^2} = 4\right] . 4x^2$

$\rightarrow 4x^2 - 9 = 16x^2 \rightarrow 4x^2 - 16x^2 - 9 = 0$

$(2x^2 - 9)(2x^2 + 1) = 0$

$2x^2 + 1 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $2x^2 - 9 = 0 \rightarrow 2x^2 = 9 \rightarrow x = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)}\right) \rightarrow y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$ans: \sqrt{4+3i} = \{\pm(\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i)\}$

1/ 2007

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $3 + 4i$

sol :

$\sqrt{3+4i} = x + yi$

$3 + 4i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 3 \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = 4 \rightarrow y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3 \rightarrow \left[x^2 - \frac{4}{x^2} = 3\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 4 = 3x^2 \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

اما $x^2 + 1 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{2}{\pm 2}\right) \rightarrow y = \pm 1$

$ans: \sqrt{3+4i} = \{\pm(2 + i)\}$

2/ 2009

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $\frac{14+2i}{1+i}$

sol :

$$\frac{14+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{14 - 14i + 2i - 2i^2}{2}$$

$$= \frac{16 - 12i}{2} = 8 - 6i$$

$\sqrt{8 - 6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8 - 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 8 \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = -6 \quad \rightarrow y = \frac{-6}{2x} = \frac{-3}{x} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 8$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = 8\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 9 = 8x^2 \rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

$x^2 + 1 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 9 = 0 \quad \rightarrow x^2 = 9 \quad \rightarrow x = \pm 3$

$\rightarrow y = \left(\frac{-3}{\pm 3}\right) \quad \rightarrow y = \pm 1$

$ans: \sqrt{8 - 6i} = \{\pm(3 - i)\}$

1/ 2010

س/ جد الجذران التربيعيان للعدد المركب $(-1 + 7i)(1 + i)$

sol :

$(-1 + 7i)(1 + i) = -1 - i + 7i + 7i^2 = -8 + 6i$

$\sqrt{-8 + 6i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8 + 6i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = -8 \dots\dots\dots\dots (1)$

$2xy = 6 \rightarrow y = \frac{6}{2x} = \frac{3}{x} \dots\dots\dots\dots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = -8$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{9}{x^2} = -8\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 9 = -8x^2$

$\rightarrow x^4 + 8x^2 - 9 = 0$

$(x^2 + 9)(x^2 - 1) = 0$

$x^2 + 9 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

$\rightarrow y = \left(\frac{3}{\pm 1}\right) \quad \rightarrow y = \pm 3$

$ans: \sqrt{-8 + 6i} = \{\pm(1 + 3i)\}$

2 /2001

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد 27

sol :

$let\ Z=\sqrt[3]{27} \to Z^3=27$

$\to Z^3-27=0$

$(Z-3)(Z^2+3Z+9)=0$

اما $Z=3$, او $Z^2+3Z+9=0$

$a=1\ \ ,b=3\ \ ,c=9$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4.1.9}}{2.1}$$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9-36}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{-27}}{2}$$

$$=\frac{-3\pm3\sqrt{3}i}{2}=\frac{-3}{2}\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}i$$

$\to ans:\{3,\frac{-3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i,\frac{-3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\}$

(1/2019 اسئلة خارج القطر)

س/ اذا كانت $a,b\in R, a+bi=\frac{7-4i}{2+i}$ جد قيمة $\sqrt{2a-ib}$

sol :

$a+bi=\frac{7-4i}{2+i}*\frac{2-i}{2-i}$

$a+bi=\frac{14-7i-8i-4}{4+1}$

$a+bi=\frac{10-15i}{5} \Rightarrow a+bi=\frac{10}{5}-\frac{15i}{5}$

$a+bi=2-3i$

$a=2 \qquad b=-3$

$\sqrt{2a-bi}=\sqrt{2(2)-(-3)i}=\sqrt{4+3i}$

$\sqrt{4+3i}=x+yi \qquad x,y\in R$

$4+3i=x^2-y^2+2xyi$

$x^2-y^2=4 \ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$2xy=3 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$x^2-\left(\frac{3}{2x}\right)^2=4$

$\left[x^2-\frac{9}{4x^2}=4\right]*4x^2$

$4x^4-9=16x^2$

$4x^4-16x^2-9=0$

$(2x^2-9)(2x^2+1)_{\text{يهمل}}=0$

$2x^2=9 \Rightarrow x^2=\frac{9}{2} \Rightarrow x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

$x=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$ عند

$y=\frac{3}{2(\pm\frac{3}{\sqrt{2}})}$

$y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ C_1=\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

$C_2=\frac{-3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

إثنان لا تنساهما :
ذكر الله والموت ,
وإثنان لا تذكرهما :
إحسانك للناس وإساءتهم لك

4- الاسئلة الوزارية حول "حل المعادلة التربيعية في C"

2020/ تمهيدي

س/ حل المعادلة التربيعية الآتية وبين هل ان الجذرين مترافقان ؟

$z^2 - 2zi + 3 = 0$

sol :

$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$

$Z^2 - 2zi - 3i^2 = 0$ طريقة اولى

$(Z + i)\,(Z - 3i) = 0$

ملاحظة :- الجذران غير مترافقين والطالب ان لم يذكر ذلك يخصم منه درجة واحدة

$if \;\; Z + i = 0 \;\; \Rightarrow Z = -i$

$Or \;\; Z - 3i = 0 \;\; \Rightarrow \;\; Z = 3i$

$\therefore \;\; A = \{\,(0 - i) \text{،} (0 + 3i)\,\}$

طريقة ثانية

$a = 1\,,\; b = -2i\;\;,\; c = 3$

$Z = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{2i \mp \sqrt{-4 - 4 * 3}}{2}$

$= \frac{2i \mp \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \mp 4i}{2}$

$= \begin{cases} \frac{2i + 4i}{2} = 0 + 3i \\ \frac{2i - 4i}{2} = 0 - i \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \{\,(0 + 3i)\,,(0 - i)\,\}$

2005/ تمهيدي

س/ حل المعادلة $x^3 + 8i = 0$ في C

sol : $x^3 + 8i^3 = 0 \rightarrow (x + 2i)(x^2 - 2ix + 4i^2) = 0$

$x = -2i$ او $x^2 - 2ix - 4 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -2i \;, \quad c = -4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$

$= \frac{2i \pm \sqrt{-4 + 16}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{2i \pm 2\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{\pm 2\sqrt{3} + 2i}{2} = \pm\sqrt{3} + i$

$ans: \{\sqrt{3} + i \;\;, \; -\sqrt{3} + i \;, -2i\}$

2005/ 1

س/ حل المعادلة $x^3 - 8i = 0$ في C

sol : $x^3 - 8i^3 = 0 \rightarrow (x - 2i)(x^2 + 2ix + 4i^2) = 0$

$x = 2i$ او $x^2 + 2ix - 4 = 0$

$a = 1 \quad , \quad b = 2i \;, \quad c = -4$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(2i) \pm \sqrt{(2i)^2 - 4.1.(-4)}}{2.1}$

$= \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 16}}{2} = \frac{-2i \pm \sqrt{12}}{2}$

$= \frac{-2i \pm 2\sqrt{3}}{2} = \frac{\pm 2\sqrt{3} - 2i}{2} = \pm\sqrt{3} - i$

$ans: \{\sqrt{3} - i \;\;, \; -\sqrt{3} - i \;, 2i\}$

4- الاسئلة الوزارية حول"كون المعادلة التربيعية اذا علم جذراها"

1 /2011

س/ اذا كان $3+i$ هو احد جذري المعادلة

$x^2-ax+(5+5i)=0$ فما قيمة a وما هو الجذر الاخر

sol :

$$(3+i)^2-a(3+i)+(5+5i)=0$$
$$\to (9+6i+i^2)+(5+5i)=a.(3+i)$$
$$(8+6i)+(5+5i)=a.(3+i)$$
$$\to (13+11i)=a.(3+i)$$
$$a=\frac{13+11i}{3+i}$$
$$\to a=\frac{13+11i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}$$
$$\to a=\frac{(39+11)+(-13+33)i}{10}=5+2i$$

اذا كان h=3+i هو احد الجذرين فنفرض ان الجذر الاخر هو k

$$x^2-(5+2i)x+(5+5i)=0$$
$$x^2-(h+k)x+hk=0$$
$$\to h+k=5+2i$$
$$(3+i)+k=5+2i$$
$$\to k=(5+2i)-(3+i)$$
$$\to k=(5+2i)+(-3-i)\to k=2+i$$

2 /2015

س/ اذا كان $2-4i$ هو احد جذري المعادلة

$2x^2-x-bx+c-6=0$ معاملاتها حقيقية, جد قيمتي $b\,,c\in R$

Sol

$$:2x^2-x-bx+c-6=0$$
$$2x^2-(1+b)x+c-6=0\,]\div 2$$
$$x^2-\frac{1+b}{2}x+\frac{c-6}{2}=0$$

∵معاملات المعادلة حقيقية ⟸ الجذران مترافقان , فيكون الثاني$(2+4i)$

مجموع الجذرين : $(2-4i)+(2+4i)=4$

$\therefore \frac{1+b}{2}=4\ \to 1+b=8\ \to b=7$

حاصل ضرب الجذرين$(2-4i).(2+4i)=4+16=\ 20$

$$\therefore \frac{c-6}{2}=20$$
$$\to c-6=40\ \to c=46$$

2017/ 1 اسئلة الموصل

س/ ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو $(3-i)$؟

sol :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+i$

مجموع الجذرين$(3-i)+(3+i)=6$

حاصل ضرب الجذرين$(3-i).(3+i)=9+1=10$

∴ المعادلة هي : $x^2-6x+10=0$

2017/ 3 اسئلة الموصل

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2+i),(5-i)$

sol :

$$m=(2+i)\,,L=(5-i)$$
$$m+L=(2+i)+(5-i)=7$$
$$m.L=(2+i).(5-i)$$
$$=10-2i+5i+1\ =11+3i$$

∴ المعادلة هي : $x^2-\ 7x\ +11+3i\ =0$

3 /2018

س/ كون المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية اذا كان احد جذريها $(\sqrt{3}-i)^2$؟

sol :

$$\text{Let } L=\left(\sqrt{3}-i\right)^2$$
$$=3-2\sqrt{3}i-1$$
$$=2-2\sqrt{3}i$$

∵المعاملات اعداد حقيقية ⟸ الجذران مترافقان

$$\therefore m=2+2\sqrt{3}i$$
$$L+m=2-2\sqrt{3}i+2+2\sqrt{3}i=4$$
$$L.m=\left(2-2\sqrt{3}i\right)\left(2+2\sqrt{3}i\right)$$
$$=4+4.3=16$$

∴ المعادلة هي : $x^2-4x+16=0$

2017/ 2 " اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان $(1+2i)$ هو احد جذري المعادلة $x^2-(3-i)x+a=0$ فما قيمة الجذر الثاني وما قيمة a ؟

sol :

$x^2-(3-i)x+a=0$

مجموع الجذرين $=(3-i)$

حاصل ضرب الجذرين =a

Let L = الجذر الثاني , $m=1+2i$

$m+L=3-i$

$\rightarrow (1+2i)+L=3-i$

$\rightarrow L=3-i-1-2i$

$\therefore L=2-3i$

$\therefore a=(1+2i).(2-3i)$

$=2-3i+4i-6i^2 \;=8+i$

ملاحظة: يمكن للطالب ان يعوض الجذر الاول في المعادلة الاصلية ويجد قيمة a وبعدها يمكنه ان يجد قيمة الجذر الثاني وفي هذه الحالة يكون الجزء الاول يعطى عليه 6 درجات والجزء الثاني يعطى عليه 4 درجات.

2018/ 2 " اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان احد جذري المعادلة التربيعية $x^2+x-bx+c+8=0$ هو $(1-3i)$, جد قيمة $b\,,c$ الحقيقيتين

sol

$: x^2+x-bx+c+8=0$

$x^2-(1-b)x+c+8=0$

$\because$معاملات المعادلة حقيقية $\Leftarrow$ الجذران مترافقان , فيكون الثاني$(1+3i)$

مجموع الجذرين: $(1-3i)+(1+3i)=2$

$\therefore 1-b=-2$

$\rightarrow b=3$

حاصل ضرب الجذرين: $(1-3i).(1+3i)$

$=1+9=10$

$\therefore c+8=10$

$\rightarrow c=10-8=2$

2019/ تمهيدي

س/ إذا علمت ان $(2+i)$, هو احد جذري المعادلة $x^2-hx+5-5i=0$, جد قيمة h حيث $h\in\mathbb{C}$, وما الجذر الاخر؟

Sol:

الطريق الاولى

$x^2-hx+5-5i=0$

بتعويض الجذر الاول بالمعادلة ←

$(2+i)^2-h(2+i)+5-5i=0$

$4+4i-1-h(2+i)+5-5i=0$

$8-i=h(2+i)$

$h=\frac{8-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$

$h=\frac{16-8i-2i-1}{4+1}$

$h=\frac{15-10i}{5}$

$h=3-2i=$ مجموع الجذرين

ليكن الجذر الاخر $=L$

$L+2+i=3-2i$

$L=3-2i-2-i$

$L=1-3i$

الطريقة الثانية

ليكن الجذر الثاني =m

والجذر الاول =L

$m*L=\frac{\text{الحد المطلق}}{x^2\text{معامل}}$

$m*L=\frac{5-5i}{1}$

$(2+i)*L=5-5i$

$\rightarrow L=\frac{5-5i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}$

$L=\frac{10-5i-10i-5}{4+1}$

$=\frac{5-15i}{5}=\frac{5(1-3i)}{5}$

$\therefore L=1-3i$

$m+L=(2+i)+(1-3i)$

$\frac{h}{1}=3-2i \quad\rightarrow h=3-2i$

(2/2019)

س/ اذا كان $(3-4i)$ هو احد جذري المعادلة التربيعية $x^2 - nx + 10 - 5i = 0$ فما الجذر الثاني ؟ وماقيمة (n) ؟

sol :

الطريقة الاولى

Let $M = 3 - 4i$, $L = ?$

$x^2 - nx + (10 - 5i) = 0$

$M.L = 10 - 5i$

$(3-4i).L = (10-5i)$

$L = \frac{10-5i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$L = \frac{30 + 40i - 15i + 20}{9+16}$

$= \frac{50+25i}{25}$

$\therefore L = (2 + i)$

$n = M + L$

$= 3 - 4i + 2 + i$

$n = 5 - 3i$

طريقة ثانية :-

نعوض $(3-4i)$ في المعادلة

$(3-4i)^2 - n(3-4i) + (10-5i) = 0$

$9 - 24i + 16i^2 - n(3-4i) + 10 - 5i = 0$

$3 - 29i = n(3-4i)$

$n = \frac{3-29i}{3-4i} * \frac{3+4i}{3+4i}$

$= \frac{9-12i-87i+116}{9+16} = \frac{125-75i}{25}$

$\therefore n = 5 - 3i$

$L + m = n \Rightarrow 3 - 4i + M = 5 - 3i$

$\therefore m = 5 - 3i - 3 + 4i \Rightarrow M = 2 + i$

1/2020

س/ جد المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية واحد جذريها هو العدد $(3-4i)$

sol :

بما ان المعاملات حقيقية

الجذران مترافقان

الجذر الاول $M = 3 - 4i$

الجذر الثاني $L = 3 + 4i$

مجموع الجذرين $= M + L = (3-4i) + (3+4i) = 6$

حاصل ضرب الجذرين $= (3-4i)(3+4i)$

$= 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$

$x^2 - ($ مجموع الجذرين $) x +$ حاصل ضربهم $= 0$

$x^2 - 6x + 25 = 0$

2/2020

س/ إذا كان $(3+i)$ أحد جذري المعادلة $x^2 - ax + 5 + 5i = 0$ ، فما الجذر الثاني؟ وما قيمة $a \in ¢$ ؟

sol :

الطريقة الاولى: أولاً نفرض الجذر الاخر = L

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{\text{الحد المطلق}}{x^2 \text{ معامل}}$

$$(3+i).L = \frac{5+5i}{1}$$

$$L = \frac{5+5i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} \quad \Rightarrow L = \frac{15-5i+15i+5}{10}$$

$$L = \frac{20+10i}{10} \quad \Rightarrow L = \frac{20}{10} + \frac{10i}{10}$$

$$\therefore L = 2+i$$

$\text{مجموع الجذرين} = \frac{-x \text{ معامل}}{x^2 \text{ معامل}}$

$$(3+i)(+(2+i) = \frac{-(-a)}{1}$$

$$5+2i = a$$

الطريقة الثانية: أولاً:

$$(3+i)^2 - a\,(3+i) + 5 + 5i = 0$$

$$9 + 6i - 1 - a(3+i) + 5 + 5i = 0$$

$$13 + 11i = a\,(3+i)$$

$$\therefore a = \frac{13+11i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i}$$

$$a = \frac{39-13i+33i+11}{10} \Rightarrow a = \frac{50+20i}{10}$$

$$a = 5+2i$$

نفرض الجذر الثاني = L

$\because \text{مجموع الجذرين} = \frac{-x \text{ معامل}}{x^2 \text{ معامل}}$

$$L + (3+i) = \frac{-(-a)}{1}$$

$$L + (3+i) = \frac{-(-a)}{1}$$

$$L + (3+i) = \frac{5+2i}{1} \Rightarrow L = 5 + 2i - 3 - i$$

$$\therefore L = 2+i$$

2/2020

س/ جد المعادلة التربيعية التي جذراها $(2+2i)$ ،$(-2-2i)$.

sol :

$\text{مجموع الجذرين} = (-2-2i) + (2+2i) = 0$

$\text{حاصل ضرب الجذرين} = (-2-2i).(2+2i)$

$= -4 - 4i - 4i + 4$

$= -8i$

∴ المعادلة

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\,x + \text{حاصل ضرب الجذرين} = 0$

$x^2 - 8i = 0$

2/2020 " التطبيقي"

س/ إذا كان أحد جذري المعادلة $x^2 + (1-a)x + b + 8 = 0$ ، هو $(1-3i)$ ، جد قيمة $a\,,b$ الحقيقتين.

sol :

الجذران مترافقان لان المعاملات حقيقية

الجذر الاول $1-3i$ الجذر الثاني $1+3i$

$x^2 + (1-a)x + b + 8 = 0$

$x^2 - (-1+a)x + b + 8 = 0$

$\text{مجموع الجذرين} = (1-3i) + (1+3i)$

$= 2$

$\text{ضرب الجذرين} = (1-3i)(1+3i) = 10$

$\text{مجموع الجذرين} = -1 + a$

$2 = -1 + a$

$\therefore a = 3$

$\text{ضرب الجذرين} = b + 8$

$10 = b + 8$

$\therefore \ b = 2$

3/2020

س/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(1+2i), (1-i)$

sol :

$L = (1+2i) \ , \ \ M = (1-i)$

$L + M = (1+2i) + (1-i)$

$= 2 + i$

$L.M = (1+2i).(1-i)$

$= 1 - i + 2i + 2$

$= 3 + i$

$x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\,x + \text{حاصل ضربهما} = 0$

$x^2 - (2+i)x + (3+i) = 0$

5-الاسئلة الوزارية حول" الصيغة القطبية للعدد المركب"

2001/ 1

س/ ضع المقدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصيغة العادية للعدد المركب ثم جد مقياسه وسعته الاساسية.

sol :

$$Z = \frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i} \cdot \frac{1-2\sqrt{3}i}{1-2\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{7-14\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}\,i+6}{1+12}$$

$$= \frac{13-13\sqrt{3}\,i}{13} = 1-\sqrt{3}\,i$$

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{2} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الرابع

2002/ 2

س/ اذا كان $z = (-\sqrt{3}\,,1)$ عددا مركبا اكتب الشكل الجبري له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol :

$$Z = -\sqrt{3}+i$$

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2+(1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$, \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \frac{\pi}{6}$ زاوية الاسناد

$\theta = \frac{5\pi}{6}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

2003/ 2

س/ اذا كان z عددا مركبا مقياسه 3 وسعته $\frac{\pi}{3}$ جد الشكل الديكارتي (ارجاند) والشكل الجبري له .

sol : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i = \left(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)$$

2006/ 1

س/ اذا كان Z عددا مركبا مقياسه 4 وسعته $\frac{5\pi}{6}$ جد كلا من الشكل الديكارتي و الجبري له .

sol : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$= 4\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= 4\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= -2\sqrt{3} + 2i = (-2\sqrt{3}\,, 2i)$$

2006/ 2

س/ اذا كان $z = (1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا اكتب الشكل الديكارتي له ثم جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol : $Z = (1\,,\sqrt{3}\,)$

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{2} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الاول

2/2007

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{2i}{1+i}$

sol :

$$\frac{2i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{2i-2i^2}{2}=\frac{2+2i}{2}=1+i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{4}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{4}$ لان السعه تقع بالربع الاول

1/2008

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب

$(1+\sqrt{3}\,i)^2$

sol :

$$z=(1+\sqrt{3}\,i)^2=1+2\sqrt{3}\,i+3i^2=-2+2\sqrt{3}\,i$$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

1/2008 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كان $z=(-1+\sqrt{3}i)$ عددا مركبا جد مقياسه والقيمة الاساسية للسعة

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{2\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الثاني

2/2008

س/ جد المقياس والقيمة الاساسية للسعة للعدد المركب $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

sol : $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4}=1+\sqrt{3}\,i$

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow \frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد

$\theta=\frac{\pi}{3}$ لان السعه تقع بالربع الاول

1/2012)(1/2013 اسئلة خارج القطر)
(1/2014 اسئلة النازحين)

س/ عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2\sqrt{3}-2i$

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+(-2)^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{6}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z)=\theta=2\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}$$

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z=4\left(cos\frac{11\pi}{6}+i\,sin\frac{11\pi}{6}\right)$ الصورة القطبية

1/2013

س/ اذا كان $z=-2+2i$ عبر عن z بالصيغة القطبية.

sol :

$$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعه θ تقع بالربع الثاني

$$arg(z)=\theta=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

$$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$ الصورة القطبية

3 /2014

س/ جد الصيغة القطبية للعدد المركب $5-5i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$= \sqrt{(5)^2+(5)^2}$$
$$= \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z = 5\sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$ الصورة القطبية

---

1 /2015

س/ عبر عن العدد المركب بالصيغة القطبية $2-2\sqrt{3}i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(2)^2+\left(-2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z = 4\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصورة القطبية

---

3 /2015

س/ اكتب الصيغة القطبية للعدد المركب $3-3\sqrt{3}\,i$

sol :

$$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(3)^2+\left(-3\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad , sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الرابع

$$arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z = 6\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)$ الصورة القطبية

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ اكتب العدد $z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$ بالصيغة القطبية

sol :

$$M = \left(1+\sqrt{3}\,i\right) = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{2} \quad , sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الاول

$$arg(M) = \frac{\pi}{3}$$
$$M = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$Z = M^2 = 2^2(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3})^2$$
$$Z = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

طريقة ثانية للحل :

$$z = (1+\sqrt{3}\,i)^2$$
$$Z = 1 + 2\sqrt{3}\,i - 3$$
$$Z = -2 + 2\sqrt{3}\,i$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4$$

$$cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{3}$ والسعه θ تقع بالربع الثاني

$$arg(z) = \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$
$$z = r(cos\theta + i\,sin\theta)$$

$\rightarrow z = 4\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$ الصورة القطبية

6- الاسئلة الوزارية حول " مبرهنة ديموافر"

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $8i$

sol :

$\sqrt{8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = 8 \rightarrow y = \frac{8}{2x} = \frac{4}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{4}{\pm 2}\right) \rightarrow y = \pm 2$

$ans: \sqrt{8i} = \{\pm(2 + 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر $(8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow \quad z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0 \ ,1$

If $k = 0 \rightarrow \quad z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = 2 + 2i$

if $k = 1 \rightarrow \quad z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i \sin\frac{5\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i\right) = -2 - 2i$

2012/ تمهيدي

س/ احسب ما يأتي: $[\cos\frac{5}{24}\pi + i \sin\frac{5}{24}\pi]^4$

sol :

$\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i \sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$= \cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}$

$= -\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$

(2/2011) (2019/تمهيدي"تطبيقي")(2020/تمهيدي"احيائي")

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1 + i)^{11}$

sol : $z = 1 + i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$arg(z) = \theta$

$= \frac{\pi}{4}$ السعه تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع بالربع الاول

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta) \rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^{11} = [\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4})]^{11} =$

$z^{11} = \left[(\sqrt{2})^{11}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)^{11}\right]$

$= 32\sqrt{2}\,(\cos\frac{11\pi}{4} + i \sin\frac{11\pi}{4})$

$= 32\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 32\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}})$

$= 32\sqrt{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 32(-1 + i) = -32 + 32i$

(1/2012)(2013/تمهيدي)(1/2020"تطبيقي")

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر: $(1 - i)^7$

sol :

$z = 1 - i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2}$

$= \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\therefore arg(z) = \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ الربع الرابع

$z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$

$\rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^7 = \sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4})\,]^7$

$= (\sqrt{2})^7\,(\cos\frac{49\pi}{4} + i \sin\frac{49\pi}{4})$

$= 8\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 8\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 8 + 8i$

2013/ تمهيدي

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-8i$

sol :

$\sqrt{-8i} = x + yi$ بتربيع الطرفين

$-8i = (x^2 - y^2) + (2xy)i$

$x^2 - y^2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2xy = -8$

$\rightarrow y = \frac{-8}{2x} = \frac{-4}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$x^2 - \left(\frac{4}{x}\right)^2 = 0$

$\rightarrow \left[x^2 - \frac{16}{x^2} = 0\right] . x^2$

$\rightarrow x^4 - 16 = 0$

$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$

$x^2 + 4 = 0$ يهمل(مجموع مربعين ليس له حل في الاعداد الحقيقية)

او $x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow x^2 = 4$

$\rightarrow x = \pm 2$

$\rightarrow y = \left(\frac{-4}{\pm 2}\right)$

$\rightarrow y = \pm 2$

$ans: \sqrt{8i} = \{\pm(2 - 2i)\}$

ملاحظة : يمكن حل هذا السؤال بطريقة مبرهنة ديموافر $(-8i)^{\frac{1}{2}}$

$z = -8i = 8(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2})$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\,(\cos\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2} + i \sin\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{2})$

$k = 0\ ,1$

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = -2 + 2i$

If $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{8}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i \sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 2 - 2i$

4/2015 "اسئلة النازحين"

س/ جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الاعداد المركبة باستخدام مبرهنة ديموافر: $x^3 - 8i = 0$

sol :

$x^3 = 8i = 8(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2})$

$\rightarrow x = \sqrt[3]{8}\,(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})$

$k = 0\ ,1\ ,2$

If $k = 0$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \sqrt{3} + i$

if $k = 1$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i \sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} + i$

if $k = 2$

$\rightarrow z^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\frac{9\pi}{6} + i \sin\frac{9\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i \sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 2\,(0 - i) = -2i$

(1 /2014)

س/ جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للعدد المركب $(\sqrt{3}+i)^2$

sol : $z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\, z=\| z \|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\| z \|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\| z \|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعه تقع الربع الاول

$$z=2(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=(z^2)^{\frac{1}{5}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{5})$$

$k=0\ ,1\ ,2\ ,3\ ,4$

If $k=0$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}}{5}\right)$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{\pi}{15}+i\,sin\frac{\pi}{15})$$

if $k=1$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{5}\right)$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{7\pi}{15}+i\,sin\frac{7\pi}{15})$$

if $k=2$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{5}\right)$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{13\pi}{15}+i\,sin\frac{13\pi}{15})$$

if $k=3$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+6\pi}{5}\right)$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{19\pi}{15}+i\,sin\frac{19\pi}{15})$$

If $k=4$

$$\to\ z^{\frac{2}{5}}=4^{\frac{1}{5}}\left(cos\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}+i\,sin\frac{\frac{\pi}{3}+8\pi}{5}\right)$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{25\pi}{15}+i\,sin\frac{25\pi}{15})$$

$$=\sqrt[5]{4}(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3})$$

(2/2014)(1/2012 اسئلة خارج القطر)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد : $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

sol : $z=\sqrt{3}+i$

$$Mod\, z=\| z \|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}$$

$$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\| z \|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\| z \|}=\frac{1}{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ لان السعه تقع الربع الاول

$$z=2(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$$

$$\to\ z^{-9}=\left[2\left(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{-9}$$

$$=(2)^{-9}(cos\frac{9\pi}{6}-i\,sin\frac{9\pi}{6})$$

$$=\frac{1}{512}\left(cos\frac{3\pi}{2}-i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{512}(0+i)=\frac{1}{512}i$$

(1/2014 اسئلة خارج القطر)(3/2017)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب :
$-1+\sqrt{3}\,i$

sol : $z=-1+\sqrt{3}i$

$$Mod\, z=\| z \|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-1)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

$$cos\theta=\frac{x}{\| z \|}=\frac{-1}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\| z \|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{\pi}{3}$ زاوية الاسناد θ تقع في ربع الثاني

$$z=2(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3})$$

$$z^{\frac{1}{2}}=[2(cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3})]^{\frac{1}{2}}$$

$$z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}(\,cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}+i\,sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2})$$

$k=0\ ,1$

If $k=0\to\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

if $k=1\to\ z^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}\left(cos\frac{4\pi}{3}+i\,sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$$=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$$

(2 /2013)

س/ بسط ما يأتي: $\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$

sol :

$$\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}$$
$$=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^5\ ]^2}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3\ ]^3}$$
$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=\cos\theta+i\sin\theta$$

او الحل بطريقة اخرى

$$\frac{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}{(\cos3\theta+i\sin3\theta)^3}=\frac{(\cos10\theta+i\sin10\theta)}{(\cos9\theta+i\sin9\theta)}$$
$$=(\cos10\theta+i\sin10\theta).(\cos9\theta+i\sin9\theta)^{-1}$$
$$=(\cos10\theta+i\sin10\theta)(\cos9\theta+i\sin9\theta)$$
$$=[\cos10\theta.\cos9\theta+\sin10\theta.\sin9\theta]$$
$$+[\sin10\theta.\cos9\theta-\cos10\theta.\sin9\theta]i$$
$$=\cos(10\theta-9\theta)+i\sin(10\theta-9\theta)$$
$$=\cos\theta+i\sin\theta$$

2014/ تمهيدي

س/ ضع في ابسط صورة المقدار $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}$

sol :

$$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos5\theta+i\sin5\theta)^2}$$
$$=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^2\ ]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^5\ ]^2}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}=1$$

(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد بابسط صورة

$$a)\ \left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$
$$b)(\cos\theta+i\sin\theta)^8.(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$

sol :

$$a)\ \left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right)^{-3}$$
$$=\left(\cos\frac{21\pi}{12}-i\sin\frac{21\pi}{12}\ \right)=\left(\cos\frac{7\pi}{4}-i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i$$
$$b)(\cos\theta+i\sin\theta)^8.(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^8.(\cos\theta+i\sin\theta)^{-4}$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4=\cos4\theta+i\sin4\theta$$

او $(\cos\theta+i\sin\theta)^8.(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4.(\cos\theta+i\sin\theta)^4.(\cos\theta-i\sin\theta)^4$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4[\ (\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos\theta-i\sin\theta)]^4$$
$$=(\cos4\theta+i\sin4\theta)(\cos^2\theta+i\sin^2\theta)^4$$
$$=\cos4\theta+i\sin4\theta$$

(2015/ 1)(2017/ تمهيدي)(2/2019"تطبيقي")

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد $125i$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol :

$$z=125i=125(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2})$$
$$\to z^{\frac13}=[125\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)]^{\frac13}$$
$$\because r=125\ ,\qquad \theta=\frac{\pi}{2}$$
$$\to\ z^{\frac13}=(125)^{\frac13}(\cos\frac{\frac{\pi}{2}-2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}-2k\pi}{3})$$
$$k=0\ ,1\ ,\ 2$$

If $k=0\to\ z^{\frac13}=5\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=5\left(\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)=\frac{5\sqrt3}{2}+\frac52 i$$

If $k=1\to\ z^{\frac13}=5\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{3}\right)$

$$=5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$
$$=5\left(-\frac{\sqrt3}{2}+\frac12 i\right)=-\frac{5\sqrt3}{2}+\frac52 i$$

If $k=2\to\ z^{\frac13}=5\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{6}\right)$

$$=5\left(\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}\right)$$
$$=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$
$$=5\,(0-i)=-5i$$

(2017/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة باستخدام مبرهنة ديموافر $x^3-125i=0$

sol :

$$x^3-125i=0$$
$$x^3=125i$$
$$\to x^3=125i(\cos\tfrac{\pi}{2}+i\sin\tfrac{\pi}{2})$$

تكملة الحل مثل ما موجود في الجواب السابق

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ هل ان: $\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2\ =0$

اثبت ذلك

sol :

$$\frac{(\cos2\theta+i\sin2\theta)^5}{(\cos4\theta+i\sin4\theta)^2}$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$
$$=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^4]^2}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$
$$=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^8}-(\cos\theta+i\sin\theta)^2$$
$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^2-(\cos\theta+i\sin\theta)^2=0$$

2015/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $(1+i)^2$ على وفق مبرهنة ديموافر.

sol : $z = 1 + i$

$$Mod\ z = \|z\| = r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1)^2+(1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$arg(z) = \theta$

$= \frac{\pi}{4}$ السعه تساوي زاوية الاسناد لان العدد المركب يقع الربع الاول

$$z = \sqrt{2}\,(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})$$

$$z^2 = [(\sqrt{2})^2(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4})^2] = 2(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$$

$k = 0\ ,1\ ,2$

If $k = 0 \rightarrow\ (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{2}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow\ (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow\ (z^2)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

2017/ 2" اسئلة خارج القطر"

س/ احسب: $[cos\frac{7}{12}\pi + i\,sin\frac{7}{12}\pi]^{-3}$

sol :

$$\left[cos\frac{7}{12}\pi + i\,sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$$

$$= \left[cos\frac{21\pi}{12} - i\,sin\frac{21\pi}{12}\right] = \left[cos\frac{7\pi}{4} - i\,sin\frac{7\pi}{4}\right]$$

$= cos\frac{\pi}{4} - i\,sin\frac{\pi}{4}$ لان $\frac{7\pi}{4}$ ∈ الربع الرابع

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

الطريقة الثانية

$$z = (1+i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$$

$$= 2(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2})$$

$$(z)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3})$$

$k = 0\ ,1\ ,2$

If $k = 0 \rightarrow\ (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 1 \rightarrow\ (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{5\pi}{6} + i\,sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

If $k = 2 \rightarrow\ (z)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3}\right)$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{9\pi}{6} + i\,sin\frac{9\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{2}(0 - i)$$

2017/ 2

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر, بسط ما يأتي : $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos3\theta+isin3\theta)^2}$

sol :

الطريقة الاولى $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^5}{(cos3\theta+isin3\theta)^2}$

$$= \frac{(cos\theta + isin\theta)^{10}}{(cos\theta + isin\theta)^6}$$

$$= (cos\theta + isin\theta)^4 = cos4\theta + isin4\theta$$

الطريقة الثانية

$$\frac{(cos2\theta + isin2\theta)^3}{(cos3\theta + isin3\theta)^2}\ .(cos2\theta + isin2\theta)^2$$

$$= \frac{\cancel{(cos6\theta + isin6\theta)}}{\cancel{(cos6\theta + isin6\theta)}}\ (cos2\theta + isin2\theta)^2$$

$$= cos4\theta + isin4\theta$$

(2 /2018)(2 /2017)

س/ احسب: $[cos\frac{3\pi}{8} + i\,sin\frac{3\pi}{8}]^{-4}$

sol :

$$\left[cos\frac{3\pi}{8} + i\,sin\frac{3\pi}{8}\right]^{-4}$$

$$= \left[cos\frac{12\pi}{8} - i\,sin\frac{12\pi}{8}\right]$$

$$= \left[cos\frac{3\pi}{2} - i\,sin\frac{3\pi}{2}\right] = 0 + i = i$$

1 /2017

س/ احسب باستخدام مبرهنة ديموافر: $(\sqrt{2}+i)^{\frac{-3}{2}}$

sol : sol : $z=\sqrt{3}+i$

$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}$
$=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad ,sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{1}{2}$

$\theta=\frac{\pi}{6}$ السعه تقع الربع الاول

$\therefore z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$

$z=2(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})$

$z^{\frac{-3}{2}}=(z^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$=(2^{-3}\,(cos\frac{\pi}{6}+i\,sin\frac{\pi}{6})^{-3})^{\frac{1}{2}}$

$=(\frac{1}{8}\,(cos\frac{\pi}{2}-i\,sin\frac{\pi}{2}))^{\frac{1}{2}}$

$=\frac{1}{\sqrt{8}}\,(cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}-i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2})$

$\therefore k=0\ ,1$

If $k=0\rightarrow\ z^{\frac{-3}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(cos\frac{\pi}{4}-i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}i$

If $k=1\rightarrow\ z^{\frac{-3}{2}}=(\frac{1}{2\sqrt{2}}\ (cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2}-i\,sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi}{2})$

$=(\frac{1}{2\sqrt{2}}(cos\frac{5\pi}{4}-i\,sin\frac{5\pi}{4})$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

ملاحظة/ بأمكان الطالب أيجاد اولاً z^{-1} بتغير اشارة الوسط فقط وثم z^3 ومن ثم $z^{\frac{1}{2}}$ وهكذا

---

2 /2018

س/ ضع بابسط صوره : $\frac{[cos5\theta+isin5\theta]^2}{[cos3\theta+isin3\theta]^2}[cos\,\theta-i\,sin\,\theta]^4$

sol :

$[cos\,\theta-i\,sin\,\theta]^{-4}\,\frac{(cos\theta+isin\theta)^{10}}{(cos\theta+isin\theta)^6}$

$=[cos\,\theta+i\,sin\,\theta]^{-4}.[cos\,\theta+i\,sin\,\theta]^4$

$=[cos\,\theta+i\,sin\,\theta]^0=1$

2018/ تمهيدي

س/ جد باستخدام مبرهنة ديموافر او التعميم: $(1+i)^{-5}$

sol : $z=1+i$

$Mod\ z=\|z\|=r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(1)^2+(1)^2}$
$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$cos\theta=\frac{x}{\|z\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$sin\theta=\frac{y}{\|z\|}=\frac{-1}{\sqrt{2}}$

$arg(z)=\theta=\frac{\pi}{4}$ تقع في الربع الاول

$z=r(cos\theta+i\,sin\theta)$

$\rightarrow z=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\rightarrow z^{-5}=\left[(\sqrt{2})^{-5}\left(cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{-5}\right]$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\,(cos\frac{5\pi}{4}-i\,sin\frac{5\pi}{4})$

$\therefore\ \frac{5\pi}{4}$ تقع في الربع الثالث

$z^{-5}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-cos\frac{\pi}{4}+i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)=\frac{-1}{8}+\frac{1}{8}i$

---

3 /2018

س/ اثبت ان: $\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^3}{(cos5\theta+isin5\theta)}\ .(cos\,\theta-i\,sin\,\theta)=1$

sol :

$\frac{(cos2\theta+isin2\theta)^3}{(cos5\theta+isin5\theta)}\ .(cos\,\theta-i\,sin\,\theta)$

$=\frac{(cos\theta+isin\theta)^6}{(cos\theta+isin\theta)^5}.(cos\,\theta-i\,sin\,\theta)$

$=(cos\,\theta+i\,sin\,\theta).(cos\,\theta-i\,sin\,\theta)$

$=cos^2\theta+sin^2\theta=1$

2018 /1

س/ جد حل المعادلة حيث $x \in \mathbb{C}$ وباستخدام مبرهنة ديموافر

$$x^4 + 16 = 0$$

sol :

$x^4 = -16$

$x^4 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$

$x = 2(\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{4}}$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)$

$k = 0, 1, 2, 3$

if $k = 0$

$x = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 1$

$x = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= 2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

if $k = 2$

$x = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = 2\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

if $k = 3$

$x = 2\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$= \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

2018 /1 "اسئلة خارج القطر"

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر احسب: $(-1 - \sqrt{-1})^{-3}$

sol :

Let $z = -1 - \sqrt{-1} = -1 - i$

$Mod\ z = \| z \| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ لان السعه تقع الربع الثالث

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4})$

$\rightarrow\ z^{-3} = \left[\left(\sqrt{2}\right)^{-3}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^{-3}$

$= \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^3}(\cos\frac{15\pi}{4} - i\sin\frac{15\pi}{4})$

$\therefore\ (-1 - i)^{-3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4} - i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$

$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

2019/ تمهيدي

س/ جد الصيغة القطبية للمقدار $(1+i)^2$,ثم جد الجذور التكعيبية له باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

sol :

Let $z = 1 + i$

$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{y}{\| z \|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ بالربع الاول

$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

$z = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^2 = [(\sqrt{2})^2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})^2]$

$= 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$(z^2)^{\frac{1}{3}} = \left[2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\right]^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3})$

$k = 0, 1, 2$

If $k = 0$,

$R_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(0)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 1$,

$R_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(1)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

If $k = 2$

$R_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2(2)\pi}{3}\right)$

$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= \sqrt[3]{2}(0 - i) = -\sqrt[3]{2}i$

(1/2019)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر , احسب $(2\sqrt{3}-2i)^{-2}$

sol :

$z = 2\sqrt{3} - 2i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$ المقياس

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ زاورية الاشارة $= \frac{\pi}{6}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$ θ تقع في الربع الرابع

$Arg(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6} = \theta$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$z^{-2} = (4)^{-2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{-2}$

$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\cos\frac{22\pi}{6} - i\sin\frac{22\pi}{6}\right)$

$z^{-2} = \frac{1}{16}(\cos\frac{5\pi}{3} - i\sin\frac{5\pi}{3})$

$z^{-2} = \frac{1}{16}(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$

$z^{-2} = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\right) = \frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}\ i$

(1/2019"تطبيقي")

س/ حل المعادلة التالية C باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر :

$\frac{x^3}{i} - 27 = 0$

sol :

$\left[\frac{x^3}{i} - 27 = 0\right].i$

$x^3 - 27i = 0 \Rightarrow x^3 = 27i$

$= 27\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$\therefore x = 27^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$= 3\ \left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)$

عند :-

$k = 0, 1, 2$

عندما $k = 0 \Rightarrow x_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

عندما $k = 1 \Rightarrow x_2 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

عندما $k = 2 \Rightarrow x_3 = 3\left(\cos\frac{9^3\pi}{6^2} + i\sin\frac{9^3\pi}{6^2}\right)$

$= 3(0 + i(-1)) = -3i$

$\therefore\ S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ , \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i\ , -3i\right\}$

قمة الضعف..
أن تلبس حذاء يؤلمك
لانه يعجب الناس

(1/2019 اسئلة خارج القطر "تطبيقي")

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد $(27\,i)$.

sol :

$Z = 27\,i$

$\sqrt[3]{2} = (27i)^{\frac{1}{3}}$

$(0\,,27)$ تكتب بالصورة الديكارتية

$Z = -r\,(\cos\theta + i\sin\theta\,)$ بالصورة القطبية

$Z = 27\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$

$Z^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}}\,\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\theta+2\,k\,\pi}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}$ $\quad k = 0, 1, 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(0)\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ عندما $k = 0$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + \sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right) \quad k = 0$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 3\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$k = 1$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(1)\pi}{3} = \frac{\frac{5\pi}{2}}{3} = \frac{5\pi}{6}$ تقع في الربع الثاني

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(-\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$k = 2$

$\frac{\frac{\pi}{2}+2(2)\pi}{3} = \frac{9^3\pi}{6^2}$

$Z^{\frac{1}{3}} = 3\,\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$= 3\,(0 - i) = -3i$

(1/2019"اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كان $Z = \cos 2x + i\sin 2x$ فاثبت ان $\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$

sol :

$\frac{2}{1+Z} = 1 - i\tan x$ الطرف الايسر

$\frac{2}{1+\cos 2x+i\sin 2x}$

$= \frac{2}{2\cos^2 x+i(2\sin x*\cos x)} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos x(\cos x+i\sin x)}$

$= \frac{1}{\cos x(\cos x+i\sin x)} * \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x-i\sin x}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(\cos^2 x+\sin^2 x)}$

$= \frac{\cos x-i\sin x}{\cos x(1)}$

$= \frac{\cos x}{\cos x} - i\frac{\sin x}{\cos x}$

$= 1 - i\tan x =$ الطرف الايمن

(3/2019)

س/ باستخدام مبرهنة ديموافر حل المعادلة $x^3 + 1 = 0$ حيث $x \in C$

sol :

$x^3 + 1 = 0$

$x^3 = \cos\pi + i\sin\pi$

$x = \left[\cos\frac{\pi+2K\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2K\pi}{3}\right]$

حيث $K = 0, 1, 2$

عندما $K = 0$

$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

عندما $K = 1$

$x_2 = \left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3} = -1 + 0i = -1$

عندما $K = 2$

$x_3 = \left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

(3/2019 "تطبيقي")

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(1-\sqrt{-3})$ باستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر

sol :

$\because Z = 1-\sqrt{-3} = 1-\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$

$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

زاوية الاسناد $= \frac{\pi}{3}$

وتقع في الربع الرابع $(+,-)$

$\therefore \arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{5\pi}{3}$

$\therefore \sqrt{Z} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2} + i\sin\frac{\frac{5\pi}{3}+2\pi K}{2}\right)$

عندما $K = 0, 1$

عندما $K = 0 \to Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

عندما $K = 1 \to Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$

$\therefore S = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \ , \ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

(2/2019)

س/ اذا كان $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ فاثبت ان :

$$\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{1}{2\cos n\theta}$$

sol :

$$\frac{Z^n}{1+Z^{2n}} = \frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^n}{1+(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}}$$

$$= \frac{\cos n\theta}{1+\cos 2n\theta + i\sin 2n\theta}$$

$$= \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + 2i\sin n\theta\cos n\theta}$$

$$= \frac{(\cos n\theta + i\sin n\theta)}{2\cos n\theta(\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

$$= \frac{1}{2\cos n\theta} = R.H$$

2/2020

س/ بأستخدام $(-1+\sqrt{3}i)$ جد الجذرين التربيعين للعدد المركب نتيجة مبرهنة ديموافر.

sol :

$z = -1+\sqrt{3}i$

$r = \sqrt{1+3} = 2$

$cos\theta = \frac{-1}{2}$, $sin\,\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

θ تقع في الربع الثاني ، زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore z = r\,[cos\,\theta + i\,sin\theta]$

$z = 2\left[cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\,\frac{2\pi}{3}\right]$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[cos\,\frac{2\pi}{3} + i\,sin\,\frac{2\pi}{3}\right]^{\frac{1}{2}}$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\,sin\,\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right]$

$z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\left[cos\frac{2\pi+6k\pi}{6} + i\,sin\,\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right]$

3/2020 التطبيقي

س/ جد الجذور التربيعية للعدد المركب $(-1+\sqrt{3}i)$ باستخدام مبرهنة ديموافر

sol :

$Z = -1 + \sqrt{3}i$

$x = -1 \ , \ y = \sqrt{3}$

$r = \sqrt{r^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{2} \ , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ زاوية تقع في الربع الثاني زاوية الاسناد $\frac{\pi}{3}$

$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$Z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\therefore Z^{\frac{1}{2}} = \left[2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+k\pi}{2}\right) \qquad K = 0,1$

عندما $K = 0$

$\Rightarrow Z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$Z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \ldots\ldots\ldots\ldots.*$

عندما $K = 1$

$Z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i \ldots\ldots\ldots\ldots.*$

ملاحظة : اذا لم يذكر الطالب هذه الخطوة * يعطى درجة كاملة

3/2020

س/ اذا كانت $Z = \cos 2t + i\sin 2t$ فبرهن ان :

$\frac{2}{1+z} = 1 - i\tan t$

sol :

الطرف الايسر $\frac{2}{1+z} = \frac{2}{1+\cos 2t + i\sin 2t}$

$= \frac{2}{2\cos^2 t + 2i\sin t\cos t}$

$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\cos t\,(\cos t + i\sin t)}$

$= \frac{1}{\cos t} * \frac{1}{\cos t + i\sin t} * \frac{\cos t - i\sin t}{\cos t - i\sin t}$

$= \frac{1}{\cos t} * \frac{\cos t - i\sin t}{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{1}}$

$= \frac{\cos t - i\sin t}{\cos t}$

$= \frac{\cos t}{\cos t} - \frac{i\sin t}{\cos t}$

$= 1 - i\tan t =$ الطرف الايمن

الاسئلة الوزارية حول الفصل الثاني" القطوع المخروطية"

30 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول القطع المكافئ

2004/ 2

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ومحوره محوره السينات ويمر بالنقطة (1,4) ثم جد معادلة المماس له عند تلك النقطة.

sol :

بما أن النقطة تقع في الربع الأول وبؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات فان معادلته معادلة القطع المكافئ

$y^2 = 4px \quad \rightarrow 16 = 4p$

$\rightarrow p = 4 \quad \rightarrow y^2 = 16x$

$2yy' = 16 \quad \rightarrow y' = \frac{8}{y}$

نقطة التماس(1,4) ميل المماس للمنحني $\rightarrow m = \frac{8}{4} = 2$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

معادلة المماس $\rightarrow (y-4) = 2(x-1)$

2005/ تمهيدي

س/ باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل ومعادلة دليله $y = \sqrt{3}$

sol :

بما ان معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ فان بورته $F(0, -\sqrt{3})$ و $Q(X, \sqrt{3})$

$\overline{QM} = \overline{FM}$

$\sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2} = \sqrt{x^2 + (y+\sqrt{3})^2}$

$y^2 - 2\sqrt{3}\,y + 3 = x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3$

$x^2 = -4\sqrt{3}\,y$

2006/ 1

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(3, 6), (-3, 6)$ ثم جد معادلة دليله.

sol :

بما أن النقطتان تقعان بالربعين الاول والثاني في بؤرة القطع المكافئ تقع على المحور الصادي الموجب

$x^2 = 4py \quad \rightarrow F(0, \frac{3}{8})$ البؤرة $\rightarrow y = -\frac{3}{8}$ معادلة الدليل

$9 = 24p \quad \rightarrow p = \frac{3}{8}$

$x^2 = 4(\frac{3}{8})y \quad \rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$ معادلة القطع المكافىء

2006/ 2

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين (3 , 1),(-3 , 1) ثم جد معادلة دليله.

sol :

بما أن القطع المكافئ يمر بنقطتين تقعان في الربعين الأول والرابع فان بؤرته تقع على محور السينات الموجب

$y^2 = 9x \quad \rightarrow y^2 = 4py$ معادلة القطع المكافىء

$\rightarrow 9 = 4p \quad \rightarrow p = \frac{9}{4}$

$F(P, 0) = (\frac{9}{4}, 0)$ البؤرة,

$X = -P \quad \rightarrow X = -\frac{9}{4}$ معادلة الدليل

2007/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته الانقلاب للدالة $f(x) = (x-1)^3$

sol :

$f(x) = (x-1)^3$

$f'(x) = 3(x-1)^2$

$f''(x) = 6(x-1)$

$6(x-1) = 0 \quad \rightarrow x = 1 \quad \rightarrow f(1) = 0$

نقطة الانقلاب وهي بؤرة القطع المكافىء $(1,0) \rightarrow$

$P = 1$

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4x$ معادلة القطع المكافىء

2008/ تمهيدي

س/ قطع مكافئ معادلته $y^2=hx$ $\frac{1}{4}$ دليله يمر بالنقطة $(-6,3)$ جد قيمة h

sol :
$\frac{1}{4}y^2 = hx \quad \rightarrow y^2 = 4hx$ البؤرة تقع على محور السينات
$p = 6$ بؤرة القطع المكافىء $f(6,0)$ معادلة الدليل $x = -6$
$y^2 = 4px$
$\rightarrow y^2 = 24x \quad , \quad y^2 = 4hx$
$\rightarrow 4h = 24 \quad h = 6$

---

1 /2011

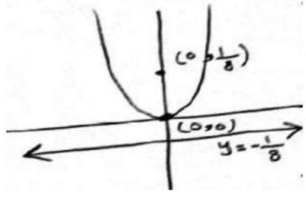
س/ أوجد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته : $A\,x^2 + 8\,y = 0$ والمار بالنقطة $(2,1)$

sol :
النقطة (2,1) تحقق المعادلة
$A(2)^2 + 8(1) = 0 \quad \rightarrow 4A + 8 = 0 \quad \rightarrow A = -2$
$-2x^2 = -8y\,] \div -2$
$x^2 = 4y$
$\rightarrow x^2 = 4py \quad \rightarrow 4p = 4 \quad \rightarrow p = 1$
$F(0,p) = (0,1)$ بؤرة القطع المكافىء ,
$y = -p \quad , y = -1$ معادلة الدليل

(2018/ تمهيدي)(2/2019"تطبيقي")(2020/تمهيدي"احيائي")

س/ قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة $(1,2)$ جد قيمة A, ثم جد بؤرة ودليل القطع المكافىء مع الرسم

sol :
النقطة (1,2) تحقق المعادلة
$A(1)^2 + 8(2) = 0 \quad \rightarrow A + 16 = 0 \quad \rightarrow A = -16$
$-16x^2 + 8y$
$16x^2 = 8y \div 16$
$x^2 = \frac{1}{2}y \,, \quad \rightarrow x^2 = 4py \quad \rightarrow 4p = \frac{1}{2}$
$p = \frac{1}{8}$
$F(0,\frac{1}{8})$ بؤرة القطع المكافىء
$y = \frac{-1}{8}$ معادلة الدليل
ملاحظة/ اذا كان الرسم غير موجود تخصم درجتان من الطالب



2016/ 3 (اسئلة خارج القطر)

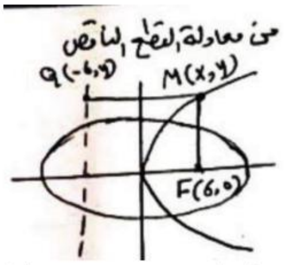
س/ جد معادلة القطع المكافىء الذي رأسة نقطة الاصل وبؤرته على محور السينات والمسافة بين البؤرة والدليل تساوي 8 وحدات.

sol :
$2p = 8 \quad \rightarrow p = 4$
∵ البؤرة على محور السينات هنالك احتمالان
(1)الاحتمال الاول البؤرة $(4,0)$
$y^2 = 4px \quad \rightarrow y^2 = 4(4)x \rightarrow y^2 = 16x$ معادلة القطع المكافىء
(2)الاحتمال الثاني البؤرة $(-4,0)$
$y^2 = -4px$
$\rightarrow y^2 = -4(4)x$
$\rightarrow y^2 = -16x$ معادلة القطع المكافىء

2019/ تمهيدي (تطبيقي)

س/ جد معادلة القطع المكافىء بطريقة التعريف إذا كانت بؤرته هي البؤرة اليمنى للقطع الناقص: $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

Sol:
$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$
$a^2 = 100 \,, \quad b^2 = 64$
$c^2 = a^2 - b^2$
$= 100 - 64 = 36$
$\therefore c = 6 \quad (-6,0),(6,0)$ بؤرتي القطع الناقص
$\therefore p = 6 \quad (6,0)$ بؤرة القطع المكافىء
نفرض النقطة $M(x,y)$ تنتمي للقطع المكافئ
$MF = QM$
$\sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-y)^2}$ بتربيع الطرفين
$x^2 - 12x + 36 + y^2 = x^2 + 12x + 36$
$y^2 = 12x + 12x$
$y^2 = 24x$ معادلة القطع المكافى



ملاحظة/ الرسم ضروري من ضمن الحل

(2/2019)

س/ جد معادلة القطع المكافئ بطريقة التعريف اذا كانت بؤرته هي نقطة انقلاب الدالة $f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$ ورأسه نقطة الاصل .

sol :

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 16$

$f^{\backslash}(x) = 3x^2 + 12x \quad , \quad f^{\backslash\backslash}(x) = 6x + 12$

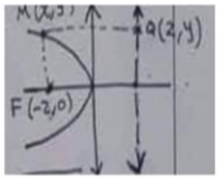
$f^{\backslash\backslash}(x) = 0 \Rightarrow 6x + 12 = 0\ ] \div 6$

$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$

$f(-2) = (-2)^3 + 6(-2)^2 - 16 = -8 + 24 - 16 = 24 - 24 = 0$

$\therefore$ نقطة الانقلاب $(-2,0)$ وتمثل بؤرة القطع المكافئ

باستخدام التعريف



نفرض $M(x,y) \ni$ للقطع المكافئ

$MF = MQ$

$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$\sqrt{(-2 - x)^2 + (0 - y)^2} = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - y)^2}$

بتربيع الطرفين وفتح الاقواس

$4 + 4x + x^2 + y^2 = x^2 - 4x + 4$

$y^2 = -4 - 4x \quad \Rightarrow y^2 = -8x$

ملاحظة :- اذا الطالب لم يرسم لايحاسب

3/2020

س/ جد قيمة A وبؤرة ودليل القطع المكافئ الذي معادلته $Ax^2 + 4y = 0$ والمار بالنقطة $(1\,,1)$

sol :

$\because$ النقطة $(1\,,1)$ تنتمي للقطع المكافئ

$Ax^2 + 4y = 0$

$A(1)^2 + 4(1) = 0$

$A + 4 = 0 \quad \Rightarrow A = -4$

نعوض قيمة A في معادلة القطع المكافئ

$-4x^2 + 4y = 0$

$-4x^2 = -4y\ ] \div -4$

$x^2 = y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة بالمعادلة القياسية

$4p = 1 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{1}{4}$ البؤرة تنتمي لمحور الصادات الجزء الموجب

$\therefore$ البؤرة $F\left(0,\frac{1}{4}\right)$

$\therefore$ معادلة الدليل $y = \frac{-1}{4}$

2020/تمهيدي"تطبيقي"

س/ جد معادلة القطع المكافئ الذي دليله يمر بالنقطة $(-2,5)$ والرأس في نقطة الاصل علما ان بؤرته تنتمي لاحد المحورين .

sol :

اذا كانت البؤرة $\ni$ محور السينات

معادلة الدليل / $x = -2 \Rightarrow F(2,0) \Rightarrow p = 2$

$y^2 = 4px$

$y^2 = 4(2)x$

$y^2 = 8x$ معادلة القطع المكافئ

اذا كانت البؤرة $\ni$ محور الصادات

معادلة الدليل / $y = 5 \Rightarrow F(0\,,5) \Rightarrow p = 5$

$x^2 = -4py$

$x^2 = -4(5)y$

$x^2 = -20\,y$ معادلة القطع المكافئ

1/2020"تطبيقي"

س/ جد معادلة القطع المكافئ حسب التعريف ، اذا علمت ان بؤرته $(\sqrt{3}\,,0)$ ورأسه نقطة الاصل .

sol :

نفرض النقطة $M(x\,,y)$ تنتمي للقطع المكافئ

$\overline{MF} = \overline{MQ}$

$\sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{\left(x + \sqrt{3}\right)^2 + (y - y)^2}$

بتربيع الطرفين $\sqrt{\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + y^2} = \sqrt{\left(x + \sqrt{3}\right)^2}$

$\left(x - \sqrt{3}\right)^2 + y^2 = \left(x + \sqrt{3}\right)^2$

$\cancel{x^2} - 2\sqrt{3}\,x + \cancel{3} + y^2 = \cancel{x^2} + 2\sqrt{3}\,x + \cancel{3}$

$-2\sqrt{3}\,x + y^2 = 2\sqrt{3}\,x$

$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$

معادلة القطع المكافئ المطلوبة

2- الاسئلة الوزارية حول "القطع الناقص"

(2/1998)(2/2017)

س/ قطع ناقص معادلته $h x^2 + k y^2 = 36$ ومركزه نقطة الأصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\, x$. فما قيمة كل من $h\ ,\ k \in R$ ؟

sol :

$(h x^2 + k y^2 = 36) \div 36$

$\frac{x^2}{\frac{36}{h}} + \frac{y^2}{\frac{36}{k}} = 1$ ——— (1)

$(2a)^2 + (2b)^2 = 60$

$(4a^2 + 4b^2 = 60) \div 4$

$\rightarrow a^2 + b^2 = 15$

$\therefore a^2 = 15 - b^2$

بالمقارنة مع المعادلة $y^2 = 4\sqrt{3}x$

$y^2 = 4px$

$4p = 4\sqrt{3}$

$p = \sqrt{3}$

بؤرة القطع المكافئ $F \therefore (\sqrt{3}, 0)$

بؤرتا القطع الناقص $\therefore F_1(\sqrt{3}, 0)\ ,\ F_2(-\sqrt{3}, 0)$

$c = \sqrt{3} \rightarrow c^2 = 3$

$a^2 = b^2 + c^2$

$(15 - b^2) = b^2 + 3$

$2b^2 = 12$

$b^2 = 6$

$\therefore a^2 = 15 - 6 = 9$

المعادلة هي: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{6} = 1$ ——— (2) بالمقارنة مع المعادلة رقم (1)

$\therefore \frac{36}{h} = 9 \rightarrow h = \frac{36}{9} = 4$

$\therefore \frac{36}{k} = 6 \rightarrow \therefore k = \frac{36}{6} = 6$

(2/1999)(2017/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ النقطة $(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي الى القطع المكافئ الذي راسه نقطة الأصل وبؤرته تنتمي الى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل و النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص .

sol :

$(\frac{1}{3}, 2)$ تنتمي للقطع $\rightarrow$ تحقق معادلته

$y^2 = 4px$

$4 = 4p\left(\frac{1}{3}\right)$

$12 = 4p$

$p = 3$

بؤرة القطع المكافيء $(3, 0)$

معادلة القطع المكافيء $y^2 = 12x$

بؤرتي القطع الناقص $(3,0), (-3,0)$ $c = 3$

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4}$

$4a = 5b$

$a = \frac{5b}{4}$ .... (1

$\therefore a^2 = b^2 + c^2$ .... (2

$(\frac{5b}{4})^2 = b^2 + 9$

$\rightarrow [\frac{25b^2}{16} = b^2 + 9].16$

$25b^2 = 16b^2 + 144$

$\rightarrow 9b^2 = 144$

$\rightarrow b^2 = 16 \quad b = 4$

$a = \frac{5b}{4}$

$a = \frac{5.4}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

في الدنيا ثلاث :
أمل , ألم , أجر
فعش الأولى , وتحمل الثانية
لأجل الثالثة :

(1/2000)(2/2014)(2017/ تمهيدي)(2017/ 3 اسئلة الموصل)(2018/ 2 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$ علما بأن القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

sol :

$y^2 + 8x = 0$

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$-4p = -8$

$p = 2$ $(-2, 0)$ ∴ بؤرة القطع المكافئ

وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

∴ بؤرتا القطع الناقص هما $(-2, 0)$ $(2, 0)$

$c = 2$ $\therefore c^2 = 4$

$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 4$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ المعادلة هي

القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}, \sqrt{3})$ ∴ تحقق معادلته :

$$\frac{(2\sqrt{3})^2}{b^2+4} + \frac{(\sqrt{3})^2}{b^2} = 1$$

$$\left(\frac{12}{b^2+4} + \frac{3}{b^2} = 1\right) \times b^2(b^2+4)$$

$12b^2 + 3(b^2+4) = b^2(b^2+4)$

$12b^2 + 3b^2 + 12 = b^4 + 4b^2$

$b^4 - 11b^2 - 12 = 0$

$(b^2+1)(b^2-12) = 0$

$b^2 + 1 \neq 0$ يهمل

$b^2 - 12 = 0$

$b^2 = 12$

$$\therefore \frac{x^2}{12+4} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ المعادلة المطلوبة :

(2000/ 2)(2007/ تمهيدي)(2008/ 2 اسئلة خارج القطر)(2013/ 3)(2014/ 4 اسئلة الانبار) (2015/ 1 اسئلة النازحين) (2018/ تمهيدي) (2019/ 1"اسئلة خارج القطر")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه كنسبة $\frac{5}{3}$

sol :

$[x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$ في القطع الزائد

$a^2 = 12 \quad , b^2 = 4$

$\rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow c^2 = 12 + 4 \quad \rightarrow c^2 = 16 \quad \rightarrow c = 4$

$(4, 0), (-4, 0)$ بؤرتي القطع الزائد وهما بؤرتي القطع الناقص

$\rightarrow c = 4$ القطع الناقص

$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \rightarrow 3a = 5b$

$\rightarrow a = \frac{5b}{3} \ldots\ldots\ldots (1)$

$, a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$ نعوض(1)في(2)

$\left[\frac{25b^2}{9} = b^2 + 16\right].9$

$\rightarrow 25b^2 = 9b^2 + 144$

$\rightarrow 16b^2 = 144$

$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3$

$a = \frac{5}{3}.3 \quad \rightarrow a = 5 \quad \therefore a^2 = 25$

$\therefore \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

---

2 /2002

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوي 8 وحدات ومجموع طولي محوريه يساوي 16 وحدة.

sol :

$2c = 8 \quad \rightarrow c = 4 \in$ لمحور السينات $\quad \therefore c^2 = 16$

$2a + 2b = 16 \quad \rightarrow a + b = 8$

$\rightarrow a = 8 - b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في (2)

$(8 - b)^2 = b^2 + 16$

$\rightarrow 64 - 16b + b^2 = b^2 + 16$

$\rightarrow 16b = 48 \quad \rightarrow b = 3 \quad \therefore b^2 = 9$

$a = 8 - 3 = 5 \quad \therefore a^2 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

2 /2003

س/ قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طولي محوريه واحداثيي رأسيه وبؤرتيه.

sol :

$[x^2 + 4y^2 = 4] \div 4$

$\rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$

$a^2 = 4 \ \rightarrow a = 2 \ \ , b^2 = 1$

$\rightarrow b = 1$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 4 = 1 + c^2$

$c^2 = 3 \ \rightarrow c = \sqrt{3}$

$2a = 4$ طول المحور الكبير , $2b = 2$ طول المحور الصغير

$(\pm 2, 0)$ رأس القطع الناقص , $(\pm\sqrt{3}, 0)$ بؤرتي القطع الناقص

(2004 /2)(2015 /2 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $x^2 = 24y$ والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

sol :

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$ نقارنها مع المعادلة القياسية

$4p = 24 \rightarrow p = 6$

$\therefore c = 6$ وهي احد بؤرة القطع الناقص $(0, 6)$ بؤرة القطع المكافىء

$2a - 2b = 4 \ ] \div 2$

$a - b = 2 \rightarrow \ \ a = b + 2 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1)$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\rightarrow 36 = (b+2)^2 - b^2$

$36 = b^2 + 4b + 4 - b^2$

$\rightarrow 4b = 36 - 4$

$\rightarrow 4b = 32 \ \rightarrow b = 8$ نعوضها في (1)

$\therefore b^2 = 64$

$a = 8 + 2 = 10$

$\rightarrow \ a^2 = 100$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

1 /2005

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبورتاه على محور السينات والمسافة بين بورتيه تساوي 6 وحدة والفرق بين طولي محوريه وحدتا طول

sol :

$2c = 6 \ \rightarrow c = 3$ على محور السينات $\therefore c^2 = 9$

$2a - 2b = 2$

$\rightarrow a - b = 1 \quad \rightarrow a = 1 + b \ldots\ldots\ldots.(1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots.(2)$

نعوض معادلة رقم (1) في (2)

$\rightarrow (1+b)^2 = b^2 + 9$

$\rightarrow 1 + 2b + b^2 = b^2 + 9$

$2b = 8 \ \rightarrow b = 4 \quad \therefore b^2 = 16$

نعوضها في (1)

$a = 1 + 4 = 5 \ \rightarrow \ a^2 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

2 /2005

س/ لتكن $y^2 + 12x = 0 \ , y^2 - 12x = 0$ معادلتي قطعين مكافئين جد بؤرة كل منهما ومعادلة دليله ثم جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين وطول محوره الصغير يساوي 10 وحدات

sol :

$y^2 = 12x \ \ , y^2 = 4px \ \rightarrow 4p = 12$

$\rightarrow 4p = 12 \ \rightarrow p = 3$

$x^2 = -12x \ , x^2 = -4px \ \rightarrow 4p = 12 \ \rightarrow \ p = 3$

معادلة دليلهما x=-3 ,x=3 , بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الناقص (3,0-) , (3,0)

$2b = 10 \ \rightarrow b = 5 \ \ \therefore b^2 = 25$

$a^2 = b^2 + c^2 \ \ \rightarrow a^2 = 9 + 25 \ \ \rightarrow a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

2006/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبورتاه على محور السينات والمسافة بين بورتيه تساوي 12 وحدة والفرق بين طولي محوريه يساوي 4 وحدات طول

sol :

$2c = 12 \ \rightarrow c = 6$ على محور السينات $\therefore c^2 = 36$

$2a - 2b = 4$

$\rightarrow a - b = 2 \quad \rightarrow a = 2 + b \ldots\ldots\ldots.(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow (2+b)^2 = b^2 + 36$

$\rightarrow 4 + 4b + b^2 = b^2 + 36$

$4b = 32 \ \rightarrow b = 8$ نعوضها في (1) $\therefore b^2 = 64$

$a = 8 + 2 = 10 \ \rightarrow \ a^2 = 100$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ , \quad \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

(2 /2016)(1 /2006)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد $8y^2 - x^2 = 32$ ويمس دليل القطع المكافىء $y^2 + 16x = 0$

sol :

$8y^2 - x^2 = 32] \div 32$

$\frac{y^2}{4} + \frac{x^2}{32} = 1$

$a^2 = 4 \quad , b^2 = 32$

$c^2 = a^2 + b^2$

$= 4 + 32 = 36$

$\to c = 6$

∴ بؤرتاه القطع الزائد $(0, 6)$, $(0, -6)$ وهما بؤرتا القطع الناقص

$c = 6 \quad \therefore c^2 = 36$

∴ المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$c = 6 \quad \to c^2 = 36$

من معادلة القطع المكافىء $y^2 = -16x$

$y^2 = -4px$

$\to -4p = -16 \quad \to p = 4$

معادلة الدليل $x = 4$

القطع الناقص يمس الدليل بالنقطة $(4, 0)$ وهي تمثل احد قطبي القطع الناقص ∴

$b = 4 \to \quad b^2 = 16$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to 36 = a^2 - 16 \to a^2 = 52$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{52} = 1$

---

1 /2007

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبعد بين بؤرتيه 8 وحدات وراساه هما بؤرتي القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

sol :

في القطع الزائد $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$\to a^2 = 16 \; , b^2 = 9$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\to c^2 = 25 \to c = 5$

بؤرتي القطع الزائد وهما رأسي القطع الناقص $(\pm 5, 0)$

في القطع الناقص $\to \; a = 5$

$2c = 8 \quad \to c = 4 \quad , \therefore c^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\to 25 = b^2 + 16 \quad \to b^2 = 9$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

---

1 /2008

س/ قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = k$ والبعد بين بؤرتيه $2\sqrt{3}$ وحدة طول جد قيمة k

sol :

$2c = 2\sqrt{3} \quad \to c = \sqrt{3} \quad \therefore c^2 = 3$

$[4x^2 + 2x^2 = k] \div k$

$\to \frac{x^2}{\frac{k}{4}} + \frac{y^2}{\frac{k}{2}} = 1$

$\to a^2 = \frac{k}{2} \; , b^2 = \frac{k}{4}$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\to \left[\frac{k}{2} = \frac{k}{4} + 3\right] . 4$

$\to 2k = k + 12 \quad \to k = 12$

2010/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 = -8x$ وطول محوره الكبير يساوي ثلاثة امثال طول محوره الصغير.

sol :

$y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$

$\to 4p = 8$

$\to p = 2 \quad \to (-2, 0)$ بؤرة القطع المكافىء

بؤرة القطع الناقص $(\pm 2, 0)$ $\to c = 2 \in$ محور السينات

$2a = 3(2b)$

$\to a = 3b \ldots\ldots\ldots (1)$

$a^2 = b^2 + c^2 \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم (1) في (2)

$9b^2 = b^2 + 4$

$\to 8b^2 = 4$

$\to b^2 = \frac{1}{2}$

$\to b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ نعوضها في (1)

$\to a = \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \therefore a^2 = \frac{9}{2}$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{\frac{9}{2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$

$\to \frac{2x^2}{9} + \frac{2y^2}{1} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

1 /2010

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركز نقطة الاصل ومحوره على المحورين الاحداثين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 - 16x = 0$ ومساحة منطقة القطع الناقص تساوي 20π وحدة مساحة.

sol :

$y^2 = 16x$

$y^2 = 4px$

$\rightarrow 4p = 16 \ \rightarrow p = 4 \ \rightarrow (4,0)$ بؤرة القطع المكافىء

$(4,0)\epsilon$ القطع الناقص

$\rightarrow either\ a = 4 \ \ OR \ \ b = 4$

$ab\pi = 20\pi$

$\rightarrow ab = 20$

$if \ \ a = 4 \ \ \rightarrow 4b = 20 \ \ \rightarrow b = 5$ تهمل

$if \ \ b = 4 \ \ \rightarrow 4a = 20 \ \ \rightarrow a = 5$

بما ان القطب يقع على محور السينات فان البؤرتين والرأسين على محور الصادات

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

---

2 /2010

س/ اذا كانت $ky^2 + 3x^2 = z$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع المحور الصادي علما ان مساحة منطقته $2\sqrt{3}\pi$ وحدة مساحة جد قيمتي k , z

sol :

$if\ x = 0 \ \rightarrow y = \sqrt{3} \ \rightarrow (0, \sqrt{3}) \ \in$ للقطع

$b = \sqrt{3}$ لان البؤرة تقع على محور السينات $\therefore \ b^2 = 3$

$2\sqrt{3}\,\pi = ab\pi$

$\rightarrow 2\sqrt{3}\,\pi = \sqrt{3}\,a\,\pi$

$\rightarrow a = 2$

$[ky^2 + 3x^2 = z] \div z$

$\rightarrow \frac{y^2}{\frac{z}{k}} + \frac{x^2}{\frac{z}{3}} = 1$

$\rightarrow a^2 = \frac{z}{3}$

$b^2 = \frac{z}{k}$

$4 = \frac{z}{3}$

$\rightarrow z = 12 \ \ , 3 = \frac{z}{k}$

$\rightarrow 3 = \frac{12}{k} \ \ \rightarrow k = 4$

(2/2011)(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2018/ 1)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزة نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة

sol :

مساحة القطع الناقص $A = a\,b\pi = 7\pi \ \ \rightarrow ab = 7$

$\rightarrow a = \frac{7}{b} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

محيط القطع الناقص $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$\rightarrow 5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ بالتربيع $\rightarrow 25 = \frac{a^2+b^2}{2}$

$a^2 + b^2 = 50 \ldots\ldots\ldots (2)$

$\frac{49}{b^2} + b^2 = 50 \ ].\, b^4$

$\rightarrow 49 + b^4 = 50b^2$

$\rightarrow b^4 - 50b^2 + 49 = 0$

$(b^2 - 49)(b^2 - 1) = 0$

اما $b^2 = 49 \ \rightarrow b = 7$ نعوضها في(1)

$\rightarrow a = \frac{7}{7} = 1$ يهمل لان $a > b$

او $b^2 = 1 \ \rightarrow b = 1 \ \ \rightarrow a = 7$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$ معادلة القطع الناقص

(2012/ 1 اسئلة خارج القطر)(2018/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ قطع ناقص راساه $(\pm 5, 0)$ واحدى بؤرتيه بؤره القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والمار دليله بالنقطة(-3,4) جد معادلة القطعين المكافئ والناقص

sol :

بما ان رأسي القطع الناقص يقعان على محور السينات فان بؤرتيه يقعان على محور السينات ايضا أي ان بؤرة القطع المكافئ تقع على محور السينات كذلك.

ولأن دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة (-3,4) فإن معادلة الدليل x=-3

بؤرة القطع المكافئ F(3,0)

$\rightarrow p = 3\,, y^2 = 4px$

$\rightarrow y^2 = 12x$ معادلة القطع المكافئ

$(\pm 3, 0)$ بؤرتي القطع الناقص $\rightarrow c = 3 \ \ \therefore c^2 = 9$

$(\pm 5, 0)$ رأسي القطع الناقص $\rightarrow a = 5 \ \ \therefore a^2 = 25$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow \ 25 = b^2 + 9$

$\rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

2013/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي تقع بؤرتاه على محور السينات ومركزة نقطة الاصل والنسبة بين طولي محورية كنسبة 1:2 ويقطع القطع المكافىء $y^2 = 8x$ عند $x = 2$

sol :

في القطع المكافىء $y^2 = 8x$ عند $x = 2$ فان

$y^2 = 16 \rightarrow y = \pm 4 \rightarrow (2,4), (2,-4) \in$ للقطع

$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} 2a = 2(2b)$

$\rightarrow 2a = 4b \rightarrow a = 2b \ldots\ldots\ldots (1)$ في القطع الناقص

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{4}{(2b)^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{4}{4b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\rightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{17}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 17$

$\rightarrow b = \sqrt{17}$ نعوضها في (1)

$\rightarrow a = 2\sqrt{17} \rightarrow a^2 = 68$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{68} + \frac{y^2}{17} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

(2014/ 4 "اسئلة النازحين "الانبار")

س/ اذا كان $e + id = \frac{4+2i}{1-i}$ جد معادلة القطع الناقص الذي راسه نقطة الاصل واحدى بؤرتية $(0,d)$ وطول محوره الكبير يساوي $2 \parallel e + id \parallel$

sol :

$e + id = \frac{4+2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$

$= \frac{4 + 4i + 2i + 2i^2}{1+1} = \frac{2+6i}{2} \quad 1 + 3i$

$\rightarrow e = 1, \quad d = 3$

$2 \parallel e + id \parallel = 2 \parallel 1 + 3i \parallel = 2\sqrt{1+9} = 2\sqrt{10}$

بما ان بؤرة القطع الناقص هي $(0,d)$ $\therefore$

$\therefore (0,d) = (0,3) \in$ لمحور الصادات

$c = 3 \rightarrow c^2 = 9$

$2a = 2 \parallel d + ie \parallel$

$\rightarrow 2a = 2\sqrt{10}$

$\rightarrow a = \sqrt{10} \rightarrow a^2 = 10$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\rightarrow b^2 = 10 - 9 \rightarrow b^2 = 1$

$\frac{y^2}{10} + \frac{x^2}{1} = 1$ المعادلة

2014/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزة نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي 8 وحدات

sol :

$y^2 = 12x \;, y^2 = 4px \rightarrow 4p = 12 \rightarrow p = 3$

بؤرة القطع المكافىء $(3,0)$ $\therefore$ **بؤرتي القطع الناقص** $(\pm 3, 0)$

$\rightarrow c = 3$ في القطع الناقص $\rightarrow c^2 = 9$

$2b = 8 \rightarrow b = 4 \rightarrow b^2 = 16$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow a^2 = 16 + 9 = 25$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

2014/ 1

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1F_2\ (\pm 4, 0)$ والنقطة P تنتمي اليه بحيث ان المثلث PF_1F_2 محيطه يساوي 24 وحدة طول.

$sol: (4,0), (c,0) \rightarrow c = 4 \rightarrow c^2 = 16$

محيط المثلث =24

$PF_1 + PF_2 + F_1F_2 = 24$

$2a + 2c = 24] \div 2$

$a + c = 12$

$\rightarrow a + 4 = 12$

$\rightarrow a = 8 \rightarrow 4^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$16 = 64 - b^2$

$\rightarrow b^2 = 48$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$ **معادلة القطع الناقص**

(2014/ 1 "اسئلة النازحين")(2015/ 2 "اسئلة النازحين")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1 , 5 وحدة على الترتيب وبؤرتاه تقعان على محور الصادات ومركزة نقطة الاصل.

Sol: $2a = 1 + 5 = 6$

$a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

$2c = 5 - 1 \rightarrow 2c = 4 \rightarrow c = 2$

$b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ **البؤرتان تنتميان لمحور الصادات**

فالمعادلة هي :

$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ **المعادلة المطلوبة**

2016 /1 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6,2),(4,3)$.

sol :

البؤرتان تنتميان لمحور السينات

$\therefore$ المعادلة هي : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

$(4,3)$ تمر بالقطع $\therefore$ تحقق معادلته .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{16}{a^2}+\frac{9}{b^2}=1 \quad \times 4$$
$$\therefore \frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$(6,2)$ تمر بالقطع $\therefore$ تحقق معادلته .

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \quad \times 9$$
$$\therefore \frac{324}{a^2}+\frac{36}{b^2}=9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$
$$\frac{64}{a^2}+\frac{36}{b^2}=4 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

بالطرح $\mp\frac{324}{a^2}\mp\frac{36}{b^2}=\mp 9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$$\frac{-260}{a^2}=5 \quad \to \quad -5a^2=-260 \quad \to a^2=52$$

نعوض في المعادلة رقم (1)

$$\frac{16}{52}+\frac{9}{b^2}=1 \quad \to \frac{9}{b^2}=1-\frac{16}{52}=\frac{52-16}{52}=\frac{36}{52}$$
$$\frac{9}{b^2}=\frac{36}{52} \quad =\frac{1}{b^2}=\frac{1}{13} \quad \to b^2=13$$

$\dfrac{x^2}{52}+\dfrac{y^2}{13}=1$ معادلة القطع الناقص

2016 /2 (اسئلة خارج القطر)

س/ يدور القمر حول الارض في مدار على صورة قطع ناقص سيني البؤرتين.تقع الارض في احدى بؤرتيه فاذا كانت اطول مسافة بين الارض والقمر 90Km واقصر مسافة بينهما 10 km جد الاختلاف المركزي للقطع .

sol :

اطول مسافة بين الارض (البؤرة) والقمر (الرأس) =90

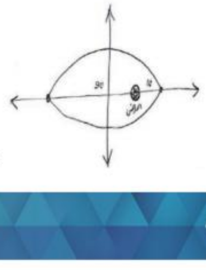
اقصر مسافة بين الارض (البؤرة) والقمر (الرأس) =10

اي ان طول المحور الكبير $2a=100=90+10=$

البعد بين البؤرتين $2c=80=90-10=$

$\therefore a=50 \quad ,c=40$

الاختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{40}{50}=\frac{4}{5}<1$



ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب لا تخصم منه درجات

2016 /2 (اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm5,0)$ والنقطة Q تنتمي اليه بحيث ان المثلث QF_1F_2 محيطه يساوي 30 وحدة طول.

sol :

$(5,0),(c,0) \quad \to c=5 \quad \to c^2=25$

محيط المثلث =30

$$QF_1+QF_2+F_1F_2=30$$
$$2a+2c=30] \div 2$$
$$a+c=15$$
$$\to a+5=15$$
$$\to a=10 \quad \to a^2=100$$
$$c^2=a^2-b^2$$
$$25=100-b^2$$
$$\to b^2=75$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{75}=1$ معادلة القطع الناقص

2016/ 3

س/ لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرتي القطع المكافىء الذي معادلته $y^2=4\sqrt{3}\,x$. جد قيمة (k)

sol :

$$[\,kx^2+4y^2=36\,] \div 36$$
$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}}+\frac{y^2}{9}=1$$

$y^2=4\sqrt{3}\,x$ من معادلة القطع المكافىء

$$y^2=4px$$
$$\to 4p=4\sqrt{3}$$
$$\to p=\sqrt{3}$$

بؤرة القطع المكافىء$(\sqrt{3},0)$ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$$c=\sqrt{3} \quad \to c^2=3$$
$$a^2=\frac{36}{k} \quad , \quad b^2=9 \quad , \quad c^2=3$$
$$a^2=b^2+c^2$$
$$\to \frac{36}{k}=9+3$$
$$\to 12k=36$$
$$\to k=3$$

2017 /1

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي طول محوره الكبير يساوي 12cm وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافىء $x^2 - 12y = 0$ بطريقة التعريف

sol :

$2a = 12$ العدد الثابت

$x^2 = 12y$ من معادلة القطع المكافىء

$4p = 12 \quad \to p = 3$

$\therefore$ $(0,3)$بؤرة القطع المكافىء وهي احدى بؤرتي القطع الناقص

$F_1(0,3), F_2(0,-3)$ بؤرتا القطع الناقص هما

ليكن (x,y) تنتمي للقطع الناقص

من تعريف القطع الناقص

$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$ (تعريف القطع الناقص)

$\sqrt{(x-0)^2+(y-3)^2} + \sqrt{(x-0)^2+(y+3)^2} = 12$

$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = 12 - \sqrt{x^2+(y+3)^2}$ بتربيع الطرفين

$x^2+y^2-6y+9 = 144 - 24\sqrt{x^2+(y+3)^2} + x^2+y^2+6y+9$

$[24\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 144 + 12y] \div 12$

$2\sqrt{x^2+(y+3)^2} = 12 + y$ بتربيع الطرفين

$4(x^2+y^2+6y+9) = 144 + 24y + y^2$

$4x^2 + 4y^2 + 24y + 36 = 144 + 24y + y^2$

$[4x^2 + 3y^2 = 108] \div 108$

$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$ معادلة القطع الناقص

2017/ 1" اسئلة الموصل"

س/ قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وإحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافىء $y^2 + 4\sqrt{5}x = 0$ ومجموع مربعي طولي محوريه (52) وحده طول, جد معادلته.

sol :

$y^2 = -4\sqrt{5}\,x$

$y^2 = -4p\,x$

$4p = 4\sqrt{5} \to p = \sqrt{5}$

هي بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الناقص $(-\sqrt{5},0)$ $\therefore$

$\therefore c = \sqrt{5} \quad \to c^2 = 5$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 52$

$\to [4a^2 + 4b^2 = 52] \div 4$

$a^2 + b^2 = 13$

$\to a^2 = 13 - b^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to 5 = 13 - b^2 - b^2$

$2b^2 = 13 - 5$

$\to 2b^2 = 8 \quad \to b^2 = 4$ نعوض في (1)

$a^2 = 13 - 4 \quad \to a^2 = 9$

$\frac{x^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$

2017/ 2"اسئلة خارج القطر")(2019/ تمهيدي)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 - 24y = 0$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

sol :

$x^2 - 24y = 0$

$x^2 = 24y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$4p = 24 \quad \Rightarrow p = 6$

$\Rightarrow F(0,6)$ بؤرة القطع المكافئ

$\therefore F_1(0,6)\ ,\ F_2(0,-6)$ بؤرتا القطع الناقص

$\therefore c = 6 \quad , \quad (2a + 2b = 36) \div 2$

$a + b = 18$

$\Rightarrow a = 18 - b \ldots\ldots\ldots(1)$

$a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow (18-b)^2 = b^2 + 36$

$324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$

$\Rightarrow 36b = 288 \quad \Rightarrow b = \frac{288}{36} = 8$ نعوض في (1)

$\therefore a = 18 - b = 18 - 8 = 10$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

3 /2017

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي احدى بؤرتيه نقطة انقلاب الدالة $f(x) = (x+2)(x-1)^2$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة طول.

sol :

$f(x) = (x+2)(x-1)^2$

$(x+2)(x^2-2x+1)$

$x^3-2x^2+x+2x^2-4x+2$

$f(x) = x^3-3x+2$

$f'(x) = 3x^2-3$

$f''(x) = 6x$

$6x = 0$

$\to x = 0 \ , y = 2 \quad (0,2)$ نقطة انقلاب

$\to c = 2$ للناقص $\to c^2 = 4$

$2a = 12 \quad \to a = 6 \quad \to a^2 = 36$

$c^2 = a^2 - b^2$

$4 = 36 - b^2$

$\to b^2 = 32$

$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{36} = 1$ المعادلة

ملاحظة: الحل اعلاه على انه المركز هو نقطة الاصل

---

3 /2018

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $(0,6)$ ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = -12x$

sol :

احدى بؤرتيه$(0,6)$

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2} = 1$

$\therefore c = 6 \quad \to c^2 = 36$

$y^2 = -12x$

$y^2 = -4px$

$4p = 12 \quad \to p = 3$

$\therefore x = 3$ معادلة الدليل

القطع الناقص يمس دليل القطع المكافيء بالنقطة $(3,0)$

وهي تمثل احد القطبين

$\therefore b = 3 \quad \to b^2 = 9$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\to 36 = a^2 - 9$

$\to a^2 = 36 + 9 = 45$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{45} = 1$ المعادلة

2 /2018

س/ اذا كان $\frac{11+2i}{1+2i} = d+ie$ جد معادلة القطع الناقص الذي راسه نقطة الاصل واحدى بؤرتية$(0,e)$وطول محوره الكبير $2 \parallel d+ie \parallel$

sol :

$\frac{11+2i}{1+2i} = d+ie$

$\frac{11+2i}{1+2}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = d+ie$

$\frac{11-22i+2i+4}{1+4} = d+ie$

$\to \frac{15-20i}{5} = d+ie$

$3-4i = d+ie$

$\to d = 3 \ , e = -4$

بما ان بؤرة القطع الناقص هي $(0,e)$ $\therefore$

$\therefore (0,e) = (0,-4) \in$ لمحور الصادات

$c = -4 \quad \to c^2 = 16$

$2a = 2 \parallel d+ie \parallel \to a = 5 \quad \to a^2 = 25$

$b^2 = a^2 - c^2$

$\to b^2 = 25-16 \quad \to b^2 = 9$

$\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9} = 1$ المعادلة

(1/2019)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2)

sol :

$\because$ البؤرتان تنتمي لمحور السينات

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$

$2a = 2(2b) \Rightarrow a^2 = 4b^2$

نعوض $x = -2$ في معادلة القطع المكافئ

$y^2+8x = 0$

$y^2+8(-2) = 0$

$\Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow y = \mp 4$

$\therefore$ نقاط التقاطع بين القطع الناقص والمكافئ

$(-2,4) \quad , \quad (-2,-4)$

نعوض $(-2,4)$, $a^2 = 4b^2$ في المعادلة القياسية للقطع الناقص

$\frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2} = 1$

$\frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{17}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow b^2 = 17$

$a^2 = 4(17)$

$\Rightarrow \quad 68 = a^2$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17} = 1$

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س / اذا كان $x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204 = 0$ معادلة قطع ناقص , جد مساحته ومحيطه واختلافه المركزي

sol :

$x^2 + 25y^2 + 4x - 150y + 204$

$x^2 + 4x + 25y^2 - 150y = -204$

$x^2 + 4x + 4 + 24(y^2 - 6y + 9) = -204 + 4 + 225$

$(x+2)^2 + 25(y-3)^2 = 25$

بقسمة الطرفين على 25

$\frac{(x+2)^2}{25} + (y-3)^2 = 1$

$a = 25 \rightarrow a = \pm 5$

$b^2 = 1 \rightarrow b = \pm 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 1$

$c^2 = 24$

$c = \mp 2\sqrt{6}$

$e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$A = \pi ab$

$A = \pi (5)(1) = 5\pi$ وحدة تربيعية

$p = 2\pi \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

$= 2\pi \sqrt{\frac{25+1}{2}}$

$= \pi \sqrt{\frac{4^2\,(26)}{2}}$

$= \pi \sqrt{52}$ وحدة طول

(1/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والبعد بين بؤرتيه يكون مساويا للبعد بين بؤرة القطع المكافئ $y^2 + 24 = 0$ ومعادلة دليله علما ان مساحة القطع الناقص يساوي $80\,\pi$

sol :

$y^2 + 24x = 0$

$y^2 = -24x$

$y^2 = 4px \quad \rightarrow -4p = -24$

$\therefore p = \frac{-24}{-4} = 6 \quad \Rightarrow \quad F(-6\ ,0)$ للمكافئ

$\therefore$ بؤرتي القطع الناقص

$(-6,\ 0)\ ,\ (6,0) \qquad \therefore \Rightarrow C = 6 \quad \Rightarrow C^2 = 36$

$\because ab\,\pi = 80\,\pi \quad \rightarrow \quad a = \frac{80}{b}$ ……………… (1)

$\because \ C^2 = a^2 - b^2$

$36 = \left(\frac{80}{b}\right)^2 - b^2$

$\left[36 = \frac{6400}{b^2} - b^2\right].b^2$

$36b^2 = 6400 - b^4$

$\Rightarrow \ b^4 + 36b^2 - 6400 = 0$

$(b^2 + 100)(b^2 - 64) = 0$

اما $b^2 + 100 = 0 \quad \Rightarrow \ b^2 = -100$ يهمل

او $b^2 = 64 \qquad \rightarrow \quad b = 8 \quad (1)$ نعوضها في

$\therefore a = \frac{80}{8} = 10 \quad \rightarrow a^2 = 100$

$\therefore$ معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

(3/2019)

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ويمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + 3y = 12$ مع محور السينات ومساحته 24π وحدة مساحة .

sol :

$2x + 3y = 12 \quad , y = 0$

$2x = 12 \Rightarrow x = 6 \quad (6,0)$

أما $(6,0) = (a,0) \Rightarrow a = 6$

أو $(6,0) = (b,0) \Rightarrow b = 6$

$A = ab\pi$

$24\pi = ab\,\pi \Rightarrow ab = 24$

1) عندما $a = 6 \quad , \quad b = 4$

$\therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

2) وعندما $b = 6 \quad a = 4$

$a > b$ لأن يهمل $a = 4$

2020/تمهيدي "تطبيقي"

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 - 12x = 0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات

sol :

$y^2 - 12x = 0$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$ بالمقارنة

$4p = 12$

$p = 3$

$F\ (3\ ,0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتين القطع الناقص

$\therefore c = 3$

$2b = 10 \quad \rightarrow \quad b = 5$

$c^2 = a^2 - b^2$

$9 = a^2 - 25 \quad \rightarrow \quad a^2 = 9 + 25 \quad \rightarrow \quad a^2 = 34$

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 = 12x$ وطول محوره الصغير (10) وحدات

sol :

في المكافئ $y^2 = 12x$

$\because y^2 = 4px$ القياسية

$\therefore 4p = 12 \quad \Rightarrow \quad p = 3 \quad \Rightarrow \quad F(3,0)$

في الناقص : احدى بؤرتيه $(3,0)$

$\therefore C = 3 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 9$

$\because 2b = 10 \quad \div 2 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

$\Rightarrow b^2 = 25$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 9$

$\therefore a^2 = 34$

$\because \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ القياسية

$\therefore \frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة ق ن

2020/تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءا طوله (12) وحدة ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته

sol :

$\because$ المقطع الصادي اكبر من المقطع السيني

$\therefore \quad 2a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$2b = 8 \Rightarrow \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16$

والبؤرتان صاديتان

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$ فالمعادلة

$\because \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 36 - 16$

$\therefore c^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad c = 2\sqrt{5}$

$2c = 4\sqrt{5}\ \ unit$ المسافة بين البؤرتين

$A = ab\pi$

$A = \pi\,(6) * (4)$

$A = 24\,\pi\ \ unit^2$

1/2020

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

sol :

نجد نقاط التقاطع مع محور الصادات نجعل $x=0$

$y^2=16$

$y=\pm 4$

$\therefore$ نقاط التقاطع مع محور الصادات هي $(0,4),(0,-4)$ وهما بؤرتا القطع الناقص

$c=4 \quad \Rightarrow c^2=16$

$y^2=12x$

$y^2=4px$

$4p=12 \Rightarrow p=3$

معادلة الدليل $x=-3$

نقطة تماس القطع الناقص مع الدليل هي $(-3,0)$ وهي تمثل القطب

$b=3 \quad \Rightarrow \quad b^2=9$

$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad 16=a^2-9 \quad \Rightarrow a^2=25$

$\because$ البؤرتان على محور الصادات

$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

2/2020"تطبيقي"

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2-16x^2=144$ ، ويقطع من محور السينات (12) وحدة.

sol :

$9y^2-16x^2=144\,]\div 144$ **من معادلة القطع الزائد**

$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1 \quad ,a^2=16 \quad ,b^2=9$

$c^2=a^2+b^2=16+9=25 \Rightarrow \therefore c=5$

$(0,-5),(0,5)$ **بؤرتي القطع الزائد**

if a = 5

$2b=12 \Rightarrow b=6$

$b>a$ **وهذا لا يمكن**

$\therefore b=5$

$2a=12 \Rightarrow a=6$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ معادلة القطع الناقص

1/2020"تطبيقي"

س/ جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل ، اذا علمت ان الاختلاف المركزي له يساوي $\left(\frac{1}{2}\right)$ وطول محوره الصغير يساوي (12) وحدة طول

sol :

$2b=12 \Rightarrow b=6 \quad \Rightarrow \quad b^2=36$

$e=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad a=2c \quad \Rightarrow a^2=4c^2$

$\because a^2=b^2+c^2$

$4c^2=36+c^2$

$3c^2=36 \quad \Rightarrow \quad c^2=12$

$\therefore a^2=4(12) \quad \therefore a^2=48$

الاحتمال الاول البؤرتان على محور السينات

$\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$

الاحتمال الثاني البؤرتان على محور الصادات

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{48}=1$

1/2020"تطبيقي"

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه يساوي $\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل.

sol :

من معادلة القطع الزائد

$x^2-3y^2=12]\div 12$

$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \quad \Rightarrow \quad a^2=12 \;, b^2=4$

$c^2=a^2+b^2=12+4=16$

$\therefore \quad c=4$

بؤرتي القطع الزائد $(4,0)$, $(-4,0)$ وهما بؤرتا القطع الناقص

$\therefore c=4$ ق . ن

$\frac{\cancel{2}a}{\cancel{2}b}=\frac{5}{3} \quad \rightarrow \quad 5b=3a \quad \Rightarrow b=\frac{3a}{5} \qquad \dots\dots\dots \quad (1)$

$c^2=a^2-b^2 \quad \Rightarrow \quad 16=a^2-\frac{9a^2}{25}\,]*25$

$400=25a^2-9a^2 \quad \Rightarrow \quad 16a^2=400$

$a^2=\frac{400}{16}=25 \quad \rightarrow \quad a=5$ نعوض a في (1)

$b=\frac{3(5)}{5}=\frac{15}{5}=3 \quad \Rightarrow \quad b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

1/2020

س/ قطع ناقص معادلته $kx^2 + hy^2 = 36$ مركزه نقطة الاصل مجموع مربعي طولي محوريه يساوي (52) احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ والذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{5}x$ جد $K, h \in R$

sol :

$$Kx^2 + hy^2 = 36 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{36}{K}} + \frac{y^2}{\frac{36}{h}} = 1$$

$y^2 = 4\sqrt{5}x$ المكافئ

$y^2 = 4px \Rightarrow 4p = 4\sqrt{5} \Rightarrow p = \sqrt{5}$

$F_{\text{ناقص}}(5,0) = F_{\text{ناقص}}(c, 0)$

$\therefore c = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 5 \quad \dots\dots\dots (1)$

$(2a)^2 + (2b)^2 = 52 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 = 52$

$a^2 + b^2 = 13 \quad \dots\dots\dots (2)$

$a^2 - b^2 = 5 \quad \dots\dots\dots (1)$

$2a^2 = 18 \Rightarrow a^2 = 9$

$b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 5 \Rightarrow b^2 = 4$

المعادلة $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{K}} + \frac{y^2}{\frac{36}{h}} = 1$$

$\frac{36}{K} = 9 \Rightarrow 9K = 36 \Rightarrow K = \frac{36}{9} \Rightarrow K = 4$

$\frac{36}{h} = 4 \Rightarrow 4h = 36 \Rightarrow h = 9$

3/2020

س/ جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءا طوله (8) وحدات ، ومن محور الصادات جزءا طوله (12) وحدة ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته .

sol :

يقطع من محور السينات (8)
ويقطع من محور الصادات (12)

$2a = 12 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow a^2 = 36$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow b^2 = 16$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} = 1$

$c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 36 - 16 \Rightarrow c^2 = 20 \Rightarrow c = \sqrt{20} \Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

$2c = 4\sqrt{5}$ المسافة بين البؤرتين $\therefore$

$A = ab\pi$
$= 4(6)\pi$
$= 24\,\pi$

3- الاسئلة الوزارية حول" القطع الزائد"

(1997/ 1)(2013/ 2)(2014/ 1)(2016/ 1 خارج القطر)

س/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1,2\sqrt{5}), (1,-2\sqrt{5})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .

sol :

$2a = 6 \quad \to a = 3$

بما إن النقطتين $(1,2\sqrt{5})$, $(1,-2\sqrt{5})$ متناظرتان حول محور السينات

البؤرة تنتمي لمحور السينات. ∴ المعادلة هي $y^2 = 4px$

نعوض إحدى النقطتين . مثلا نعوض النقطة $(1,2\sqrt{5})$ في المعادلة $y^2 = 4px$

$(2\sqrt{5})^2 = 4p$.............. (1)

$\to 20 = 4p \quad \to \quad p = 5$

بؤرة القطع المكافئ = وهي احدى بؤرتي القطع الزائد $F(5,0)$

$\therefore y^2 = 4px$

$\to y^2 = 4(5)x$

$\to y^2 = 20x$ معادلة القطع المكافئ

بؤرتا القطع الزائد هما $F_1(5,0)\ ,\ F_2(-5,0)$

$c = 5 \quad , \quad a = 3$

$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الزائد المطلوبة

1997/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ واحد رأسية بؤرة القطع المكافئ $x^2 + 8y = 0$.

sol :

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\to a^2 = 36 \quad , \quad b^2 = 20$

$\to c^2 = a^2 - b^2$

$= 36 - 20 = 16 \quad \to c = 4$

$F_1(0,4), F_2(0,-4)$ بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد) $c = 4$

$x^2 + 8y = 0$

$\to \quad x^2 = -8y$

$x^2 = -4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\to \quad -4p = -8$

$\to \quad p = 2$

في القطع الزائد $a = 2 \to$ بؤرة القطع المكافئ وهي احد رأسي القطع الزائد $(0,-2)$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\to 16 = 4 + b^2$

$\to b^2 = 12$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/1998)(2/2012)(2/2015 اسئلة خارج القطر)(3/2016 اسئلة خارج القطر)(1/2017)(1/2017 اسئلة خارج القطر)

س/ قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $h x^2 - k y^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9 x^2 + 16 y^2 = 576$ جد قيمتي كل من h , k التي تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ؟

sol :

$[\ h x^2 - k y^2 = 90\ ] \div 90$

$$\frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1 \text{ ————(1)}$$

$2a = 6\sqrt{2} \quad \to \quad a = 3\sqrt{2}$ للقطع الزائد

$[\ 9x^2 + 16y^2 = 576\ ] \div 576$

$$\to \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2 = 64 \ , \ b^2 = 36$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{64-36} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

بؤرتا القطع الناقص هما $F_1(2\sqrt{7}, 0)\ , F_2(-2\sqrt{7}, 0)$ وهما بؤرتا القطع الزائد

$c = 2\sqrt{7}$ للقطع الزائد $a = 3\sqrt{2}$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 28 - 18 = 10$

معادلة القطع الزائد هي :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\to \frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1 \text{ ————(2)}$$

بمقارنة المعادلة رقم (2) مع المعادلة رقم (1) ينتج :

$\frac{90}{h} = 18$

$\to h = \frac{90}{18} = 5 \quad \to h = 5$

$\frac{90}{k} = 10$

$\to k = \frac{90}{10} = 9 \quad \to k = 9$

(1999/ 1)(2010/ تمهيدي)(2018/ 2"اسئلة خارج القطر")

س/ النقطة $p(6, L)$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ومعادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ جد كلا من :
(أ) قيمة L (ب) طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p .

sol :

$x^2 - 3y^2 = 12$

نعوض النقطة $p(6, L)$ لانها تنتمي إلى القطع الزائد تحقق معادلته

$36 - 3L^2 = 12 \quad \to \quad 3L^2 = 24 \quad \to L^2 = 8$

$\to L = \pm 2\sqrt{2}$

$p = (6, \pm 2\sqrt{2})$

$[\ x^2 - 3y^2 = 12\ ] \div 12$ نجد بؤرتي القطع الزائد

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad a^2 = 12 \ , \ b^2 = 4$$

$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \quad \to \quad c = 4$

$F_1(4, 0)\ , F_2(-4, 0)$ $\therefore$ البؤرتان

$p = (6, \pm 2\sqrt{2})$ النقطة

$$\overline{PF_1} = \sqrt{(6-4)^2 + (\pm 2\sqrt{2} - 0)^2} = \sqrt{4+8} = \sqrt{12}$$

$= 2\sqrt{3}$ وحدة طول

طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p .

(2001/ 1)(2016/ 3)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{1}{2}$

sol :

$3x^2 + 5y^2 = 120 \quad \to \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1$

$\to a^2 = 40 \ , \ b^2 = 24$

$\to a^2 = b^2 + c^2 \quad \to 40 = 24 + c^2$

$\to c^2 = 16 \quad \to c = 4$

$F_1(4, 0), F_2(-4, 0)$ بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد)

$\therefore c^2 = 16$ في القطع الزائد $c = 4$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2}$

$\to 2c = 4a \quad \to c = 2a$

$\to 4 = 2a \quad \to a = 2 \quad \therefore a^2 = 4$

$c^2 = a^2 + b^2$

$\to 16 = 4 + b^2 \quad \to b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/2001)(2009/ تمهيدي)(2014/ 2)(2015/ 1)
(2019/ تمهيدي"تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

sol :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow a^2=25 \quad , \quad b^2=9$

$\rightarrow c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد) $F_1(0,4), F_2(0,-4)$

$c=4$

$x^2+12y=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-12y$

$x^2=-4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\rightarrow -4p=-12 \quad \rightarrow p=3$

معادلة الدليل للقطع المكافئ $y=3$ وبؤرته $(0,-3)$

للقطع الزائد $a=3$

$b^2=c^2-a^2$

$=16-9=7$

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

المعادلة المطلوبة : $\rightarrow \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

---

2 /2002

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هم رأسي القطع الناقص $x^2+9y^2=36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

sol :

$[x^2+9y^2=36]\div 36$

$\rightarrow \frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{4}=1 \quad \rightarrow a^2=36 \quad \rightarrow a=6$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 6,0)$

$\rightarrow c=6$ في القطع الزائد $\therefore c^2=36$

$$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$$

$\rightarrow 2c=4a$

$\rightarrow c=2a \quad \rightarrow 6=2a \quad \rightarrow a=3 \quad \therefore a^2=9$

$c^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow 36=9+b^2 \quad \rightarrow b^2=27$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$

---

2 /2001

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بورتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x\,,y^2=-20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي 2 وحدة

sol :

$y^2=20x \;\;, y^2=4px \quad \rightarrow 4p=20 \quad \rightarrow p=5$

$y^2=-20x \;\;, y^2=-4px \quad \rightarrow 4p=20 \quad \rightarrow p=5$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm 5,0)$

$\rightarrow c=5$ في القطع الزائد

اما $2a-2b=2$

$\rightarrow a-b=1$

$\rightarrow a=b+1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2=a^2+b^2 \;\ldots\ldots (2)$ نعوض معادلة رقم(1) في(2)

$25=(1+b)^2+b^2$

$\rightarrow 25=b^2+2b+1+b^2$

$\rightarrow 2b^2+2b-24=0$

$b^2+b-12=0$

$\rightarrow (b+4)(b-3)=0$

$\rightarrow b=3$ نعوض في(1)

$\rightarrow a=3+1=4$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

او $2b-2a=2$

$\rightarrow b-a=1$

$\rightarrow b=a+1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2=a^2+b^2 \;\ldots\ldots (2)$ نعوض معادلة رقم(1) في(2)

$25=(a+1)^2+a^2$

$\rightarrow 25=a^2+2a+1+a^2$

$\rightarrow 2a^2+2a-24=0$

$a^2+a-12=0$

$\rightarrow (a+4)(a-3)=0$

$\rightarrow a=3$ نعوض في(1)

$\rightarrow b=3+1=4$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

---

1 /2004

س/ جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه هما المحورين الاحداثيين واحدى بؤرتيه $(-5,0)$ واحد رأسيه $(3,0)$

sol :

$c=5 \quad ,a=3$ قطع زائد فان القطع المخروطي $c>a \;\because$

$c^2=a^2+b^2 \quad \rightarrow 25=9+b^2$

$\rightarrow b^2=16$

$\therefore \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

(2003/ 2)(2009/ 2)(2019/ تمهيدي)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$ **والنسبة بين البعد بين بؤرتيه وطول محوره المرافق كنسبة** $\frac{5}{4}$

sol :

$\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$

$\to a^2=49 \ , \ b^2=24$

$\to a^2=b^2+c^2 \ \to 49=24+c^2$

$\to c^2=25 \ \to c=5$

بؤرتاه القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\pm5,0)$

$\to a=5$ في القطع الزائد

$\frac{2c}{2b}=\frac{5}{4}$

$\to 4c=5b$

$\to c=\frac{5b}{4}$ ……………… (1)

$c^2=a^2+b^2$ ……………… (2) نعوض معادلة رقم(1)في(2)

$\left[\frac{25b^2}{16}=25+b^2\right].16$

$\to 25b^2=400+16b^2 \ \to b^2=\frac{400}{9}$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{\frac{400}{9}}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2005/ 1)(2008/ 1)(2015/ 4)(اسئلة النازحين)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بورتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2=20x \ , \ y^2=-20x$ **وطول محوره المرافق 8 وحدات**

sol :

$y^2=20x$

$y^2=4px \ \to 4p=20 \ \to p=5$

$y^2=-20x$

$y^2=-4px \ \to 4p=20 \ \to p=5$

بؤرتي القطعين المكافئين وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm5,0)$

$\to c=5$ في القطع الزائد

$2b=8 \ \to b=4$

$c^2=a^2+b^2$

$\to 25=a^2+16 \ \to a^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2004/ 2)(2005/ تمهيدي)(2006/ 2)(2008/ 2)(2014/ 3)

س/ قطعان زائد وناقص احدهما يمر ببؤرتي الاخر جد معادلة القطع الزائد اذا علمت ان معادلة القطع الناقص هي $9x^2+25y^2=225$ **علما ان محوريهما على المحورين الاحداثيين.**

sol :

بما ان احدهما يمر ببؤرتي الاخر فهذا يعني ان بؤرتي القطع الناقص هما راسي القطع الزائد ورأسي القطع الناقص هما بؤرتي القطع الزائد

$[9x^2+25y^2=225]\div225$

$\to \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ في القطع الناقص

$\to a^2=25 \ \to a=5 \ , \ b^2=9 \ \to b=3$

$c^2=a^2-b^2 \ \to c^2=25-9=16 \ \to c=4$

بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(4,0),(-4,0)$

رأسي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(5,0),(-5,0)$

$a=4 \ , c=5$ في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2 \to 25=16+b^2 \ \to b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \quad \frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2007/ تمهيدي)(2017/ 2)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه نقطة تقاطع المستقيم $2x-y=8$ **مع محور السينات وطول محوره التخيلي 4 وحدات**

sol :

$y=0$ اي نقطة تقع على محور السينات يكون فيها

$y=0 \ \to 2x=8 \ \to x=4$

$\to (4,0)$ احدى بؤرتي القطع الزائد $\to c=4$

$2b=4 \ \to b=2$

$c^2=a^2+b^2$

$\to 16=a^2+4 \ \to a^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \quad \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2007/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ **وطول محوره الحقيقي(12) وحدة وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.**

sol :

$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ في القطع الناقص

$\to a^2=100 \ \to a=10$

هما راسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد $(10,0),(-10,0)$

$c=10 \ , 2a=12 \ \to a=6$ في القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2$

$\to 100=36+b^2 \ \to b^2=64$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ **معادلة القطع الزائد**

2005/ 2

س/ عين النقاط على القطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1$ والتي تبعد عن البؤره في الفرع الايمن بمقدار $\frac{1}{\sqrt{3}}$ وحدة

sol :

$a^2=3\ ,b^2=1$

$c^2=a^2+b^2$

$\to c^2=3+1\ \ \to c^2=4\ \ \to c=2$

$F_1(2,0)$ البؤره اليمنى للقطع الزائد , $let\ p(x,y)\in$ القطع الزائد

$\to PF_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ بتربيع الطرفين

$\to\left[x^2-4x+4+y^2=\frac{1}{3}\right].3$

$3x^2-12x+12+3y^2=1$

$\to 3x^2-12x+11+3y^2=0\ \dots\dots\dots\dots(1)$

$\left[\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{1}=1\right].3$

$\to x^2-3y^2=3$

$\to 3y^2=x^2-3\ \dots\dots..(2)$ نعوض معادلة(1) في(2)

$3x^2-12x+11+x^2-3=0$

$\to 4x^2-12x+8=0$

$\to x^2-3x+2=0$

$(x-1)(x-2)=0$

اما $x=1\ \to 3y^2=1-3\ \ \to 3y^2=-2$ يهمل

او $x=2$

$\to 3y^2=4-3$

$\to 3y^2=1\ \ \to y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(2,-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\in$ القطع الزائد

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركز نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) وبؤرتاه تقعان على محور السينات .

sol :

$2a=6\ \ \to a=3$

$\frac{c}{a}=2$

$\to c=2a\ \ \to c=6\ \ \therefore c^2=36$

$c^2=a^2+b^2$

$\to 36=9+b^2\ \ \to b^2=27$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ معادلة القطع الزائد

(2006/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة النازحين)

(2015/ 2 اسئلة النازحين)

س/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والإختلاف المركزي للقطوع الزائدة $16x^2-9y^2=144$

sol :

$(16x^2-9y^2=144)\div 144$

$\Rightarrow\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ وبالمقارنة مع المعادلة القياسية

$a^2=9\ \to\ a=3$

$\to 2a=6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2=16\ \ \to\ \ b=4$

$\to 2b=8$ وحدة طول المحور المرافق

$c^2=a^2+b^2$

$=9+16=25\ \ \ \to c=5$

البؤرتان $F_1(5,0)\ ,\ F_2(-5,0)$

الرأسان $v_1(3,0)\ ,\ v_2(-3,0)$

الإختلاف المركزي $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3}>1$

2008/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنطبق على بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي الى البعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$

sol :

في القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

$\to a^2=25\ ,\ b^2=9$

$\to a^2=b^2+c^2$

$\to 25=9+c^2\ \ \to c^2=16\ \ \to c=4$

بؤرتي القطع الناقص وهما بؤرتي القطع الزائد $(\pm4,0)$

في القطع الزائد $\to c=4$

$\frac{2a}{2c}=\frac{1}{2}$

$\to c=2a$

$\to 4=2a\ \to a=2$

$c^2=a^2+b^2$

$\to 16=4+b^2$

$\to b^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ معادلة القطع الزائد

2013/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي رأساه هما بؤرتي القطع الناقص $9x^2 + 5y^2 = 45$ والمسافة بين بؤرتيه تساوي ضعف طول محوره المرافق.

sol :

$[9x^2 + 5y^2 = 45\,] \div 45$

$\rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$

$\rightarrow a^2 = 9 \quad \rightarrow b^2 = 5$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\rightarrow c^2 = 9 - 5 \quad \rightarrow c^2 = 4$

$(\pm 2, 0)$ بؤرتي القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد

$\rightarrow a = 2$ في القطع الزائد

$2c = 2(2b)$

$\rightarrow c = 2b \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$ نعوض (1) في (2)

$\rightarrow 4b^2 = 4 + b^2$

$\rightarrow 3b^2 = 4$

$\rightarrow b^2 = \frac{4}{3}$

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

2014/ 4 (اسئلة النازحين"الانبار")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm\, 6\,,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm\, 4$ ومركزه نقطة الأصل .

sol :

$(\pm 5, 0) \rightarrow F_1(6, 0)\ ,\ F_2(-6, 0) \qquad \therefore c = 6$

$x = \pm 4$ يتقاطع مع محور السينات عند

$\therefore v_1(4, 0)\ ,\ v_2(-4, 0)$

$\rightarrow \quad a = 4$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 36 - 16 = 20$

$\rightarrow \quad b = \sqrt{20}$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

2015/ تمهيدي

س/ أكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين 9 , 1 وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين .

sol :

$\because$ معادلة القطع هي قطع زائد

$\therefore 2c = 1 + 9 = 10$

$\rightarrow c = 5 \ \rightarrow c^2 = 25$

$2a = 9 - 1 = 8$

$\rightarrow 2a = 8 \ \rightarrow a = 4 \rightarrow a^2 = 16$

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$

هنالك إحتمالين :

1- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور السينات فالمعادلة هي :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور الصادات فالمعادلة هي :

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

2015/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما رأسا القطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ والمار ببؤرتي القطع الناقص نفسه ثم جد مساحة القطع الناقص

sol :

$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ في القطع الناقص

$\rightarrow a^2 = 100 \quad \rightarrow a = 10$

$v_1(10, 0), v_2(-10, 0)$ هما راسا القطع الناقص وهما بؤرتا القطع الزائد

$b^2 = 64 \ \rightarrow b = 8$

$c^2 = a^2 - b^2$

$\rightarrow c^2 = 100 - 64$

$\rightarrow c^2 = 36 \quad \rightarrow c = 6$

$F_1(6, 0), F_2(-6, 0)$ هما بؤرتاه القطع الناقص وهما رأسا القطع الزائد

في القطع الزائد

$c^2 = a^2 + b^2$

$\rightarrow 100 = 36 + b^2$

$\rightarrow b^2 = 100 - 36 \quad \rightarrow b^2 = 64$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

$A = a.b.\pi$

$A = 10.(8).\pi$

$A = 80\,\pi\, u^2$

2 /2015

س/ ليكن $5y^2-4x^2=k$ قطع زائد احدى بؤرتيه بؤره القطع المكافىء $4y-\sqrt{5}x^2=0$ جد قيمة h

sol :

$[5y^2-4x^2=h]\div h$

$\frac{5y^2}{h}-\frac{4x^2}{h}=1$

$\rightarrow \frac{5y^2}{h}-\frac{4x^2}{h}=1$

$\rightarrow \frac{y^2}{\frac{h}{5}}-\frac{x^2}{\frac{h}{4}}=1$

$\rightarrow a^2=\frac{h}{5} \quad , \quad b^2=\frac{h}{4}$

$4y-\sqrt{5}x^2=0$ من معادلة القطع المكافىء

$\sqrt{5}\,x^2=4y$

$x^2=\frac{4}{\sqrt{5}}y$

$x^2=4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية القطع المكافىء

$4p=\frac{4}{\sqrt{5}} \rightarrow p=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left(0,\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ بؤرة القطع المكافىء وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad , c^2=\frac{1}{5}$

$c^2=a^2+b^2$

$\left[\frac{1}{5}=\frac{h}{5}+\frac{h}{4}\right]\ .(20)$

$4=4h+5h \quad \rightarrow 4=9h \quad \rightarrow h=\frac{4}{9}$

---

3 /2015

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $25x^2+9y^2=225$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+8y=0$

sol :

$[25x^2+9y^2=225]\div 225$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \rightarrow a^2=25 \quad , \quad b^2=9$

$\rightarrow c^2=a^2-b^2 \quad \rightarrow 25-9=16 \quad \rightarrow c=4$

$F_1(0,4)\,,\,F_2(0,-4)$

بؤرتا القطع الناقص (وهما بؤرتا القطع الزائد)

$\therefore c=4$

$x^2+8y=0 \qquad \rightarrow \quad x^2=-8y$

$\rightarrow \quad 4p=8 \qquad \rightarrow p=2 \quad \rightarrow y=2$

$\because$ القطع الزائد يمس دليل القطع المكافىء في $(0,2)$

$\therefore$ $(0,2)$ تمثل احدى رأسي القطع الزائد

$a=2 \quad \rightarrow a^2=4$

$c^2=a^2+b^2$

$16=4+b^2 \quad \rightarrow b^2=12$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \ , \quad \frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ **معادلة القطع الزائد**

2016/ تمهيدي

س/ جد معادلة القطع المخروطي الذي رأسه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثين واختلافه المركزي يساوي 3 ويمر بالنقطة (0,2)

sol :

$\because$ الاختلاف المركزي $1 <$

$\therefore$ القطع المخروطي هو قطع زائد

$\because$ القطع يمر بالنقطة $(0,2) \leftarrow \therefore a=2$

او تعويض النقطة في معادلة القطع الزائد القياسية

$e=\frac{c}{a} \quad \rightarrow 3=\frac{c}{2} \quad \rightarrow c=6$

$c^2=c^2+b^2$

$\rightarrow 36=4+b^2$

$\rightarrow b^2=36-4=32$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{32}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2016 /1)(2017 /2 "اسئلة الموصل")

س/ جد معادلة القطع الزائد والناقص اذا كان كل منهما يمر ببؤرة الاخر وكلاهما تقعان على محور السينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول.

sol :

القطع الناقص

$2a=6\sqrt{2} \quad \rightarrow a=3\sqrt{2}$

$V_1(3\sqrt{2},0), V_2(-3\sqrt{2},0)$ رأسا القطع الناقص

$F_1(3\sqrt{2},0), F_2(-3\sqrt{2},0)$ وهما بؤرتي القطع الزائد

$c=3\sqrt{2}$ في القطع الزائد

القطع الزائد

$2a=6 \quad \rightarrow a=3$

$F_1(3,0), F_2(-3,0)$ رأسا القطع الزائد

$V_1(3,0), V_2(-3,0)$ وهما بؤرتي القطع الناقص

$c=3$ في القطع الناقص

$a^2=b^2+c^2$

$\left(3\sqrt{2}\right)^2=b^2+(3)^2$

$\rightarrow 18=b^2+9 \quad \rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$ **معادلة القطع الناقص**

القطع الزائد

$c^2=a^2+b^2$

$(3\sqrt{2})^2=(3)^2+b^2 \quad \rightarrow 18=9+b^2 \quad \rightarrow b^2=9$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{9}=1$ **معادلة القطع الزائد**

(2017/ تمهيدي)(2017/ 1 "اسئلة الموصل")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل إذا علمت أن أحد رأسيه يبعد عن بؤرتيه بالعددين 8 , 2 وحدة على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين

sol :

$\because$ معادلة القطع هي قطع زائد

$\therefore 2c = 8 + 2 = 10 \rightarrow c = 5 \rightarrow c^2 = 25$

$2a = 8 - 2 = 6 \rightarrow a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 25 - 9 = 16$

$\therefore$ هنالك إحتمالين :

1-إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور السينات فالمعادلة هي :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;, \quad \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

2- إذا كانت البؤرتان تنتميان لمحور الصادات فالمعادلة هي :

$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \;, \quad \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

2018/ 1

س/ قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات . وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $(1,2\sqrt{7})$, $(1,-2\sqrt{7})$ جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل .

sol : $2a = 6 \quad a = 3 \rightarrow a^2 = 9$

بما إن القطع المكافىء متناظر حول الجزء الموجب للمحور السيني

المعادلة القياسية للقطع المكافىء هي $y^2 = 4px$

نعوض إحدى النقطتين . مثلا نعوض النقطة $(1 . 2\sqrt{7})$ في المعادلة

$y^2 = 4\,p\,x$

$(2\sqrt{7})^2 = 4\,(1)\,p$

$\rightarrow 28 = 4\,p \quad \rightarrow \quad p = 7$

$F\,(7\,,0)$ بؤرة القطع المكافئ وهي احدى بؤرتي القطع الزائد

$\therefore y^2 = 4\,p\,x$

$\rightarrow y^2 = 28\,x$ **معادلة القطع المكافىء**

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **المعادلة القياسية للقطع الزائد**

$c = 7 \quad \rightarrow c^2 = 49$

$c^2 = b^2 + a^2$

$\rightarrow b^2 = c^2 - a^2$

$= 49 - 9 = 40$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$ **معادلة القطع الزائد المطلوبة**

2017/ 3

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي يمر ببؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$ والنسبة بين طول محوره المرافق و البعد بين بؤرتيه كنسبة $\frac{2}{3}$

***sol*:**

$\frac{x^2}{35} + \frac{y^2}{10} = 1$

$\rightarrow a^2 = 35 \;, \quad b^2 = 10$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 35 = 10 + c^2 \rightarrow c^2 = 25 \rightarrow c = 5$

بؤرتاه القطع الناقص وهما رأسي القطع الزائد $(\pm 5, 0)$

$\rightarrow a = 5$ في القطع الزائد

$\frac{2b}{2c} = \frac{2}{3} \quad \rightarrow 2c = 3b$

$\rightarrow b = \frac{2c}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$c^2 = a^2 + b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض معادلة رقم(1)في(2)

$\left[c^2 = 25 + \frac{4c^2}{9}\right].9$

$\rightarrow 9c^2 = 225 + 4c^2$

$\rightarrow 5c^2 = 225 \quad \rightarrow c^2 = 45$

$b^2 = c^2 - a^2$

$= 45 - 25 = 20$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$ معادلة القطع الزائد

2018/ 2

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزة نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ وأحد رأسية هو بؤرة القطع المكافىء الذي معادلته $y^2 + 8x = 0$

***sol*:**

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$

$\rightarrow a^2 = 36 \;, \quad b^2 = 20$

$\rightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\rightarrow 36 = 20 + c^2 \quad \rightarrow c^2 = 16 \rightarrow c = 4$

اي $(\pm 4, 0)$وهي بؤرتي القطع الزائد

$x^2 = -8x$ **من القطع المكافىء**

$\rightarrow 4p = 8 \quad \rightarrow p = 2$

$(-2, 0), (2, 0)$ الرأسين للقطع الزائد

$\therefore a^2 = 4 \quad \leftarrow a = 2$ اي

$\therefore b^2 = c^2 - a^2$

$\rightarrow b^2 = 16 - 4 \quad \therefore b^2 = 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \;, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ **معادلة القطع الزائد**

2018/ 1 "اسئلة خارج القطر"

س/ النقطة $p\,(h, 2\sqrt{2})$ تنتمي إلى القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 2h$ و مركزه نقطة الأصل جد كلا من :
قيمة h الحقيقية الموجبة , ثم جد طول نصف القطر البؤري الاول والثاني المرسومين من النقطة p .

Sol:

$x^2 - 3y^2 = 2h$

$p\,(h , 2\sqrt{2})$ لانها تنتمي إلى القطع الزائد تحقق معادلته

نعوض النقطة

$h^2 - 3(2\sqrt{2})^2 = 2h$

$h^2 - 24 = 2h$

$h^2 - 2h - 24 = 0$

$(h-6)(h+4) = 0$

اما $h - 6 = 0 \quad \to h = 6$

او $h + 4 = 0 \quad \to h = -4$ يهمل

$x^2 - 3y^2 = 12] \div 12$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \qquad a^2 = 12 \quad , \quad b^2 = 4$

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16 \quad \to \quad c = 4$

$F_1\,(4 , 0)\ , F_2\,(-4 , 0)$ البؤرتان $\therefore$

$p = (6 , 2\sqrt{2})$ النقطة

$\overline{PF_1} = \sqrt{(6-4)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2}$

$= \sqrt{4+8} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ وحدة طول

$\overline{PF2} = \sqrt{(6+4)^2 + (2\sqrt{2}-0)^2} = \sqrt{100+8}$

$= \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$ وحدة طول

2018/ 3

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي احدى بؤرتيه هي نقطة المركز للدائرة $x^2 + y^2 - 16y + 15 = 0$ ونصف طول محوره المرافق يساوي نصف قطر تلك الدائرة.

sol :

$C = (\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2})$

$C = \left(\frac{0}{2}, \frac{16}{2}\right) = (0, 8)$ مركز الدائرة

$\therefore F_1(0,8), F_2(0,-8)$

$r = \sqrt{h^2 + k^2 - C}$

$r = \sqrt{0 + 64 - 15}$

$= \sqrt{49} = 7$

$\therefore b = 7 \quad \to b^2 = 49$

$c^2 = a^2 + b^2$

$64 = a^2 + 49 \quad \to a^2 = 15$

$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$ معادلة القطع الزائد

طريقة ثانية:

$x^2 + y^2 - 16y = -15$

$x^2 + y^2 - 16y + 64 = -15 + 64$

$(x-0)^2 + (y-8)^2 = 49$

بالمقارنة مع المعادلة

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$c = (h,k) \to c(0,8)$

$\therefore F_1(0,8), F_2(0,-8)$

$r^2 = 49 \ \to r = 7$

$\therefore b = 7 \quad \to b^2 = 49$

$c^2 = a^2 + b^2$

$64 = a^2 + 49$

$\to a^2 = 15$

$\frac{y^2}{15} - \frac{x^2}{49} = 1$ معادلة القطع الزائد

(1/2019 اسئلة خارج القطر "تطبيقي")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وأحد بؤرتيه هي بؤرةالقطع المكافئ $y^2+16x=0$ اذا علمت ان القطع الزائد يمر بالنقطة $(6,2\sqrt{2})$

sol :

$y^2+16x=0$

$y^2=-16x \quad \rightarrow$ معادلة على محور السينات من جهة السينات

$y^2=-4px$

$-4p\,x=-16\,x$

$p=4$ قطع مكافئ $\quad F\,(-4\,,0\,)$

$\rightarrow \quad F_1(-4\,,0)$ قطع زائد $\quad F_2(4\,,0\,)$

$a=4 \rightarrow \quad a^2=16$

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$

النقطة $(6\,,2\sqrt{2})$ تحقق المعادلة

$\frac{6^2}{16}-\frac{(2\sqrt{2})^2}{b^2}=1$

$\frac{\cancel{36}^{\,9}}{\cancel{16}_{\,4}}-\frac{12}{b^2}=1 \qquad * 4b^2$

$\frac{4*9b^2}{4}-\frac{4(12)b^2}{b^2}=4b^2$

$9b^2-48=4b^2$

$9b^2-4b^2=48$

$5b^2=48$

$b^2=\frac{48}{5}$

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{\frac{48}{5}}=1$

$\frac{x^2}{16}-\frac{5y^2}{48}=1$

(2017/ 2"اسئلة خارج القطر")(2019/ 1"اسئلة خارج القطر")

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي طول محوره الحقيقي يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافىء $y^2-24x=0$ ودليله , كما ان بؤرتيه تمر برأسي القطع الناقص $\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$

Sol:

$y^2-24x=0$

$\rightarrow y^2=24x$ بالمقارنة

$y^2=4px$

$4p=24]\div 4 \quad \rightarrow p=6$

$2a=2p \quad \rightarrow a=p=6$

$\frac{y^2}{100}+\frac{x^2}{64}=1$ من معادلة القطع الناقص

$a^2=100 \quad \rightarrow a=10$

$\therefore$ رأسا القطع الناقص $(10,0),(-10,0)$ وهما بؤرتاه القطع الزائد

$c=10 \quad \rightarrow c^2=100$

$c^2=a^2+b^2$

$100=36+b^2$

$\rightarrow b^2=100-36 \quad \rightarrow b^2=64$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$ معادلة القطع الزائد

(1/2019)

س/ لتكن $Ky^2-hx^2=63$ معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$ جد $h,K\in R$

Sol:

$Ky^2-hx^2=63\,\}\div 63$

$\frac{y^2}{\frac{63}{K}}-\frac{x^2}{\frac{63}{h}}=1$

$\Rightarrow a^2=\frac{63}{K} \quad , \; b^2=\frac{63}{h}$

من القطع الناقص $\quad 25x^2+9y^2=225$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1 \quad \Rightarrow a^2=25 \quad , \quad b^2=9$

$\because C^2=a^2-b^2$

$\Rightarrow C^2=25-9 \Rightarrow C^2=16$

$\therefore$ C^2 للقطع الزائد $=16$

من القطع المكافئ $x^2=-12\,y \Rightarrow 4P=12$

$\therefore P=3 \Rightarrow$ a للزائد $=3$

$\therefore a^2=9$

$\therefore 9=\frac{63}{K} \quad \Rightarrow K=7$

$\because C^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow b^2=16-9 \quad \Rightarrow b^2=7$

$\therefore 7=\frac{63}{h} \quad \Rightarrow \quad h=9$

("2/2019"تطبيقي")

س/ قطع زائد مركزه نقطة الاصل معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة $h, k \in R$.

Sol:

القطع الزائد $[hx^2 - ky^2 = 90\,] \div 90$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$\therefore a^2 = \frac{90}{h} \;\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$b^2 = \frac{90}{k} \;\ldots\ldots\; (2)$$

$$\because \left[2a = 6\sqrt{2}\right] \div 2$$

$$\Rightarrow a = 3\sqrt{2} \quad \Rightarrow a^2 = 18$$

$$18 = \frac{90}{h}$$

$$\rightarrow h = \frac{90}{18} = 5 \in R$$

القطع الناقص $[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$

$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ بالمقارنة

$$\rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$\therefore a^2 = 64 \;,\; b^2 = 36$ حسب العلاقة للناقص

$$C^2 = a^2 - b^2$$

$$= 64 - 36 = 28$$

$$\Rightarrow C^2 = 28$$

وحسب العلاقة للزائد $C^2 = a^2 + b^2$

$$28 = 18 + b^2$$

$$\Rightarrow b^2 = 10$$

تعوض في معادلة (2) :-

$$10 = \frac{90}{k}$$

$$\Rightarrow k = \frac{90}{10} = 9 \in R$$

("1/2019"تطبيقي")

س / قطع زائد مركزه نقطة الاصل , معادلته $kx^2 - 9y^2 = h$ وطول محوره الحقيقي (6) حيث واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(1,4), (1,-4)$ جد قيمة $K, h \in R$

Sol:

القطع المكافئ :- متناظر حول محور السينات لان النقطتان $(1,4), (1,-4)$ متناظرتان حول محور السينات

$$\therefore y^2 = 4px$$

تحقق $(1,4)$

$$16 = 4p(1)$$

$$p = 4$$

$$F(4,0)$$

بؤرة القطع المكافئ واحدى بؤرتي القطع الزائد

$$[kx^2 - 9y^2 = h] \div h$$

$$\frac{x^2}{\frac{h}{k}} - \frac{y^2}{\frac{h}{9}} = 1$$

$$a^2 = \frac{h}{k} \quad , \quad b^2 = \frac{h}{9}$$

$$2a = 6 \quad \Rightarrow \quad a = 3$$

$$F(4,0)$$

$$c = 4 \quad \Rightarrow c^2 = 16$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 16 - 9$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 7$$

$$b^2 = \frac{h}{9}$$

$$\Rightarrow \quad 7 = \frac{h}{9} \quad \Rightarrow h = 63$$

$$a^2 = \frac{h}{k}$$

$$\Rightarrow \quad 9 = \frac{63}{k} \quad \Rightarrow k = 7$$

(2/2019)

س/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$ ومجموعي طولي محوريه الحقيقي والمرافق يساوي (28) وحدة .

Sol:

$\frac{x^2}{164}+\frac{y^2}{64}=1$

$a^2=164\,,b^2=64 \quad \Rightarrow c^2=a^2-b^2$

$c^2=164-64$

للناقص $\quad c^2=100=c^2 \quad$ للزائد

$F_1\,(10\,,0\,)\;\;,\;F_2\,(\,-10\,,0\,)$ بؤرتا القطع الناقص والزائد

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ المعادلة القياسية للزائد

$=2a+2b=28\,]\div 2$

$\Rightarrow\;a+b=14$

$\Rightarrow a=14-b$

$\therefore\;c^2=a^2+b^2$

$100=(14-b^2)+b^2$

$100=196-28b+b^2+b^2$

$2b^2-28b+96=0\,]\div 2$

$\Rightarrow\;b^2-14b+48=0$

$(b-8)(b-6)=0$ اما $b=8$ او $b=6$

عندما $\quad b=8\;\Rightarrow a=14-8\;\Rightarrow a=6$

عندما $\quad b=6\;\Rightarrow\;a=14-6\Rightarrow a=8$

∴ معادلة القطع الزائد

عندما $\quad a=6\quad,\;b=8$

$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

عندما $\quad a=8\quad,\;b=6$

$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$

ملاحظة :- اذا الطالب اخذ قيمة واحدة فقط يخصم منه درجة واحدة

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ واحد رأسيه بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$

Sol:

من معادلة القطع الناقص $\quad\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$

$a^2=36\;\;,\;\;b^2=20\;\;\Rightarrow\;\;c^2=a^2-b^2$

$c^2=36-20=16\;\rightarrow c=4$

بؤرتي القطع الناقص $(4,0)\,,(-4,0)$ وهما بؤرتا القطع الزائد

$\therefore\;\;c=4\;\;\in$ ق ز

من معادلة القطع المكافئ $\quad y^2+8x=0$

$y^2=-8x$

$y^2=-4px$ نقارنها مع

$-4p=-8\quad\rightarrow p=\frac{-8}{-4}=2$

بؤرة ق م $(-2,0)$ وهي احدى رؤوس ق ز

$\therefore a=2\in$ ق ز

$c^2=a^2+b^2\quad\rightarrow\quad 16=4+b^2$

$b^2=16-4=12$

معادلة ق ز $\quad\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\;\;\Rightarrow\;\;\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

(3/2019)

س/ جد معادلة قطع زائد مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي مع الرسم

Sol:

∵ القطع الزائد بؤرتاه على الصادات

∴ المعادلة القياسية $\quad\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$\because 2b=2\sqrt{2}\;\;\Rightarrow\;\;b=\sqrt{2}\;\;\Rightarrow\;\;b^2=2$

$\because e=\frac{c}{a}\;\;\Rightarrow\;\;3=\frac{c}{a}\;\;\Rightarrow c=3a\;\;\Rightarrow\;\;c^2=9\,a^2$

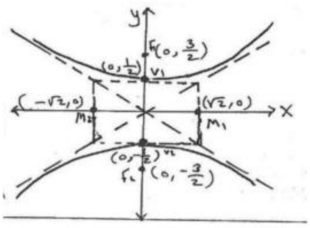
$c^2=a^2+b^2$

$\Rightarrow\;\;9a^2=a^2+2\;\Rightarrow\;\;8a^2=2$

$\therefore\;a^2=\frac{2}{8}\quad\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow c^2=9*\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\;\;c^2=\frac{9}{4}$



$\therefore$ المعادلة $\;\frac{y^2}{\frac{1}{4}}-\frac{x^2}{2}=1$

$F_1\left(0,\frac{3}{2}\right)\,,F_2\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

$,V_1\left(0,\frac{1}{2}\right)\,,V_2\left(0,\frac{-1}{2}\right)\,,M(\mp\sqrt{2},0)$

2/2020

س/ جد بأستخدام التعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتيه $(\mp 2\sqrt{2}\,,0)$ وينطبق محوراه على المحورين الإحداثيين ، والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اي نقطة من نقاطه عن البؤرتين يساوي (4) وحدات.

Sol:

نفرض $f(x,y)$ تنتمي للقطع الزائد

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$PF_1 - PF_2 = \pm 4 \quad [2a = 4]$$

البؤرتان $F_1(2\sqrt{2}\,,0), F_2(-2\sqrt{2}\,,0)$

$$\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} - \sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2 + y^2} = \mp 4$$

بالتربيع $\sqrt{x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2}$

$$x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2$$

$$\left[\mp 8\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}x\right] \div 8$$

بالتربيع $\mp\sqrt{x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2} = 2 + \sqrt{2}\,x$

$$x^2 + 4\sqrt{2}x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}\,x = 2x^2$$

$$[x^2 - y^2 = 4] \div 4$$

معادلة القطع الزائد القائم $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$

النجاح لا يحدث في مرحلة الحلم
بل خلال المُضي قدمًا إلى ما تحلم به

1/2020

س/ اثبت ان النقطة $p\left(2\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ تنتمي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ ومركزه نقطة الاصل ثم جد طول نصف القطر البؤري الاول والثاني المرسومين من تلك النقطة

Sol:

اذا $p\left(2,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in$ للقطع تحقق معادلته

الطرف الايسر $\frac{x^2}{3} - y^2$

الطرف الايمن $\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$\therefore$ النقطة $p\left(2\,,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \in$ للقطع الزائد

نجد البؤرتان $a^2 = 3\ ,b^2 = 1$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3 + 1$$

$$c^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$\therefore$ البؤرتان $F_1\ (2,0)\ , F_2\ (-2,0)$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نصف القطر البؤري الاول

$$PF_1 = \sqrt{(2-2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - 0\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad unit$$

$$PF_2 = \sqrt{(2+2)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{16 + \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{48+1}{3}} = \sqrt{\frac{49}{3}} = \frac{7}{\sqrt{3}} \quad unit$$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الثالث" تطبيقات التفاضل"

40 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول" المعادلات المرتبطة بالزمن"

1/ 1996

س/ جد نقطة او اكثر تنتمي الى الدائرة $x^2+y^2-4x=4$ عندها يكون معدل تغير x بالنسبة للزمن مساوياً الى معدل تغير y بالنسبة للزمن.

sol :

$let\ M(x,y)\ ;\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2-4x=4$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}-4\frac{dx}{dt}=0$

$2x\frac{dx}{dt}-4\frac{dx}{dt}=-2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow (2x-4)\frac{dx}{dt}=(-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow [(2x-4)=(-2y)]\div 2$

$\rightarrow x-2=-y \quad \rightarrow y=2-x \ldots\ldots\ldots (1)$

$x^2+y^2-4x=4 \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في معادلة (2)

$x^2+(2-x)^2-4x-4=0$

$x^2+4-4x+x^2-4x-4=0$

$2x^2-8x=0$

$\rightarrow 2x(x-4)=0$

$x=0\rightarrow y=2$

اما $x=4\rightarrow y=2-4=-2$

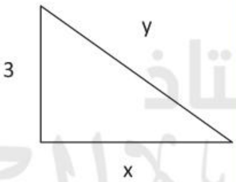
$M=\{(0,2),(4,-2)\}$

1/ 1997

س/ سيارة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت اشارة مرورية حمراء ارتفاعها 3m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ اصطدمت بسيارة اخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية.

sol :

نفرض ان بعد السيارة عن مسقط الاشارة المرورية على الارض x ونفرض ان بعدها عن الاشارة y



$y^2=x^2+9$

$y=3\sqrt{3}$

$\rightarrow 27=x^2+9$

$\rightarrow x^2=18 \quad \rightarrow x=3\sqrt{2}$

$2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow y\frac{dy}{dt}=x\frac{dx}{dt}$

$3\sqrt{3}\frac{dy}{dt}=3\sqrt{2}\,(30)$

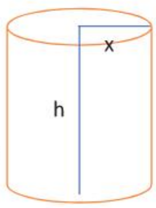
$\rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{3\sqrt{2}\,(30)}{3\sqrt{3}}=\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\ m/s$

(2000/ 2)(2003/ 2)(2006/ تمهيدي)

س/ اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل $0.5\ cm/s$ بحيث يظل حجمها دائما مساوياً $320\ \pi\ cm^3$ جد معدل تغير نصف قطر قاعدتها يكون ارتفاعها 5 cm

sol :

نفرض ان نصف قطر قاعدة الاسطوانة =x , ارتفاعها= h حجمها v



$v=\pi x^2 h$

$\rightarrow 320\,\pi=\pi x^2 h$

$\rightarrow 320=x^2 h$

$h=5$

$\rightarrow 320=5x^2$

$\rightarrow x^2=64 \quad \rightarrow x=8$ تعوض بعد الاشتقاق

$0=x^2\frac{dh}{dt}+h\,.\,2x\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 0=64(0.5)+5(16)\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt}=-0.4\ cm/s$

1 /2004

س/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كان معدل نقصان نصف قطرة $\frac{7}{22}\,cm/s$ بحيث يبقى محافظا على شكله فعندما يكون نصف قطره **10 cm** جد: 1) معدل نقصان حجمه 2) معدل نقصان مساحته السطحية

sol :

نفرض ان نصف قطر الكره r وحجمها v ومساحتها السطحية A

$1)\, v = \frac{4\pi}{3} r^3$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\,\frac{22}{7}(100)\frac{-7}{22} = -400\,cm^3/s$

$2)\, A = 4\pi r^2$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\pi r \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\,\frac{22}{7}(10)\frac{-7}{22} = -80\,cm^2/s$

---

2 /2008

س/ بالون كروي مملوء بالغاز فيه ثقف يتسرب منه الغاز فاذا كانت النسبة بين معدل نقصان حجمه الى معدل نقصان قطره (200π) احسب معدل نقصان حجمه عندما يكون معدل النقصان في مساحته السطحية $80\,m^2/s$

sol :

نفرض ان حجم البالون=V , ومساحته السطحية =A , ونصف قطره = r

$\frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{d2r}{dt}} = 200\,\pi$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 200\pi \frac{d2r}{dt}$

$\frac{d2r}{dt} = 2\frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 400\pi\,\frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots(1)$

$v = \frac{4\pi}{3} r^3$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = 4\,\pi\,r^2 \frac{dr}{dt} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$4\,\pi r^2 \frac{dr}{dt} = 400\pi \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow r^2 = 100 \rightarrow r = 10$

$A = 4\,\pi\,r^2$

$\rightarrow \frac{dA}{dt} = 8\,\pi\,r \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow -80 = 80\,\pi \frac{dr}{dt}$

$\rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-1}{\pi}$ تعوض اما في(1) او في(2)

$\frac{dv}{dt} = 400\pi \cdot \frac{-1}{\pi}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt} = -400\,m^3/s$ معدل تغير الحجم

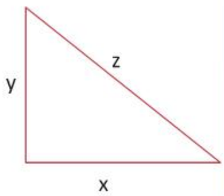
$\rightarrow 400\,cm^3/s$ معدل نقصانه

1 /2009

س/ طريقان متعامدان تسير سيارة على الطريق الاول بسرعة $80\,km/h$ وتسير سيارة على الطريق الاخر بسرعه $60\,km/h$ جد معدل ابتعاد السيارتين بعد مرور ربع ساعة.

sol :

نفرض ان الطريقان المتعامدان x , y والبعد بين السيارتين Z



$\because \frac{dx}{dt} = 80$

$\rightarrow x = 80\left(\frac{1}{4}\right) = 20 \quad after\ \frac{1}{4}h$

$\because \frac{dy}{dt} = 60$

$\rightarrow y = 60\left(\frac{1}{4}\right) = 15 \quad after\ \frac{1}{4}h$

$z^2 = x^2 + y^2$

$z^2 = 400 + 225 = 625$

$\rightarrow z = 25$

$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$

$25\frac{dz}{dt} = (80)(20) + (60)(15)$

$25\frac{dz}{dt} = 2500$

$\rightarrow \frac{dz}{dt} = 100\,km/h$

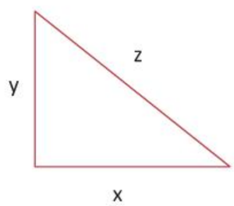
---

2 /2009

س/ سلم طوله **13 m** يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $4\,m/sec$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون الطرف الاسفل على بعد **5m** من الحائط .

sol :

نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط X, ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y



$x^2 + y^2 = 169$

$25 + y^2 = 169$

$\rightarrow y^2 = 144$

$\rightarrow y = 12$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$(2)(5)(4) + (2)(12)\frac{dy}{dt} = 0$

$\rightarrow 24\frac{dy}{dt} = -40$

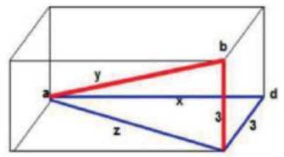
$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{5}{3}\,m/sec$

2010/ تمهيدي

س/ قطار ذو عربة تسير بسرعة $30m/s$ اجتازت شجرة ارتفاعها 3m عن سطح الارض وبعد ان ابتعدت عنها مسافة $3\sqrt{3}\ m$ توقف نتيجة وجود عمل ارهابي على السكة احسب سرعه تغير المسافة بين القطار وقمة الشجرة؟

sol :

في المثلث abc القائم الزاوية في c نفرض ان ab=y والذي يمثل قطر متوازي المستطيلات حيث ان bc يمثل الشجرة و cd اقرب مسافة بين قاعدة الشجرة والسكة.



$y^2 = z^2 + 9$

$y = 3\sqrt{3}$

$\rightarrow 27 = z^2 + 9$

$\rightarrow z^2 = 18 \rightarrow z = 3\sqrt{2}$

$2y\dfrac{dy}{dt} = 2z\dfrac{dz}{dt}$

$\rightarrow y\dfrac{dy}{dt} = z\dfrac{dz}{dt} \ldots\ldots\ldots (1)$

المثلث abc القائم الزاوية في d نفرض ان ad=x, ac=z

$z^2 = x^2 + 9$

$\rightarrow 18 = x^2 + 9$

$\rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = 3$

$2z\dfrac{dz}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt}$

$\rightarrow z\dfrac{dz}{dt} = x\dfrac{dx}{dt} \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (1) في معادلة (2)

$y\dfrac{dy}{dt} = x\dfrac{dx}{dt}$

$\rightarrow 3\sqrt{3}\dfrac{dy}{dt} = 3(30)$

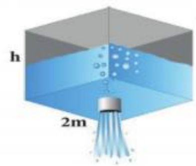
$\rightarrow \dfrac{dy}{dt} = 30\sqrt{3}\ m/s$

(2011/ 1)(2013/ 2)(2017/ 2 اسئلة الموصل)

س/ خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعه طولها 2m يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ cm^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان في اي زمن t

sol :

نفرض ان الارتفاع =h , طول ضلع القاعدة المربعة = x حجم متوازي المستطيلات = v



$v = x^2\ h$

$x = 2\ m$

$\rightarrow v = 4h$

$\dfrac{dv}{dt} + 4\dfrac{dh}{dt}$

$\rightarrow -0.4 = 4\dfrac{dh}{dt}$

$\rightarrow \dfrac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$

$\dfrac{dh}{dt} = -0.1\ m/h$ معدل تغير انخفاض الماء في الخزان

(2011/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)

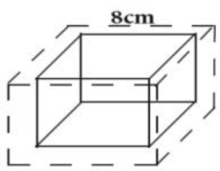
س/ مكعب صلد طول حرفه 8 m مغطى بطبقة من الجليد بحيث يحافظ على شكله مكعبا, فاذا بدأ الجليد يذوب بمعدل $6\ m^3/s$ فجد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1m

sol :

نفرض ان سمك الجليد =X , حجم المكعب = (طول الضلع)²

طول ضلع المكعب الصغير = 8 ← $v_1 = (8)^3$

طول ضلع المكعب الكبير= (8+2x)← $v_2 = (8+2x)^3$



$v = v_2 - v_1$

$\rightarrow v = (8+2x)^3 - (8)^3$

$\dfrac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2.(2)\dfrac{dx}{dt} + 0$

$\rightarrow -6 = 3(8+2x)^2.(2)\dfrac{dx}{dt}$

$\rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{1}{100}m/s$

$\dfrac{dx}{dt} = -0.01\,m/s$ معدل تغير سمك الجليد

$OR\ \dfrac{dx}{dt} = 0.01\,m/s$ معدل نقصان سمك الجليد

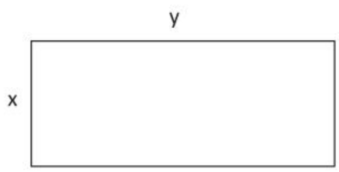
(2011/ 2)(2014/ 3)(2015/ 1 اسئلة النازحين)

س/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة , جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها 8 cm

sol :

نفرض عرض المستطيل = X , طول المستطيل = y ,

مساحة المستطيل = A



$A = Xy$

$96 = 8x$

$\rightarrow x = 12$

$0 = x\dfrac{dy}{dt} + y\dfrac{dx}{dt}$

$0 = 12\dfrac{dy}{dt} + (8)(2)$

$\rightarrow 12\dfrac{dy}{dt} = -16$

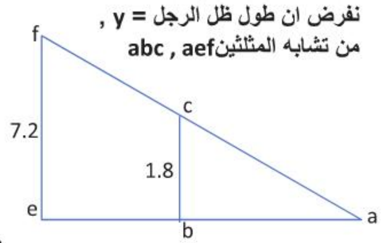
$\rightarrow \dfrac{dy}{dt} = -\dfrac{4}{3}cm/s$

(2012/ تمهيدي)(2013/ 1)(2014/ تمهيدي(خارج القطر))
(2015/ تمهيدي)(2015/ 1)

س/ عمود طوله 7.2 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.8 m مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\,m/min$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض البعد بين قدم الرجل وقاعدة العمود = x ,
نفرض ان طول ظل الرجل = y ,
من تشابه المثلثين abc , aef



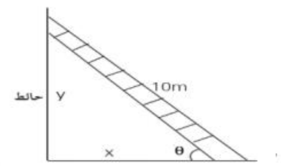
$$\frac{1.8}{7.2}=\frac{y}{x+y}$$
$$\rightarrow \frac{1}{4}=\frac{y}{x+y}$$
$$x+y=4y\rightarrow x=3y$$
$$\frac{dx}{dt}=3\frac{dy}{dt}\rightarrow \frac{dy}{dt}=\left(\frac{30}{3}\right)$$
$$\frac{dy}{dt}=10\,m/min$$

(2012/ 1)(2014/ تمهيدي)(2014/ 2)

س/ سلم طوله 10 m يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على ارض افقية فاذا انزلق الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $2\,m/sec$ عندما يكون الطرف الاسفل على بعد 8m من الحائط جد: 1)معدل انزلاق طرفه العلوي. 2)سرعه تغير الزاوية بين السلم والارض.

sol :

1) نفرض بعد قاعده السلم عن الحائط x, ونفرض بعد رأس السلم عن الارض y



$$x^2+y^2=100$$
$$64+y^2=100$$
$$\rightarrow y^2=36\ \rightarrow y=6$$
$$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$
$$(2)(8)(2)+(2)(6)\frac{dy}{dt}=0$$
$$\rightarrow 12\frac{dy}{dt}=-32\quad\rightarrow\frac{dy}{dt}=-\frac{8}{3}m/sec$$

2) نفرض ان الزاوية بين السلم والارض = θ

$$sin\theta=\frac{y}{10}$$
$$\rightarrow sin\theta=\frac{1}{10}y$$
$$cos\theta\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\because cos\theta=\frac{x}{10}$$
$$\rightarrow\frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{10}\left(-\frac{8}{3}\right)$$
$$\rightarrow\frac{d\theta}{dt}=-\frac{1}{3}\ rad/sec$$ معدل تغير الزاوية بين السلم والارض
$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{3}\ rad/sec$$ سرعه نقصان الزاوية بين السلم والارض

(2012/ 2)(2018/ 2) (2020/1"احيائي")

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y=x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0\,,\frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :

Let M= (x ,y) , N=(0, , $\frac{3}{2}$) , S=M N طول

$$s=\sqrt{(X-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$s=\sqrt{x^2+y^2-3y+\frac{9}{4}}\qquad ,y=x^2 \text{ بالتعويض}$$
$$s=\sqrt{y+y^2-3y+\frac{9}{4}}$$
$$=\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}$$
$$\frac{ds}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow\frac{2}{3}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{2y-2}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\cdot\frac{dy}{dt}$$
$$\rightarrow\frac{2}{3}=\frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}}\frac{dx}{dt}$$
$$2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}\ =3y-3 \quad \text{بتربيع الطرفين}$$
$$4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)=9y^2-18y+9$$
$$\rightarrow[4y^2-8y+9=9y^2-18y+9]$$
$$5y^2-10y=0$$
$$\rightarrow 5y(y-2)=0$$
$$y=0\rightarrow x=0 \text{ يهمل}$$
$$OR\ y=2\ \ \rightarrow x^2=2\rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$
$$M=\{(\sqrt{2}\,,2),(-\sqrt{2}\,,2)\} \text{ مجموعة الحل}$$

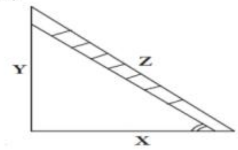
(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)
(2018/ تمهيدي)

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\,m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :
نفرض طولي الضلعين القائمي y , X , وليكن طول الوتر Z (عددا ثابتا)

$z^2 = x^2 + y^2$

$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \ldots\ldots (1)$



$tan\frac{\pi}{3} = \frac{y}{x}$

$\rightarrow \sqrt{3} = \frac{y}{x}$

$\rightarrow y = \sqrt{3}\ x \ldots\ldots (2)$

بالتعويض عن قيمة $\frac{dx}{dt} = 2$, $y = \sqrt{3}\,x$ في معادلة رقم (1)

$0 = 2x(2) + 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}$

اما $2x = 0 \quad \rightarrow x = 0$ يهمل

او $2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt} = -4x$

$\rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{2}{\sqrt{3}}\,m/s$

ملاحظة/ اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجة واحدة

(2013/ 2 اسئلة خارج القطر)(2016/ 3)(2017/ 1)(2/2019)

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7 , 0) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4

sol :
Let M= (x ,y) , N=(7,0) , S=M N طول

$s = \sqrt{(X-7)^2 + (y-0)^2}$

$\rightarrow s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$, $y^2 = 4x$ بالتعويض

$s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x}$

$= \sqrt{x^2 - 10x + 49}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}}\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 0.2 = \frac{8 - 10}{2\sqrt{16 - 40 + 49}} \cdot \frac{dx}{dt}$

$0.2 = -\frac{2}{10}\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ unit/s$ المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني

2014/ 1

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $y = x^2$ جد احداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لابتعادها عن النقطة $(0 , \frac{3}{2})$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

sol :
Let M= (x ,y) , N=(0, , $\frac{3}{2}$) , S=M N طول

$s = \sqrt{(X-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$

$\rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$, $y = x^2$ بالتعويض

$s = \sqrt{y + y^2 - 3y + \frac{9}{4}}$

$= \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{2y - 2}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$

$\frac{ds}{dt} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \cdot \frac{dy}{dt}$

$\rightarrow \frac{1}{3} = \frac{y - 1}{\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}}$

$\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3y - 3$ بتربيع الطرفين

$y^2 - 2y + \frac{9}{4} = 9y^2 - 18y + 9$

$\rightarrow 8y^2 - 16y + 9 - \frac{9}{4} = 0 \ldots\ldots\ldots.*$

$\left[8y^2 - 16y + \frac{27}{4} = 0\right].4$

$32y^2 - 64y + 27 = 0$

$[32y^2 - 64y + 27 = 0] \div 32$

$y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0$

$y^2 - 2y - 1 = 1 - \frac{27}{32}$

$\rightarrow (1 - y)^2 = \frac{5}{32}$

$\rightarrow y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} \quad \rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

$y = x^2 \rightarrow x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$

ملاحظة/
1-اذا وصل الطالب للخطوة * يعطى درجة كاملة.
2- اما اذا حل الطالب على انه $\frac{2}{3}$ بدل $\frac{1}{3}$ والحل صحيح يعطى درجة كاملة.

(2014/ 1 اسئلة النازحين)(2018/ 3)(2019/ تمهيدي" تطبيقي")

س/ جد مجموعة النقط التي تنتمي الى الدائرة $x^2+y^2+4x-8y=108$ والتي يكون عندها المعدل الزمني لتغير x مساويا للمعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t

sol :

Let M= (x ,y) , $\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$x^2+y^2+4x-8y=108$

$2x\frac{dx}{dt}+4\frac{dx}{dt}=8\frac{dy}{dt}-2y\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow (2x+4)\frac{dx}{dt}=(8-2y)\frac{dy}{dt}$

$\because \frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow [(2x+4)=(8-2y)]\div 2$

$\rightarrow x+2=4-y$

$\rightarrow y=2-x \ldots\ldots(1)$

$x^2+y^2+4x-8y=108 \ldots\ldots\ldots(2)$

$x^2+(2-x)^2+4x-8(2-x)-108=0$

$x^2+4-4x+x^2+4x-16+8x-108=0$

$2x^2+8x-120=0$

$\rightarrow x^2+4x-60=0 \rightarrow (x+10)(x-6)=0$

$x=-10$

$\rightarrow y=2+10=12$

$OR\ \ x=6 \rightarrow y=2-6=-4$

$M=\{(-10,12),(6,-4)\}$

2014/ 4 اسئلة النازحين(الانبار)

س/ مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي 24 cm وطول قطر قاعدته 16 cm يصب فيه سائل بمعدل 5 cm^3/s بينما يتسرب منه السائل بمعدل 1 cm^3/s جد معدل تغير قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر السائل 4 cm

sol :

نفرض ان ارتفاع الماء = h , قطر قاعده الماء= x , حجم الماء المخروطي الشكل = V

$v=\frac{\pi}{3}x^2h$

$tan\theta=\frac{8}{24}=\frac{x}{h}$

$8h=24x$

$\rightarrow h=3x$

$v=\frac{\pi}{3}x^2(3x)$

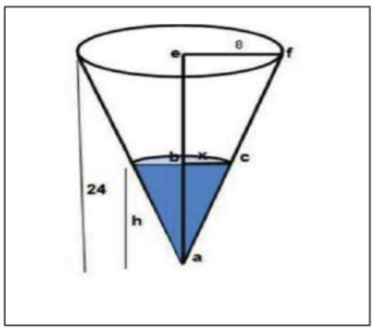
$\rightarrow v=\pi x^3$

$\frac{dv}{dt}=3\pi x^2\frac{dx}{dt}$

$4=3\pi(4)^2\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow \frac{dx}{dt}=\frac{4}{48\pi}$

$=\frac{1}{12\pi}\ cm/s$



2015 /2

س/ مصباح على ارتفاع 6.4 m متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طولة 1.6 m يتحرك مبتعداً عن العمود وبسرعة $30\,m/min$ جد سرعة تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض بعد الرجل عن العمود = x , نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$tan\theta=\frac{1.6}{y}=\frac{6.4}{x+}$

$\rightarrow \frac{1}{y}=\frac{4}{x+y}$

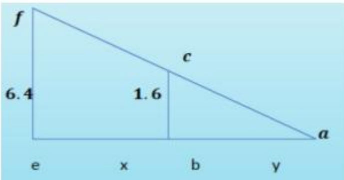
$4y=x+y$

$\rightarrow 3y=x$

$3\frac{dy}{dt}=\frac{dx}{dt}$

$\rightarrow 3\frac{dy}{dt}=30\,]\div 3$

$\frac{dy}{dt}=10\,m/min$



ملاحظة/ 1-الرسم والفرضيات مهمة جداً في حال لم يرسم الطالب ولم يكتب الفرضيات تخصم منه 3 درجات

2-يمكن حل السؤال من تشابه المثلثين abc , aef

2015/ 4 اسئلة النازحين

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5}m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{3}$

sol :

نفرض طولي الضلعين القائمي x , y , وليكن طول الوتر z (عددا ثابتا)

$z^2=x^2+y^2$

$2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt} \ \ldots\ldots(1)$

$tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x}$

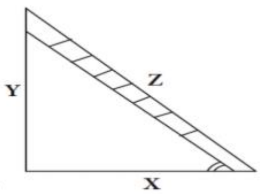
$\rightarrow \sqrt{3}=\frac{y}{x}$

$\rightarrow y=\sqrt{3}\,x \ \ldots\ldots(2)$

$0=2x\left(\frac{1}{5}\right)+2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}$

$\rightarrow 2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}=-0.4x$

$\rightarrow \frac{dy}{dt}=-\frac{0.2}{2\sqrt{3}}m/s$



2016/ تمهيدي

س/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافىء $x^2 = 4y$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة (7, 0) يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون X=4

sol :

Let M= (x ,y) , N=(0,7) , S=M N طول

$$s = \sqrt{(X-0)^2 + (y-7)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + y^2 - 14y + 49} \qquad ,x^2 = 4y \text{ بالتعويض}$$
$$s = \sqrt{4y + y^2 - 14y + 49}$$
$$= \sqrt{y^2 - 10y + 49}$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{2y-10}{2\sqrt{y^2-10y+49}}\frac{dy}{dt}$$
$$\to 0.2 = \frac{2y-10}{2\sqrt{16-40+49}} \cdot \frac{dy}{dt}$$
$$0.2 = -\frac{2}{2\sqrt{25}}\frac{dy}{dt}$$
$$\to \frac{dy}{dt} = -1\ unit/s$$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

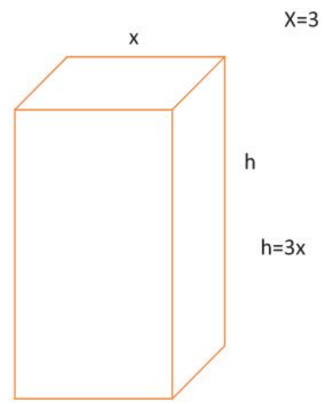
س/ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته يتمدد بالحرارة جد معدل التغير في حجمه ومساحة السطحية في اللحظة التي يكون فيها طول القاعدة 8cm علما ان معدل التغير في طول القاعدة $\frac{1}{4}cm/sec$

sol :

نفرض ان طول القاعدة =X , والارتفاع = h, حيث ان h=3X

حجم متوازي المستطيلات V = مساحة القاعة X الارتفاع

المساحة السطحية لمتوازي المستطيلات A = محيط القاعدة X الارتفاع + 2 X مساحة القاعدة



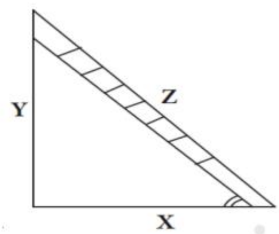
$$v = x^2 h$$
$$\to v = x^2(3x)$$
$$\to v = 3x^3$$
$$\frac{dv}{dt} = 9x^2\frac{dx}{dt}$$
$$\to \frac{dv}{dt} = 9(8)^2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\to \frac{dv}{dt} = 144\ m^3/s$$
$$A = 4\,x\,h + 2x^2$$
$$\to A = 12x^2 + 2x^2$$
$$\to A = 14x^2$$
$$\frac{dA}{dt} = 28x\frac{dx}{dt}$$
$$\to \frac{dA}{dt} = 28(8)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\to \frac{dA}{dt} = 56\ cm^2/s$$

2016/ 2

س/ سلم يستند طرفه الاسفل على ارض افقية وطرفه الاعلى على حائط راسي فاذا انزلق الطرف الاسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ جد معدل انزلاق طرفه العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والارض تساوي $\frac{\pi}{4}$

sol :

نفرض ارتفاع الطرف العلوي للسلم عن الارض= y ,ونفرض بعد الطرف السفلي عن الحائط= X , ونفرض طول السلم = z



$$z^2 = x^2 + y^2$$
$$0 = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \quad \dots\dots(1)$$
$$tan\frac{\pi}{4} = \frac{y}{x}$$
$$\to 1 = \frac{y}{x}$$
$$\to y = x \quad \dots\dots(2)$$
$$0 = 2x(2) + 2x\frac{dy}{dt}$$
$$\to 2x\frac{dy}{dt} = -4x$$
$$\to \frac{dy}{dt} = -2\ m/s$$

ملاحظة / اذا لم يرسم الطالب تخصم منه درجة واحدة والفرضية بالنسبة للرموز حسب رغبة الطالب

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

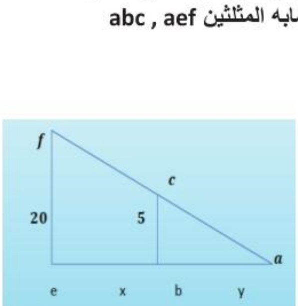
س/ فنار ارتفاعه 20 m يعلوه مصباح كبير تحركت سفينة ارتفاعها 5 m مبتعداً عن الفنار بسرعة $50\ km/h$ جد تغير طول ظل السفينة على سطح البحر.

sol :

نفرض البعد بين السفينة وقاعدة الفنار = X

نفرض ان طول ظل السفينة = y

من تشابه المثلثين abc , aef



$$\frac{5}{20} = \frac{y}{x+y}$$
$$\to \frac{1}{4} = \frac{y}{x+y}$$
$$x + y = 4y$$
$$\to x = 3y$$
$$\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$$
$$\to 50 = 3\frac{dy}{dt}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{50}{3}km/h$$

2016/ 3 اسئلة خارج القطر

س/ كرة صلدة قطرها 8 cm مغطاة بطبقة من الجليد بحيث شكلها يبقى كرة, فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $5\,m^3/s$ جد معدل النقصان في سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد 1 cm

sol :

نفرض سمك الجليد = X , نفرض نصف قطر الكرة مع الجليد = 4+x ,
المطلوب $\frac{dx}{dt}$

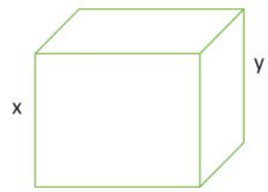
$$V=\frac{4}{3}(4+X)^3\pi$$
$$\frac{dv}{dt}=4(4+X)^2\frac{dx}{dt}\pi$$
$$\to -5=4(4+1)^2\pi\frac{dx}{dt}$$
$$\to -5=100\pi\frac{dx}{dt}$$
$$\frac{dx}{dt}=\frac{-5}{100\pi}$$
$$\to\frac{dx}{dt}=\frac{1}{20\pi}cm/s$$

2017/ 1 اسئلة خارج القطر(2017/ 2)

س/ متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل, يزداد طول ضلعه بمعدل$(0.4\,cm/s)$ بحيث يبقى الحجم ثابت دائما, $(640cm^3)$,جد معدل التغير في الارتفاع في اللحظة التي يكون فيها الارتفاع $10cm$

sol :

نفرض ضلع القاعدة = X , نفرض الارتفاع = y , والحجم V



$$V=x^2\,y$$
$$640=x^2*10$$
$$\to x^2=64$$
$$\to x=8$$
$$640=x^2.y$$
$$0=x^2\frac{dy}{dt}+y*2x\frac{dx}{dt}$$
$$=64\frac{dy}{dt}+10+2*8*8*(0.4)$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{-64}{64}$$
$$=-1\,cm/s$$

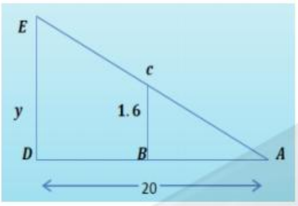
2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ مصدر ضوئي موضوع على الارض يبعد $(20\,m)$عن حائط,تسير حادلة تبليط ارتفاعها $(1.6\,m)$,باتجاه الحائط بسرعة $(2.5\,m/min)$ ما معدل التغير في ارتفاع ظل الحادلة عندما تبعد $(8\,m)$ عن الحائط؟ وهل الارتفاع للظل يزداد ام يتناقص؟

sol :

نفرض بعد الحادلة عن الحائط في اي لحظة = X , نفرض ظل الحادلة = y
, $\frac{dy}{dt}=2.5$

من تشابة المثلثين ADE , ABC



$$\frac{20-x}{20}=\frac{1.6}{y}$$
$$\to y=\frac{32}{20-x}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{(20-x)(0)-32(\frac{-dx}{dt})}{(20-x)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{32(\frac{dx}{dt})}{(20-x)^2}$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{32(-2.5)}{(20-8)^2}$$
$$\to\frac{dy}{dt}=\frac{-80}{144}$$
$$=\frac{-5}{9}m/min$$

∴ارتفاع الظل يتناقص

ملاحظة/1)الرسم مهم جدا درجته تكون 2 درجة

2) اذا حل الطالب على سؤال الكتاب ظل الرجل يعطى الطالب صفر.

3 /2017

س/ وقف صقر على قمة شجرة ارتفاعها$(30\ m)$ لاحظ على الارض ارنب فطار نحوه بسرعة $(80\ m/s)$ جد معدل تغير موقع الارنب اذا كان بعده عن الشجرة $(40\ m)$

sol :

نفرض بعد الصقر عن الارنب = Y , نفرض بعد الارنب عن قاعدة الشجرة = X , نفرض ارتفاع الشجرة = Z =30

$\frac{dy}{dt}=80\ m/s \quad , \frac{dx}{dt}=?$

$y^2=x^2+z^2$ عندما $x=40 \quad , z=30$

$y^2=1600+900$

$\rightarrow y^2=2500 \ \rightarrow y=50$

$\therefore y^2=x^2+z^2$

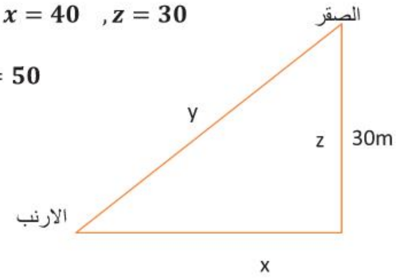
$\rightarrow y^2=x^2+900$

$2y\frac{dy}{dt}=2x\frac{dx}{dt}] \div 2$

$y\frac{dy}{dt}=x\frac{dx}{dt}$

$50(80)=40\frac{dx}{dt}$

$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{4000}{40}=100\ m/s$



1 /2018

س/ يراد ملىء خزان على شكل مخروط دائري قائم راسه الى الاسفل ,طول نصف قطر قاعدته يساوي$(5\ m)$ والارتفاع يساوي $(10m)$ فاذا كان معدل ملىء الماء $(\ 2\ \ m^3/min)$ جد سرعة ارتفاع الماء عندما يكون ارتفاع الماء يساوي $(\ 6\ m)$

sol :

نفرض نصف قطر المخروط = r , نفرض الارتفاع = h ,
نفرض الحجم = v

$v=\frac{1}{3}\pi r^2 h \ldots\ldots\ldots(1)$

$tan\theta=\frac{r}{h}=\frac{5}{10}$

$\rightarrow \frac{r}{h}=\frac{1}{2} \rightarrow 2r=h$

$\rightarrow r=\frac{1}{2}h \ldots\ldots\ldots(2)$

نعوض(2) في(1)

$v=\frac{1}{3}\pi(\frac{1}{2}h)^2 h$

$v=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{1}{4}h^2\cdot h$

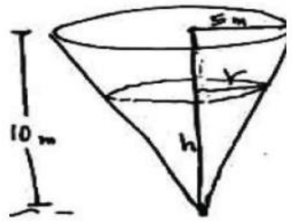
$\rightarrow v=\frac{\pi}{12}h^3$

$\frac{dv}{dt}=\frac{\pi}{12}3h^3\cdot\frac{dh}{dt}$

$\rightarrow \frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}\pi(6)^2\cdot\frac{dh}{dt} \quad \rightarrow 2=9\pi\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{4}\pi\, 36\cdot\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt}=\frac{2}{9\pi}=m/min$



2018/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ تحركت شاحنتان من مستودع ,الشاحنة (A) بسرعة $(\ 40\ k/h)$ شرقاً والشاحنة (B) بسرعة $(\ 30\ \ h/k\ )$ شمالاً, ما معدل تغير المسافة بين الشاحنتين عندما تكون الشاحنة (A) على بعد $(\ 4km\ )$ والشاحنة (B) على بعد $(\ 3km\ )$ من المستودع؟

sol :

نفرض بعد الشاحنة الاولى A عن المستودع = x ,
نفرض بعد الشاحنة الثانية B عن المستودع = y , نفرض المسافة بين الشاحنتين = z

$z^2=x^2+y^2$ عندما $x=4 \quad ,y=3$

$z^2=16+9$

$\rightarrow z^2=25 \ \rightarrow z=5$

$\therefore y^2=x^2+z^2$

$\rightarrow y^2=x^2+900$

$2z\frac{dz}{dt}=2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}] \div 2$

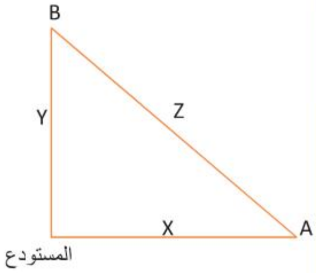
$z\frac{dz}{dt}=x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}$

$5\frac{dz}{dt}=(4)(40)+(3)(30)$

$5\frac{dz}{dt}=160+90$

$\rightarrow 5\frac{dz}{dt}=250] \div 5$

$\frac{dz}{dt}=50\ \ km/h$



2019/ تمهيدي

س/ عمود طوله 3.6 m في نهايته مصباح, يتحرك رجل طوله 1.6m مبتعداً عن العمود وبسرعة $1.5\ m/s$ جد معدل تغير طول ظل الرجل.

sol :

نفرض بعد الرجل عن العمود = X , نفرض ان طول ظل الرجل = y ,

$DC=1.6\ , AB=3.6$

$BC=x\ .CE=y$

$\frac{dx}{dt}=1.5, \quad \frac{dy}{dt}=?$

في $\Delta\ ABE$

$tan\theta=\frac{AB}{BE}=\frac{DC}{CE}$

$\frac{3.6}{x+y}=\frac{1.6}{y}$

$\frac{9}{x+y}=\frac{4}{y}$

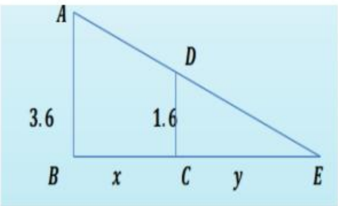
$9y=4x+4y$

$\rightarrow 5y=4x$

$5\frac{dy}{dt}=4\frac{dx}{dt}$

$5\frac{dy}{dt}=4(1.5)$

$\rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{6}{5}m/s$



ملاحظة/ يمكن ان يستخدم الطالب تشابة المثلثات

(1/2019"تطبيقي")

س/ كرة صلدة نصف قطرها $(4cm)$ مغطاة بطبقة من الجليد بحيث يبقى شكلها كرة فاذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $(10\ cm^3/s)$ جد معدل نقصان سمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها سمك الجليد $(1cm)$

sol :

نفرض سمك الجليد = x

والمطلوب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=1$

نفرض حجم الجليد = v ⇐ $\frac{dv}{dt}=-10$

حجم الجليد = حجم الكرة مع الجليد − حجم الكرة

$v=\frac{4}{3}(4+x)^3\pi-\frac{4}{3}(4)^3\pi$

$\frac{dv}{dt}=4\pi(4+x)^2\ \frac{dx}{dt}-0$

$-10=4\pi(4+1)^2\frac{dx}{dt}$

$-10=100\,\pi\frac{dx}{dt}$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{-10}{100\,\pi}$

$=\frac{-0.1}{\pi}\ cm/s$

(3/2019)

س/ متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3\ cm/s$ والارتفاع يتناقص بمعدل $0.5\ cm/s$ جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4\ cm$ والارتفاع $3\ cm$

sol :

نفرض طول ضلع القاعدة = x

نفرض طول ارتفاعه = y

$\frac{dy}{dt}=-0.5\,,\frac{dx}{dt}=0.3\,,y=3\ \ ,x=4$

$V=Ay$

$V=x^2y$

$\frac{dv}{dt}=x^2.\frac{dy}{dt}+y.2x\frac{dx}{dt}$

$\frac{dv}{dt}=(4)^2.(-0.5)+(3).2(4).(0.3)$

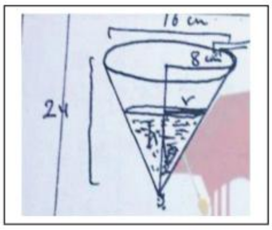
$=(16).(-0.5)+(24).(0.3)$

التغير في الحجم $=-8+7.2=-0.8\ cm^3/s$

(2/2019"تطبيقي")

س/ مرشح مخروطي قاعدته افقية ورأسه للاسفل ارتفاعه $24cm$ وطول قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير نصف قطر السائل في اللحظة التي يكون فيها نصف القطر $3\ cm$

sol :



نفرض حجم المخروط المائي = V

معدل الصب − معدل التسرب = $\frac{dv}{dt}$

$=5cm-1\ cm$

$=4\ cm$

نفرض نصف قطر المخروط المائي = r

المطلوب $\frac{dv}{dt}$ عندما $r=3$

ارتفاع المخروط المائي = h

$V=\frac{\pi}{3}r^2h\ \ \ldots\ldots\ldots(1)$

$\tan\theta=\frac{r}{h}=\frac{8}{24}$

$8h=24\,r$

$h=3r\ \ \ldots\ldots\ldots(2)$

ملاحظة :- يمكن ايجاد العلاقة من تشابه المثلثات

$\frac{r}{8}=\frac{h}{24}\quad\Rightarrow h=3r$

عوض (2) في (1)

$V=\frac{\pi}{3}\ \ r^2\ (3r)$

$V=\pi\,r^3$

$\frac{dv}{dt}=3\pi r^2\ \frac{dr}{dt}$

$4=3\,\pi\,(3)^2\frac{dr}{dt}$

$4=27\,\pi\frac{dr}{dt}$

$\therefore\ \frac{dr}{dt}=\frac{4}{27\,\pi}\quad cm/s$

("3/2019"تطبيقي")

س/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها $(96cm)$ يتمدد عرضها بمعدل $(2\ cm/s)$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة جد معدل النقصان في الطول وذلك عندما يكون طولها $(12\ cm)$.

sol :

لتكن A مساحة الصفيحة

x طول الصفيحة

y عرض الصفيحة

$$A = xy$$

$$96 = xy$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

$$0 = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{dx}{dt} = ? \quad , \quad x = 12$$

$$96 = 12y$$

$\rightarrow\ y = \frac{96}{12} = 8$ نعوضها في (1)

$$0 = 12(2) + 8\frac{dx}{dt}$$

$$0 = 24 + 8\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow\ 8\frac{dx}{dt} = -24$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-24}{8} = -3\ cm/s$$

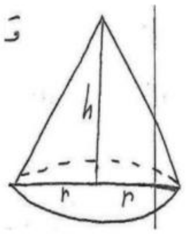
(1/2019 تطبيقي"اسئلة خارج القطر")

س/ يتسرب رمل ناعم من خزان على ارض مستوية مكونا مخروطا دائريا قائما بحيث ارتفاعه يساوي قطر قاعدته فاذا كان معدل التسرب $(25\ cm^3/s)$ جد معدل تزايد نصف قطر قاعدته عندما يساوي $(5\ cm)$

sol :

نفرض ارتفاع المخروط = h

نفرض قطر قاعدته = 2r



$$\because\ 2r = h \ \dots\dots\dots\dots (1)$$

المخروط $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \dots\dots\dots (2)$

نعوض (1) في (2)

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2(2r)$$

$$V = \frac{2\pi}{3}r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi}{3}.3r^2\frac{dr}{dt}$$

$$25 = 2\pi\,(5)^2\frac{dr}{dt}$$

$$25 = 50\pi\,\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{25}{50\pi} = \frac{1}{2\pi}cm/s$$

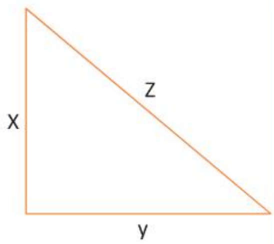
(1/2019)

س/ تحركت سيارتان السيارة الاولى باتجاه الشرق بسرعة $(40\ km/h)$ والثانية باتجاه الشمال بسرعة $(30\ km/h)$ جد معدل تغير المسافة بين السيارتين بعد ان تكون الاولى قطعت $(4\ Km)$ والثانية $(3km)$

نفرض المسافة باتجاه الشمال $= x$

ونفرض المسافة باتجاه الشرق $= y$

ونفرض المسافة بين السيارتين $= z$



$$z^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow z^2 = 9 + 16$$

$$\Rightarrow z^2 = 25 \ \Rightarrow z = 5$$

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dz}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \ \} \div 2$$

$$z\frac{dz}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}$$

$$5\frac{dz}{dt} = 3 * 30 + 4 * 40$$

$$5\frac{dz}{dt} = 90 + 160$$

$$\frac{dz}{dt} = 50\ \text{km/h}$$

ملاحظة :-

1) الرسم ان كان غير موجود يخصم من الطالب درجة واحدة

2) اذا كانت الفرضية معاكسة يرجى انتباه المصحح للتعويض مع التقدير

2-الاسئلة الوزارية حول "مبرهنة رول"

2011/ 1

س/ بيّن ان الدالة $F(x) = (x-1)^4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1,3]$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1 ,3] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 3) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$F(a)= F(-1)= (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$

$F(b)= F(3)= (3-1)^4 = (2)^4 = 16$

$\therefore F(-1)=F(3)=16$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$F'(x)= 4(x-1)^3(1) = 4(x-1)^3$

$\Rightarrow F'(c) = 4(c-1)^3$

$\Rightarrow F'(c) = 0$

$0= 4(c-1)^3) \div 4 \Rightarrow (c-1)^3 = 0$

$\Rightarrow c-1 = 0 \Rightarrow c = 1 \in (-1,3)$

2013/ 2

س/ باستخدام مبرهنة رول جد قيمة c للدالة $F(x)= x^4 + 2x^2$ حيث $x \in [-2,2]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-2, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-2, 2) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f'(-2) = 16 + 8 = 24$

$f(2) = 16 + 8 = 24$

$\rightarrow f(-2) = f(2)$

$f'(x) = 4x^3 + 4x$

$f'(c) = 0$

$\rightarrow 4c^3 + 4c = 0$

$\rightarrow 4c(c^2+1) = 0$

$\rightarrow 4c = 0$

$\rightarrow c = 0 \in (-2,2)$

$or \ \ c^2 + 1 = 0$ وهذا غير ممكن لانه مجموع مربعين

2012/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ أوجد قيمة C التي تعنيها مبرهنة رول

$F(x) = 2x + \frac{2}{x}, \quad x \in [\frac{1}{2}, 2]$

sol :

$\forall a \in [\frac{1}{2}, 2]$

الشرط الأول (الاستمرارية)

$\therefore$ F(a)= $2a+\frac{2}{a} \in R$ (الدالة معرفة عند $x = a$)

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \left(2x + \frac{2}{x}\right) = 2a + \frac{2}{a}$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = F(x) \Leftrightarrow a$ مستمرة عند F

لكن a تمثل كل عنصر من عناصر المجال ⇔ F مستمرة في الفترة $[\frac{1}{2}, 2]$

الشرط الثاني (قابلية الاشتقاق)

الدالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة $(\frac{1}{2}, 2)$

الشرط الثالث

$F(\frac{1}{2}) = 2(\frac{1}{2}) + \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$

$F(2) = 2(2) + \frac{2}{2} = 4 + 1 = 5$

$\therefore F(\frac{1}{2}) = F(2)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول

$F(x) = 2x + 2x^{-1}$

$\Rightarrow F'(x) = 2 - 2x^{-2} = 2 - \frac{2}{x^2}$

$\Rightarrow F'(c) = 2 - \frac{2}{c^2}$

$F'(C) = 0, 0 = 2 - \frac{2}{c^2}$

$\Rightarrow 2c^2 - 2 = 0 \Rightarrow 2c^2$

$= 2 \Rightarrow c^2 = 1, c = \pm 1$

$-1 \notin \left(\frac{1}{2}, 2\right)$ تهمل $\quad \therefore C = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

2013/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c
حيث $F(x)= 9x + 3x^2 - x^3$ $x \in [-1, 1]$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(1) = 9 + 3 - 1 = 11$

$f(-1) = -9 + 3 + 1 = -5$

$\because f(x) \neq f(-1)$

$\rightarrow$ نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث

2014/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ $F(x)= ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فاذا كانت $c = 2$, $c \in (-1, b)$ فجد قيمتي $a, b \in R$

sol :

بما ان الدالة تحقق مبرهنة رول فان $f(-1) = f(b)$

$f(-1) = a + 4 + 5 = a + 9$

$f(b) = ab^2 - 4b + 5$

$ab^2 - 4b + 5 = a + 9 \ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 2ax - 4$

$\rightarrow f'(c) = 0$

$\rightarrow 2ac - 4 = 0$

$\rightarrow 4a - 4 = 0$

$\rightarrow a = 1$ نعوض في (1)

$b^2 - 4b + 5 = 1 + 9$

$\rightarrow b^2 - 4b - 5 = 0$

$\rightarrow (b - 5)(b + 1) = 0$

either $b = 5$ OR $b = -1$ تهمل

(2014/ 2)(2016/ 2 "اسئلة خارج القطر")
(2020/تمهيدي"احيائي")

س/ بيّن ان الدالة $h(x)= x^3 - x$ تحقق مبرهنة رول على الفترة $x \in [-1, 1]$ ثم جد قيمة c ؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$h(a)= h(-1)= (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$

$h(b)= h(1)= (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$

$\therefore h(-1) = h(1) = 0$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$h'(x) = 3x^2 - 1$

$\Rightarrow h'(c) = 3c^2 - 1$

$h'(c) = 0$

$3c^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow 3c^2 = 1$

$\Rightarrow c^2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)$

2017/ 2 (اسئلة خارج القطر)

س/ برهن ان الدالة $f(x)= x^3 - 1$ على الفترة $[-1, 1]$ تحقق مبرهنة رول. ثم جد قيمة c ؟

Sol:

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 1] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 1) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(a) = f(-1) = (-1)^3 - 1 = -1 - 1 = -2$

$f(b) = f(1) = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$\because f(a) \neq f(b)$

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول لا يوجد قيمة C

2017/ 3 (اسئلة الموصل)

س/ هل ان f(x) تحقق مبرهنة رول؟ وإن حققتها جد قيمة c ؟

حيث $f(x)= x^2-4x+5,\ \ x\in\ [-1,5]$

sol:

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [5 ,1-] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (5 ,1-) لانها كثيرة الحدود.

$f(a)=f(-1)=(-1)^2-4(-1)+5=10$

$f(b)=f(5)=(5)^2-4(5)+5=10$

الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول

$f'(x)=2x-4$

$f'(c)=2c-4$

$f'(c)=0$

$4c-4=0$

$\Rightarrow 4c=4\Rightarrow c=1\in(-1,5)$

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اذا كانت $f(x)=ax^2-6x+4$ تحقق مبرهنة رول على الفترة [0 , K] وان $f(-1)=11$ جد $a,K\in R$, ثم جد (c) على تلك الفترة .

sol :

$f(x)=ax^2-6x+4 \qquad [0\,,k\,]$

$f(-1)=11$

جد $a\,,k\in R$

$11=a(-1)^2-6(-1)+4$

ثم جد (c) على الفترة

$11=a+6+4$

$a=11-10$

$a=1$

$f(x)=x^2-6x+4$

$f(0)=f(k)$ تحقق مبرهنة رول

$f(0)=4 \qquad f(k)=k^2-6k+4$

$4=k^2-6k+4$

$k^2-6k=0$

$k(k-6)=0$

$k=0$

$k=\ +6\quad [0\,,+6]$

$\exists\ c\in[0\,,6]$

$f^\backslash(c)=0$ لان تحقق مبرهنة رول

$f^\backslash(x)=2x-6$

$f^\backslash(c)=2c-6\ =0$

$c=3$

2013/ 1 (اسئلة خارج القطر)

س/ ابحث مبرهنة رول للدالة التالية وان تحققت جد قيمة c

$x\in\ [-1,1]$ حيث $F(x)=9x+3x^2-x^3$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [1 ,1-] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (1 ,1-) لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث/

$f(1)=9+3-1=11$

$f(-1)=-9+3+1=-5$

$\because f(x)\neq f(-1)$

$\rightarrow$ نظرية رول غير متحققة لعدم تحقق الشرط الثالث

1/2020

س/ بين هل الدالة $f(x)=(2-x)^2\ \ x\in[0\,,4]$ تحقق مبرهنة رول ؟ ثم جد قيمة c الممكنة

sol :

1) الدالة f مستمرة على الفترة $[0\,,4]$ لانها كثيرة الحدود

2) الدالة f قابلة للاشتقاق على الفترة $(0\,,4)$ لانها كثيرة الحدود

3)

$f(0)=(2-0)^2=2^2=4$

$f(x)=(2-4)^2=(-2)^2=4$

$\therefore f(0)=f(4)$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول ضمن الفترة المعطاة

$\therefore$ توجد $c\in(0\,,4)$ بحيث $f'(c)=0$

$f'(x)=2(2-x)(-1)$

$f'(c)=-2(2-c)$

$f'(c)=0\Rightarrow\ -2(2-c)=0]\div(-2)$

$2-c=0\ \Rightarrow\ c=2\in(0{,}4)$

(1/2020"تطبيقي") (2/2020)

س/ بين هل ان الدالة $f(x) = x^3 - 9x\ ,\ x \in [-3\,,3]$
تحقق مبرهنة رول ثم جد قيمة c الممكنة

sol :

$f(x) = x^3 - 9x \quad , x \in [-3\,,3]$

1) الدالة مستمرة على الفترة $[-3\,,3]$ لانها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-3\,,3)$ لانها كثيرة الحدود

$f(a) = f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$

$f(b) = f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$

$\because f(a) = f(b)$

$\therefore$ الدالة المعطاة تحقق شروط مبرهنة رول

$f'(x) = 3x^2 - 9 \;\rightarrow\; f'(c) = 3c^2 - 9$

$3c^2 - 9 = 0\,] \div 3 \;\Rightarrow\; c^2 - 3 = 0$

$\left(c - \sqrt{3}\right)\left(c + \sqrt{3}\right) = 0$

أما $c = \sqrt{3} \in (-3\,,3)$

أو $c = -\sqrt{3} \in (-3,3)$

3-الاسئلة الوزارية حول "مبرهنة القيمة المتوسطة"

1 /2012

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $F(x)= x^2 - x + 1$ على الفترة $[-1, 2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ يتحقق الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [2 ,1-] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ يتحقق الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (2 ,1-) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$F'(x)=2x - 1 \Rightarrow F'(c)= 2c - 1$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{F(2)-F(-1)}{2-(-1)} = \frac{(3)-(3)}{2+1} = \frac{0}{3} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$2c - 1 = 0$

$\Rightarrow 2c - 1 = 0$

$\Rightarrow 2c = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1, 2)$

(2014/تمهيدي" خارج القطر")(1/2016)(2017/تمهيدي) (1/2018)

س/ اذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ وكانت $f: [0, b] \to R$ f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b

sol :

ميل المماس/

$F'(x) = 3x^2 - 4x$

$\Rightarrow F'(c) = 3c^2 - 4c$

$\Rightarrow F'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} = -4$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{F(b)-F(0)}{b-0} = \frac{b^3-4b^2-0}{b} = b^2 - 4b$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$\therefore b^2 - 4b = -4$

$\to b^2 - 4b + 4 = 0$

$\to (b-2)^2 = 0$

$\to b = 2$

(1/2014)(1/2015)(2/2019"تطبيقي")(3/2019"تطبيقي")

س/ برهن ان الدالة $f(x) = x^2 - 6x + 4$ تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة وجد قيمة C على [-1,7]

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [7 ,1-] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (7 ,1-) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$f'(x) = 2x - 6 \ \to f'(c) = 2c - 6$

$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{F(7)-F(-1)}{7+1} = \frac{11-11}{8} = \frac{0}{8} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$0 = 2c - 6 = 0$

$\Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$

4/2014 (اسئلة الانبار)

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $h(x) = x^2 - 4x + 5$ على الفترة $[-1, 5]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [5 ,1-] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (5 ,1-) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$h'(x)=2x-4 \Rightarrow h'(c) = 2c - 4$ ميل المماس

$\frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(5) - F(-1)}{5 - (-1)}$

$= \frac{(25-20+5)-(1+4+5)}{5+1} = \frac{10-10}{6} = \frac{0}{6} = 0$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c-4=0$

$\Rightarrow 2c = 4$

$\Rightarrow c = 2 \in (-1, 5)$

3/2016" اسئلة خارج القطر"

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = x^2 - 4x + 5$ على الفترة $[-1, 2]$ وان تحققت جد قيم c الممكنة؟

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لانها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لانها كثيرة الحدود.

ميل المماس/

$f'(x) = 2x - 4$

$\Rightarrow f'(c) = 2c - 4$ ميل المماس

$\frac{h(b)-h(a)}{b-a} = \frac{1-10}{2-(-1)} = \frac{-9}{3} = 3$ ميل الوتر

ميل المماس = ميل الوتر

$2c - 4 = -3$

$\Rightarrow 2c = -3 + 4$

$\Rightarrow 2c = 1$

$\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (-1, 2)$

3/2017

س/ اذا كانت $f: [0, n] \to R \quad f(x) = x^2 - 2x$ وتحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = 5$ فجد قيمة n

sol :

$F'(x) = 2x - 2$

$\Rightarrow F'(c) = 2c - 2$

$f'(5) = 2(5) - 2 = 10 - 2 = 8$ ميل المماس

∵تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة⟸ ميل المماس = ميل الوتر

$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = \frac{F(n) - F(0)}{n - 0}$

$= \frac{n^2-2n-0}{n} = \frac{n(n-2)}{n} = n - 2$ ميل الوتر

ميل المماس= ميل الوتر

$\therefore n - 2 = 8$

$\Rightarrow n = 10$

2018/تمهيدي

س/ اختبر امكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة على الفترة المعطاة للدالة وان تحققت جد قيم c الممكنة حيث

$$f(x) = \frac{4}{x+2} \quad , \quad x \in [-1, 2]$$

sol :

الشرط الاول/ الدالة مستمرة على الفترة المغلقة [-1, 2] لان $-2 \notin [-1, 2]$

الشرط الثاني/ الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (-1, 2) لان $-2 \notin [-1, 2]$

الدالة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

$f(x) = \frac{4}{x+2}$

$f(-1) = \frac{4}{-1+2} = \frac{4}{1} = 4$

$f(2) = \frac{4}{2+2} = \frac{4}{4} = 1$

$f(x) = 4(x+2)^{-1}$

$f'(x) = 4(x+2)^{-2}(1)$

$\to f'(x) = \frac{-4}{(x+2)^2}$

$f'(c) = \frac{-4}{(c+2)^2}$ ميل المماس

ميل المماس = ميل الوتر

$f'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{1-4}{2+1}$

$\to \frac{-4}{(c+2)^2} = \frac{-3}{3}$

$\frac{-4}{(c+2)^2} = -1$

$\to (c+2)^2 = 4$ بجذر الطرفين

$C + 2 = \pm 2$

اما $C + 2 = 2 \to C = 0 \in [-1, 2]$

او $C + 2 = -2 \to C = -4 \notin [-1, 2]$

4-الاسئلة الوزارية حول "التقريب باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة"

2 /1997

س/ مربع مساحته $50\ cm^2$ جد طول ضلعه بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات.

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow \quad 50=m^2 \rightarrow \quad m=\sqrt{50}$

$m(x)=\sqrt{x}$ الدالة

$b=50 \ , \quad a=49$

$h=b-a=50-49=1$

$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)=\sqrt{49}=7$ نعوض في الدالة

$m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{2(7)}=\frac{1}{14}=0.071$ نعوض في المشتقة

$m(a+h)\cong m(a)+h.m'(a)$ القانون

$m(50)\cong 7+(1)(0.071)$

$\cong 0.7+(0.01)(0.714)$

$\Rightarrow m(0.50)\cong 7+0.071\cong 7.071cm$

$\cong 7.071\ cm$

---

2 /2013)(1 /1999

س/ مخروط دائري قائم حجمه $210\pi\ cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10\ cm$.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعده المخروط (r)

$v=\frac{\pi}{3}r^2h \rightarrow 210\pi=\frac{\pi}{3}r^2(10)$

$\rightarrow r^2=63 \rightarrow r=\sqrt{63}$ الدالة

$b=63 \ , \ a=64,$

$h=b-a=63-64=-1$

$r'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$r(a)=\sqrt{64}=8$ نعوض في المشتقة

$r'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{64}}=\frac{1}{16}=0.0625$

$r(a+h)\simeq r(a)+h.r'(a)$

$r(63)\simeq 8+(-1).(0.0625)$

$\simeq 8-0.0625$

$\simeq 7.9375$

1998/ 2)(2015/ 4 "اسئلة النازحين")

س/ لتكن $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$ جد $f(1.02)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x)=\sqrt[3]{2x+6}=(2x+6)^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b=1.02 \ , \ a=1,$

$h=b-a=1.02-1=0.02$

$F'(x)=\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+6)^2}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[3]{2(1)+6}=\sqrt[3]{8}=2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2a+6)^2}}=\frac{2}{3(4)}=\frac{1}{6}=0.16$ نعوض في المشتقة

$F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

$F(1.02)\cong F(2)+hF'(0.02\ .\ 0.16)$

$\cong 2+(0.0032)\cong 2.0032$

2000/ 1

س/ مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته جد القيمة التقريبية لتغير حجمه اذا تغير ارتفاعه من $4cm$ الى $4.01cm$ باستخدام مفهوم التفاضلات.

Sol:

نفرض ان نصف قطر قاعده المخروط(r) والارتفاع y حيث انy=r

$v=\frac{\pi}{3}r^2y$

$\rightarrow v=\frac{\pi}{3}y^2y$

$\rightarrow v_{(y)}=\frac{\pi}{3}r^3$ الدالة

$b=4.01 \ , \ a=4,$

$h=b-a=4.01-4=0.01$

$v'_{(y)}=\pi y^2$ المشتقة

$v'_{(a)}=\pi a^2$

$=\pi(4)^2=16\pi$ نعوض في المشتقة

$h.v'(a)\simeq(16\pi)(0.01)$

$\simeq 0.16\pi cm^3$ القيمة التقريبية لتغير الحجم

2001/ 2

س/ جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt[3]{126}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b=126$, $a=125$,

$h = b - a = 126 - 125 = 1$

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{125} = 5$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(126) \cong 5 + (0.013)(1)$

$\cong 5.013$

2003/ 1

س/ جد باستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية $\sqrt{99}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b = 99$, $a = 100$,

$h = b - a$

$= 99 - 100 = -1$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{100} = 10$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20} = 0.05$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(99) \cong 10 + (-1)(0.05) \cong 9.95$

2005/ 1

س/ باستخدام مفهوم التفاضلات جد حجم كرة طول نصف قطرها 2.99 cm بصورة تقريبية.

Sol:

حجم الكرة $= \frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^2

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3 \to v = \frac{4\pi}{3}(2.99)^3$

$b = 2.99$, $a = 3$,

$h = b - a = 2.99 - 3 = -0.01$

$v'(x) = 4\pi x^2$ المشتقة

$v(a) = \frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a) = 4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h) \cong v(a) + hv'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 36\pi + (-0.01)(36\pi)$

$\cong 35.64\pi\ cm^3$

2002/ 2

س/ لتكن $f(x) = \sqrt{4x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x) = \sqrt{4x+5}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{4}{2\sqrt{4x+5}} = \frac{2}{\sqrt{4x+5}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{4(1)+5} = \sqrt{9} = 3$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{2}{\sqrt{4a+5}} = \frac{2}{\sqrt{4+5}} = \frac{2}{3} = 0.6$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 3 + (0.001)(0.6)$

$\cong 3.0006$

1/2004

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{3x+5}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{3x+5} = (3x+5)^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{1}{3}(3x+5)^{\frac{-2}{3}}(3) = \frac{3}{3\sqrt[3]{(3x+5)^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{3(1)+5} = \sqrt[3]{8} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(3a+5)^2}} = \frac{1}{4} = 0.25$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 2 + (0.00025) \cong 2.0025$

2005/ 2

س/ لتكن $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد $f(1.001)$ بصورة تقريبية

Sol:

$f(x) = \sqrt{3x+1}$ الدالة

$b = 1.001$, $a = 1$,

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$F'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{3(1)+1} = \sqrt{4} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} = \frac{3}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} = 0.75$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 2 + (0.001)(0.75)$

$\cong 2.00075$

2006/ تمهيدي)(2016/ 2

س/ جد حجم كرة طول نصف قطرها 3.001 cm بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات.

Sol:

حجم الكرة = $\frac{4\pi}{3}$ (نصف القطر)^3

$v = \frac{4\pi}{3}(3.001)^3$

$v(x) = \frac{4\pi}{3}x^3$

b=3.001, a=3 ,

$h = b - a = 3.001 - 3 = -0.001$

$v'(x)=4\pi x^2$ المشتقة

$v(a)=\frac{4\pi}{3}(3)^3 = 36\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a)=4\pi a^2 = 4\pi(3)^2 = 36\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h) \cong v(a) + h.v'(a)$ القانون

$F(1.001) \cong 36\pi + (0.001)(36\pi) \cong 36.036\pi\ cm^3$

2007/ 1

س/ جد بصورة تقريبية وباستخدام مفهوم التفاضلات طول ضلع مربع مساحته $101\ cm^2$

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow 101=m^2 \rightarrow m=\sqrt{101}$

$m(x) = \sqrt{x}$ الدالة

b=101 , a=100

$h = b - a = 101 - 100 = 1$

$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)=\sqrt{100} = 10$ نعوض في الدالة

$m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{2(10)} = \frac{1}{20} = 0.05$ نعوض في المشتقة

$m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

$m(101) \cong 10 + (1)(0.05)$

$\cong 10 + 0.05$

$\cong 10.05\ cm$

2008/ 1

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{0.98}$

$sol: f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

$b = 0.98$, $a = 1$,

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$F'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{1} = 1$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2} = 0.5$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(0.98) \cong 1 + (-0.02)(0.5)$

$\cong 1 - 0.1$

$\cong 0.99$

2006/ 2

س/ باستخدام التفاضلات جد القيمة التقريبية للعدد $\sqrt[3]{-9}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = -9$, $a = -8$,

$h = b - a = -9 + 8 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[3]{-8} = -2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-8)^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$ نعوض في المشتقة

المشتقة$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(-9) \cong -3 + (0.083)(-1)$

$\cong -2 - 0.083$

$\cong -2.083$

2008/ تمهيدي

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{143}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x}$ الدالة

b=143 , a=144,

$h = b - a = 143 - 144 = -1$

$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt{144} = 12$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{144}} = \frac{1}{24} = 0.04$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(143) \cong 12 + (-1)(0.04)$

$\cong 11.96$

2008/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{13.86}$

$sol: f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

$b = 13.86$, $a = 16$,

$h = b - a = 13.86 - 16 = -2.14$

$F'(x)=\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[4]{16} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{32} = 0.031$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(13.86) \cong 2 + (-2.14)(0.031)$

$\cong 2 - 0.0663 \cong 1.9347$

2009/ تمهيدي

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات $\sqrt{15^{-1}}$

sol:

$f(x) = \sqrt{x^{-1}} = x^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$ الدالة

$b=15$, $a=16$, $h=b-a = 15 - 16 = -1$

$F'(x) = -\frac{1}{2}x^{\frac{-3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ المشتقة

$F(a) = \frac{1}{\sqrt{16}} = 0.25$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} = \frac{-1}{2\sqrt{16^3}} = \frac{-1}{128} = -0.007$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(15) \cong 0.25 + (-1)\,(-0.007)$

$\cong 0.25 + (0.007) \cong 0.257$

2009/ 1

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام مفهوم التفاضلات $\sqrt[4]{0.008}$

sol:

$f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

$b = 0.0080$, $a = 0.0081$,

$h = b - a = 0.0080 - 0.0081 = -0.0001$

$F'(x) = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[4]{0.0081} = 0.3$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{(0.0081)^3}} = \frac{1}{0.108} = 9$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(0.008) \cong 0.3 + (-0.0001)\,(9)$

$\cong 0.3 + (-0.0009) \cong 0.2991$

(2011/ 1 "خارج القطر") (2014/ تمهيدي)

س/ جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

sol: الدالة

$F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

$b=9$, $a=8$, $h=b-a = 9 - 8 = 1$

$F(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ المشتقة

$F(8) = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2} = 0.5$ نعوض في الدالة

$F'(8) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{2^4}} = -\frac{1}{3(16)} = -\frac{1}{48} = -0.0208$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(9) \cong F(8) + hF'(8)$ (التعويض في القانون)

$\Rightarrow F(9) \cong 0.5 + (1)(-0.0208) \cong 0.5 - 0.0208$

$\Rightarrow F(9) \cong 0.4792$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \cong 0.792$

(2008/ 2)(2016/ تمهيدي)

س/ جد بصورة تقريبية $\sqrt[3]{26}$ باستخدام التفاضلات

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b=26$, $a=27$, $h=b-a = 26 - 27 = -1$

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{27} = 3$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(26) \cong 3 + (0.037)\,(-1) \cong 3 - 0.037 \cong 2.963$

2010/ تمهيدي

س/ مكعب حجمه $124\ cm^3$ جد وباستخدام التفاضلات وبصورة تقريبية طول ضلعه.

sol: حجم المكعب =(طول الضلع)^3

$v(m)=m^3 \rightarrow 124=m^2 \rightarrow m=\sqrt[3]{124}$

$m(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = 124$, $a = 125$

$h = b - a$

$= 124 - 125 = -1$

$m'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$m(a) = \sqrt[3]{125} = 5$ نعوض في الدالة

$m'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{125^2}} = \frac{1}{75} = 0.013$ نعوض في المشتقة

$m(a+h) \cong m(a) + h.m'(a)$ القانون

$m(124) \cong 5 + (0.013)(-1)$

$\cong 5 - (0.013) \cong 4.987$

2011/ 1

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.8}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

$b = 7.8$, $a = 8$, $h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{8} = 2$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{12} = 0.083$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(7.8) \cong 2 + (0.083)\,(-0.2)$

$\cong 2 - 0.0166 \cong 1.9834$

2012/ تمهيدي

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{63}$

sol:

$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=63 , a=64, h=b-a = 63 −64 = -1

$F'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a)=\sqrt[3]{64}=4$ نعوض في الدالة

$F'(a)=\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{64^2}}=\frac{1}{48}=0.0208$ نعوض في المشتقة

$F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

$F(63)\cong 4+(-1)(0.0208)$

$\cong 4-0.01208\cong 3.9792$

2012 /2

س/ جد تقريباً باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها $\sqrt{\frac{1}{2}}$

sol:

$\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0.5}=\sqrt{0.50}$

$F(x)=\sqrt{x}$ الدالة

b=0.50 , a=0.49, h=b-a = 0.50 – 0.49 = 0.01

$F'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$F(0.49)=\sqrt{0.49}=0.7$ نعوض في الدالة

$F'(0.49)=\frac{1}{2\sqrt{0.49}}=\frac{1}{2(0.7)}=\frac{1}{1.4}=0.714$ نعوض في المشتقة

$F(a+h)\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

$F(0.50)\cong F(0.49)+hF'(0.49)$

$\cong 0.7+(0.01)(0.714)$

$\Rightarrow F(0.50)\cong 0.7+0.00714\cong 0.70714$

$\therefore \sqrt{\frac{1}{2}}\cong 0.70714$

2013 /1

س/ مربع مساحته $48\ cm^2$ جد بصورة تقريبية طول ضلعه .

sol :

مساحة المربع =(طول الضلع)^2

$A=m^2 \rightarrow 48=m^2 \rightarrow m=\sqrt{48}$

$m(x)=\sqrt{x}$ الدالة

b = 48 , a = 49

h = b − a = 48 − 49 = −1

$m'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ المشتقة

$m(a)=\sqrt{49}=7$ نعوض في الدالة

$m'(a)=\frac{1}{2\sqrt{49}}=\frac{1}{2(7)}=\frac{1}{14}=0.071$ نعوض في المشتقة

$m(a+h)\cong m(a)+h.m'(a)$ القانون

$m(48)\cong 7+(-1)(0.071)$

$\Rightarrow m(0.50)\cong 7-0.071\cong 6.929\ cm$

$\cong 7.071\ cm$

2014/ 1

س/ كرة نصف قطرها (6 cm) طليت بطلاء سمكه (0.1 cm) جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

:sol

كمية الطلاء (حجم الطلاء) = حجم الكرة مع الطلاء – حجم الكرة الاصلي (بدون طلاء)

v = حجم الطلاء (كمية الطلاء)

r = نصف قطر الكرة مع الطلاء

6 = نصف قطر الكرة الاصلي

$\pi=\frac{22}{7}$ النسبة الثابتة

$v(r)=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi(6)^3$

b= 6+0.1=6.1

h= b - a = 6.1- 6 = 0.1 ∴a=6

$v'(r)=\frac{4}{3}\pi(3r^2)=4\pi r^2$

$v'(r)=v'(6)=4\pi(6^2)=144\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

$h\,v'(a)=h\,v'(r)$

$=h\,v'(6)=0.1(144\pi)=14.4\pi\ cm^3$

2015/ 1

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد حجم مخروط دائري قائم بصورة تقريبية , علما ان طول قطر قاعدته يساوي ارتفاعه ويساوي 3.99 cm

Sol:

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ × مساحةالقاعدة × الارتفاع

$=\frac{\pi}{3}$ (نصف القطر)^2 × الارتفاع

$v=\frac{\pi}{3}r^2y$,

$\because y=2r$

$\rightarrow r=\frac{1}{2}y$

$\rightarrow v(y)=\frac{\pi}{12}y^3$

$b=3.99,\ a=4,$

$h=b-a=3.99-4=-0.01$

$v'(x)=\frac{\pi}{4}y^2$ المشتقة

$v(a)=\frac{\pi}{12}(4)^3=\frac{64}{12}\pi=5.33\pi$ نعوض في الدالة

$v'(a)=\frac{\pi}{4}(a)^2=\frac{\pi}{4}(4)^2=4\pi$ نعوض في المشتقة

$v(a+h)\cong v(a)+h.v'(a)$ القانون

$v(3.99)\cong 5.3\pi+(-0.01)(4\pi)$

$=5.33\pi-0.04$

$\cong 5.29\pi\ cm^3$

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد القيمة التقريبية $(1.01)^5+3(1.01)^{\frac{1}{3}}+2$

Sol:

$f(x)=x^5+3\sqrt[3]{x}+2=x^5+3x^{\frac{1}{3}}+2$ الدالة

b=1.01 , a=1,

h=b-a = 1.01 –1 = 0.01

F´(x)= $5x^4+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

F(a)= $1+3+2=6$ نعوض في الدالة

F´(a)=$5a^4+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}=5+1=6$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

F(1.01) $\cong 6+(0.01)\,(6)\cong 6+0.06\cong 6.06$

2015/ 2

س/ اذا كان $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغير التقريبي للدالة اذا تغيرت x من 4 الى 4.01

Sol:

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{-1}{2}}$ الدالة

$b=4.01$, $a=4$,

$h=b-a=4.01-4=0.01$

F´(x)=$\frac{-1}{2}x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$ المشتقة

F´(a) $=\frac{-1}{2\sqrt{4^3}}=\frac{-1}{2\sqrt{64}}=\frac{-1}{16}=-0.06$ نعوض في المشتقة

$hF'(a)\cong(0.01).(-0.06)$

$\cong -0.0006$ مقدار التغير التقريبي

2015/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من125 الى 125.06 فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

Sol:

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$ الدالة

$b=125.06$, $a=125$,

$h=b-a=125.06-125=0.06$

F´(x)=$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ المشتقة

F´(a) $=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{125}}=\frac{2}{15}=0.13$ نعوض في المشتقة

$hF'(a)\cong(0.06).(0.13)$

$\cong 0.0078$ مقدار التغير التقريبي

2015/ 3

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصوره تقريبية $\sqrt[3]{7.9}$

Sol: $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=7.9 , a=8,

h=b-a = 7.9 –8 = -0.1

F´(x)=$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

F(a)=$\sqrt[3]{8}=2$ نعوض في الدالة

F´(a)=$\frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\frac{1}{12}=0.083$ نعوض في المشتقة

F(a+h) $\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

F(7.9) $\cong 2+(-0.1)\,(0.083)$

$\cong 2-0.0083\cong 1.9917$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{80}-\sqrt[4]{80}$

Sol:

$f(x)=\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

$b=80$, $a=81$, $h=b-a=80-81=-1$

F´(x)=$\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}-\frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

F(a)=$\sqrt{81}-\sqrt[4]{81}=9-3=6$ نعوض في الدالة

F´(a)=$\frac{1}{2\sqrt{81}}-\frac{1}{4\sqrt[4]{81^3}}$ نعوض في المشتقة

$=\frac{1}{18}-\frac{1}{108}=0.046$

F(a+h) $\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

F(81) $\cong 6+(-1)\,(0.046)$

$\cong 6-0.046\cong 5.954$

2017/ 1

س/ جد القيمة التقريبية للمقدار $(15.6)^{\frac{-1}{4}}$ مستخدماً نتيجة القيمة المتوسطة

Sol:

$f(x)=x^{\frac{-1}{4}}$ الدالة

b=15.6 , a=16, h=b-a = 15.6 –16 = -0.4

F´(x)= $\frac{-1}{4}x^{\frac{-5}{4}}$ المشتقة

F(a)= $(16)^{\frac{-1}{4}}=(2^4)^{\frac{-1}{4}}$ نعوض في الدالة

$=2^{-1}=\frac{1}{2}=0.5$

F´(a)= $\frac{-1}{4}(16)^{\frac{-5}{4}}=\frac{-1}{4}(2^4)^{\frac{-5}{4}}$ نعوض في المشتقة

F´(a)= $\frac{-1}{4}*\frac{1}{32}\rightarrow F'(a)=\frac{-1}{128}\rightarrow F'(a)=-0.0078$

F(a+h) $\cong F(a)+hF'(a)$ القانون

F(15.6) $\cong 0.5+(-0.4)\,(-0.0078)$

$\cong 0.5+0.00312\cong 0.50312$

2017/ 2

س/ اذا تغيرت x من 32 إلى 32.06 جد مقدار التغير التقريبي للدالة

$f(x) = \sqrt[5]{x}$

Sol:

$f(x) = \sqrt[5]{x} = x^{\frac{1}{5}}$ الدالة

b=32.06 , a=32,

h=b-a = 32.06 –32 = 0.06

$F'(x) = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}$ المشتقة

$F'(32) = \frac{1}{5}\left(2^5\right)^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16} = \frac{1}{80} =$ نعوض في المشتقة

$F'(32) = 0.0125$

$hF'(a) \cong (0.06).(0.0125)$

$\cong 0.0075$ مقدار التغير التقريبي

2017/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ كرة نصف قطرها (8 cm) طليت بطلاء سمكه (0.1 cm) جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة؟

sol :

$v = \frac{4}{3}\pi r^3$

$a = 8 \quad , b = 8.1$

$, h = b - a , h = 8.1 - 8 = 0.1$

$v'(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$

$v'(r) = v'(8) = 4\pi(8^2)$

$\rightarrow v'(a) = 256\pi$

حجم الطلاء بصورة تقريبية

حجم الطلاء=h v´(a)=0.1 $* (256\pi)$

$= 25.6\pi\ cm^3$

ملاحظة/ ممكن ان يحل الطالب حسب

حجم الطلاء =حجم الكرة مع الطلاء-حجم الكرة الاصلي

ويحل ويكون الناتج نفس الشيء فلا يحاسب الطالب.

2018/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد القيمة التقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة $\sqrt[3]{26}+2$

Sol: $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ الدالة

b=26 , a=27,

h=b-a = 26 –27 = -1

$F'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt[3]{27} = 3$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27^2}} = \frac{1}{27} = 0.037$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(26) \cong 3 + (0.037)(-1)$

$\cong 3 - 0.037$

$\cong 2.963$

(2017/ 1 اسئلة الموصل)(1/2019"تطبيقي")

س/ جد بصوره تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة $\sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

Sol:

$f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{4}}$ الدالة

b=17 , a=16,

h=b-a = 17 –16 = 1

$F'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} + \frac{1}{4}x^{\frac{-3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$ المشتقة

$F(a) = \sqrt{16} - \sqrt[4]{16} = 4 + 2 = 6$ نعوض في الدالة

$F'(a) = \frac{1}{2\sqrt{16}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} = 0.156$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(17) \cong 6 + (1)(0.156)$

$\cong 6 + 0.156 \cong 6.156$

2018/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة, جد تقريباً مناسباً لـ $\frac{1}{\sqrt[3]{28}}$

sol: $F(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ الدالة

b=28 , a=27, h=b-a = 28 – 1 = 1

$F(x) = x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow F'(x) = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3\sqrt[3]{x^4}}$ المشتقة

$F(27) = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3} = 0.333$ نعوض في الدالة

$F'(27) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{27^4}} = \frac{-1}{3(81)} = \frac{-1}{243} = -0.004$ نعوض في المشتقة

$F(a+h) \cong F(a) + hF'(a)$ القانون

$F(28) \cong F(27) + hF'(27)$ (التعويض في القانون)

$\Rightarrow F(28) \cong 0.333 + (1)(-0.004) \cong 0.333 - 0.004$

$\Rightarrow F(28) \cong 0.329$

$\therefore \frac{1}{\sqrt[3]{28}} \cong 0.329$

(1/2019)

س/ اسطوانة دائرية قائمة ارتفاعها يساوي نصف قطر قاعدتها فاذا كان نصف القطر يساوي $(2.97\ cm)$ جد الحجم بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة ؟

Sol:

$r =$ نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة

$h =$ ونفرض ارتفاعل الاسطوانة

$h = r$

$b = 2.97$ Let $a = 3$

$\therefore h = b - a \Rightarrow h = 2.97 - 3 \qquad \therefore h = -0.03$

$v = \pi r^2 h$

$v = \pi r^3$

$v(30) = 27\pi$

$v` = 3\pi r^2$

$v`(3) = 27\pi$

$v(2.97) \cong v(3) + hv`(3)$

$\cong 27\pi - (0.03) * 27\pi$

$\cong 27\pi - 0.81\pi$

$\cong 26.19\pi\ cm^2$

(1/2019)"اسئلة خارج القطر"

س/ مستطيل بعداه $\sqrt{143}$, $\sqrt[3]{28}$ جد مساحته بصورة تقريبية باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة

Sol:

1) نجد طول المستطيل $\sqrt{143}$

$f(x) = \sqrt{x} \qquad \begin{Bmatrix} b = 143 \\ a = 144 \end{Bmatrix} h = -1$

$f(a) = 12$

$f^{\backslash}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad f^{\backslash}(a) = \frac{1}{24}$

$\therefore \sqrt{143} \cong f(a) + hf^{\backslash}(a)$

$\cong 12 - \frac{1}{24}$

$\cong 11\frac{23}{24} \cong 11.95$

2) نجد عرض المستطيل $\sqrt[3]{28}$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \qquad \begin{Bmatrix} b = 28 \\ a = 27 \end{Bmatrix} h = 1$

$f(a) = 3 \quad \Rightarrow f^{\backslash}(a) = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$

$f^{\backslash}(a) = \frac{1}{3(3)^2} = \frac{1}{27}$

$\sqrt{28} \cong f(a) + h * f^{\backslash}(a)$

$\cong 3 + \frac{1}{27} = 3\frac{1}{27} \cong 3.03$

$A = 11.95 * 3.03$

$= 36.20\ unit^2$

(3/2019)

س/ لتكن $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من (8) الى (8.06) مامقدار التغير التقريبي للدالة ؟

Sol:

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

$a = 8 , b = 8.06$

$h = b - a = 0.06$

$f^{\backslash}(x) = \frac{2}{3}\, x^{\frac{-1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f^{\backslash}(x) = \frac{2}{3\, x^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \quad f^{\backslash}(8) = \frac{2}{3(8)^{\frac{1}{3}}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\cancel{2}}{3(\cancel{2^3})^{\frac{1}{3}}}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \cong 0.333$

مقدار التغير التقريبي $\cong hf^{\backslash}(a)$

$\cong (0.06)\left(\frac{1}{3}\right)$

$\cong 0.02$

(2/2019)

س/ جد بصورة تقريبية باستخدام التفاضلات المساحة السطحية لمكعب طول ضلعه $(1.99\ cm)$.

Sol:

المساحة السطحية = مساحة وجه واحد * 6

1) $f(x) = 6x^2$

2) لتكن $a = 2 , b = 1.99 \ , \ h = b - a \ , \ h = 1.99 - 2 = -0.01$

3) $f(a) = 6(2)^2 = 24$

4) $f^{\backslash}(x) = 12x$

$f^{\backslash}(a) = 12(2) = 24$

$\therefore \quad f(a) \cong f(a) + h * f^{\backslash}(a)$

$\cong 24 + (-0.01)(24)$

$\cong 24 - 0.24$

$\cong 23.76\ cm^2$

(2/2020)"تطبيقي"

س/ مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته ، فإذا كان ارتفاعه يساوي (2.98 cm)، جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

نفرض ارتفاع المخروط = y

نفرض نصف قطر المخروط = r

$V = \frac{\pi}{3} r^2 . y$

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{y}{2}\right)^2 . y$

$y = 2r \ \Rightarrow r = \frac{y}{2}$

$V = \frac{\pi}{3} y^3$

$a = 3 , b = 2.98 \ , \ h = -0.02$

$V(a) = \frac{\pi}{4}(3)^3$

$= \frac{\pi}{12} . 27 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$

$V' = \frac{\pi}{4} y^2$

$V'(3) = \frac{\pi}{4}(3)^2 = \frac{9\pi}{4} = 2.25\pi$

$V(a+h) \cong V(a) + hV'(a)$

$\cong 2.25\pi + (-0.02)(2.25\pi)$

$\cong 2.25\pi - 0.045\pi$

$= 2.205\ \pi\ cm^3$

2020/تمهيدي"تطبيقي"

س/ مكعب طول حرفه $(9.98\ cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

Sol:

نفرض طول ضلع المكعب $= x$

وليكن حجم المكعب $= V$

$V(x) = x^3 \qquad x \in [9.98 , 10]$

$V(10) = (10)^3 = 1000\ cm^3$

$V'(x) = 3x^2$

$V'(10) = 3(10)^2 = 300$

$V(a+h) = V(a) + h\,V'(a)$

$V(9.98) = 1000 + (-0.02)(300)$

$= 1000 - 6 = 994\ cm^3$

$$\boxed{\begin{array}{c} a = 10 \\ b = 9.98 \\ h = -0.02 \end{array}}$$

1/2020"تطبيقي"

س/ باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية

$(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

Sol:

$(1.01)^5 + 3(1.01)^{\frac{1}{3}} + 2$

$b = 1,01$

$a = 1$

$h = 1.01 - 1 = 0.01$

$f(x) = x^5 + 3x^{\frac{1}{3}} + 2$

$f(1) = 1^5 + 3(1)^{\frac{1}{3}} + 2 = 6$

$f'(x) = 5x^4 + x^{\frac{-2}{3}} = 5x^4 + \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(1) = 5(1)^4 + \frac{1}{(1)^{\frac{2}{3}}} = 5 + 1 = 6$

$f(b) \cong f(a) + h\,f'(a)$

$f(1.01) \cong 6 + (0.01)(6)$

$= 6 + 0.06$

$= 6.06$

1/2020

س/ كرة حجمها $\frac{260\,\pi}{3}\ cm^3$, جد طول نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

Sol:

نفرض نصف قطر الكرة $= r$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\frac{260\,\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\therefore r^3 = 65 \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{65}$

$b = 65\ , a = 64\ , \quad h = 65 - 64 = 1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

$f(a) = \sqrt[3]{64} \Rightarrow \ f(a) = 4$

$f'(x) = \frac{1}{3}\,x^{\frac{-2}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3\,x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) = \frac{1}{3(64)^{\frac{2}{3}}}$

$f'(a) = \frac{1}{3(4^3)^{\frac{2}{3}}} \quad \Rightarrow f'(a) = \frac{1}{48} = 0.02$

$\because f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$

$\therefore f(b) \cong 4 + 1(0.02)$

$\cong 4 + 0.02$

$\cong 4.02$

$\sqrt[3]{65} \cong 4.02$

3/2020"تطبيقي"

س/ كرة حجمها $84\,\pi\ cm^3$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة

Sol:

$V = \frac{4\pi}{3} r^3$

$84\,\pi = \frac{4\,\pi}{3} r^3 \quad \Rightarrow r^3 = 63$

$r = \sqrt[3]{63}$

$r(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$a = 64\ , b = 63$

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$r(a) = \sqrt[3]{64} = 4$

$r'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$r'(a) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(63)^2}} = \frac{1}{48} = 0.02$

$r(a+h) \cong r(a) + hr'(a)$

$r(63) \cong 4 - 0.02 = 3.98$

3/2020

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة , جد بصورة تقريبية المقدار

$\sqrt[5]{(0.97)^3} + (0.97)^4 + 3$

Sol:

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3$

لتكن $a = 1 \quad , \; b = 0.97$

$h = b - a = 0.97 - 1 = -0.03$

$f(a) = f(1) = \sqrt[5]{1^3} + 1^4 + 3 = 1 + 1 + 3 = 5$

$f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} + 4x^3$

$f'(1) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 = \frac{3+20}{5} = \frac{23}{5} = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h.f'(a)$

$\cong 5 + (-0.03)(4.6)$

$\cong 5 - 0.138$

$\cong 4.862$

2/2020

س/ باستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة ، جد بصورة تقريبية:

$\sqrt[5]{(0.98)^3} + 2$

Sol:

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + 2$

نفرض $a = 1 \, , b = 0.98$

$h = b - a \implies h = 0.98 - 1 = -0.02$

$f(a) = \sqrt[5]{1^3} + 2 = 1 + 2 = 3$

$f(x) = x^{\frac{3}{5}} + 2$

$f'(x) = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}}$

$f'(a) = \frac{3}{5}(1)^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5} = 0.6$

$\therefore f(a+h) \simeq f(a) + h.f'(a)$

$\simeq 3 + (-0.02).0.6$

$\simeq 3 - 0.012$

$\therefore \sqrt[5]{(0.98)^3} + 2 \simeq 2.988$

*الخُطُوة الأُولَى لِكُل شَيءٍ؛
هِيَ أَنْ تَقُول أَنَا أَسْتَطِيع ..

5-الاسئلة الوزارية حول" ايجاد الثوابت a,b ,c "

(1997/ 2)(2007/ تمهيدي)

س/ اذا كانت $f(x) = 3 + ax + bx^2$ تمتلك نقطة حرجة (1, 4) جد قيمتي a,b الحقيقيتان ثم بين نوع النقطة الحرجة.

$sol: f(x) = 3 + ax + bx^2$

$\rightarrow f(1) = 3 + 1 + b$

$\rightarrow a + b = 1 \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x) = a + 2bx$

$\rightarrow 0 = a + 2b$

$\rightarrow a = -2b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض (2) في (1)

$-2b + b = 1$

$\rightarrow b = -1 \rightarrow a = 2$

$f''(x) = 2b = -2$

النقطة الحرجة هي نقطة نهاية عظمى محلية $0 >$

1999/ 2

س/ اذا كان $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة (-2,-2) وكان للدالة نقطة انقلاب عند $x = 1$ جد قيم $b,c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية له

sol:

$\because (-2,-2) \in f(x)$

$\rightarrow f(-2) = -2 , \because x = 1$ انقلاب

$\rightarrow f''(1) = 0$

$-8 - 4b - 2c = -2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x) = 3x^2 - 2bx + c$

$f''(x) = 6x - 2b$

$\because f''(1) = 0$

$\rightarrow 6 - 2b = 0$

$\rightarrow 2b = 6 \rightarrow b = 3$

نعوض قيمة (b) في (1)

$-8 - 12 - 2c = -2$

$\rightarrow -2c = 18 \rightarrow c = -9$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$\rightarrow [3x^2 - 6x - 9 = 0] \div 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$

$x = 3 , \quad f(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

$OR \quad x = -1 ,$

$f(-1) = -1 - 3 + 9$

$= 5 \quad (3, -27), (-1, 5)$ نقاط حرجة

$f''(x) = 6x - 6$

$\rightarrow f''(3) = 18 - 6 = 12 > 0$

$f''(-1) = -6 - 6 = -12 < 0$

نقطة نهاية عظمى محلية$(-1, 5)$, نقطة نهاية صغرى محلية$(3, -27)$

1998/ 1

س/ اذا كانت (1, 6) نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x) = ax^2 + (x - b)^2$ جد قيمتي a,b

$sol:$

$f(1) = 6$

$\rightarrow 6 = a + (1 - b)^2$

$\rightarrow a + 1 - 2b + b^2$

$\rightarrow a - 2b + b^2 = 5 \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(1) = 0$

$\rightarrow f'(x) = 2ax + 2(x - b)$

$\rightarrow [2a + 2(1 - b) = 0] \div 2$

$a = b - 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2$

نعوض (2) في (1)

$b - 1 - 2b + b^2 = 5$

$\rightarrow b^2 - b - 6 = 0$

$\rightarrow (b - 3)(b + 2) = 0$

$b = 3 \rightarrow a = 3 - 1 = 2$

$b = -2 \rightarrow a = -2 - 1 = -3$

$f''(x) = 2a + 2 \ , a = 2$

$\rightarrow f''(x) = 6 > 0 \ , \quad a = -3$

$\rightarrow f''(x) = -4 < 0$ يهمل

$\{a = 2 , b = 3\}$ مجموعة الحل

2000/ 2

س/ اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيمة $a, b, c \in R$

Sol:

$x = 3$

$\rightarrow y + 27 = 28$

$\rightarrow y = 1 \rightarrow (3 , 1)$نقطة تماس

$f(x) = 3 \rightarrow 27a + 9b = -1 \ldots\ldots\ldots\ldots (1$

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\rightarrow f'(x) = 27a + 6b$

$f'(3) = m \rightarrow 27a + 6b = -9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \rightarrow 6a + 2b = 0 \ldots (3)$

$2b = -6a \rightarrow b = -3a \qquad$ تعوض في المعادلة(2)

$27a + 6(-3a) = -9$

$\rightarrow 27a - 18a = -9 \rightarrow 9a = -9$

$\rightarrow a = -1$

$b = (-3)(-1) = 3 \quad$ تعوض في المعادلة(1)

1 /2001

س/ اذا علمت ان للدالة $f(x) = x^3 + 3x^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -2$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 4$ جد قيمتي a, b؟

Sol:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$
$f'(-2) = 0 \quad , f'(4) = 0$
$12 - 4a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$
$48 + 8a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$
$\rightarrow b = -48 - 8a$ تعوض في (1)
$12 - 4a - 48 - 8a = 0$
$\rightarrow -12a = 36$
$\rightarrow a = -3$
$\rightarrow b = -48 + 24 = -24$

---

1 /2003

س/ لتكن $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه.

Sol:

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$
$f''(x) = 6x + 6$
$\rightarrow 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$
$\rightarrow f(-1) = -1 + 3 + 9 - 6 = 5$
$(-1, 5)$ نقطة انقلاب وتماس معا
$\rightarrow m = f'(-1) = 3 - 6 - 9 = -12$
$(y - y_1) = m(x - x_1)$ معادلة المماس
$\rightarrow (y - 5) = -12(x + 1)$
$y - 5 = -12x - 12$
$\rightarrow 12x + y + 7 = 0$ معادلة المماس المطلوبة

---

2 /2009

س/ اذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ يمس المنحني $F(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عند $(3, 1)$ جد قيمة $a, b, c \in R$

Sol:

$m = \frac{-a}{b} = \frac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم
$\because (3, 1)$ نقطة تماس
$\rightarrow f(3) = 1 \quad , \quad f'(3) = m$
$27a + 9b + 1 = 1$
$\rightarrow 3a + b = 0$
$\rightarrow b = -3a \ldots\ldots (1)$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$
$\rightarrow f'(x) = 27a + 6b$
$f'(3) = m$
$\rightarrow 27a + 6b = -9 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$
$27a - 18a = -9 \rightarrow 9a = -9$
$\rightarrow a = -1 \rightarrow b = 3$

(2003/ 2)(2014/ 4 اسئلة الانبار)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)(2016/ 1)(2017/ 3)

س/ اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيم $a, b, c \in R$ ؟

Sol:

$y = ax^2 + bx + c$
$y' = 2ax + b$
$3x - y = 7$ ميل المستقيم
$m = \frac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \frac{-3}{-1} = 3$
$\because$ *المستقيم يمس المنحني فأن ميل المنحني=ميل المستقيم عند* x=2
$2ax + b = 3$
$2a(2) + b = 3$
$4a + b = 3 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$
$x = \frac{1}{2}$ *للمنحني y نهاية محلية عند* y
$2ax + b = 0$
$2a\left(\frac{1}{2}\right) + b = 0$
$a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$

$a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (2)$
$\mp 4a \mp b = 3 \ldots\ldots\ldots (1)$
بالطرح
$-3a = -3 \rightarrow a = 1$
نعوض قيمة a في معادلة رقم (2)
$1 + b = 0 \rightarrow b = -1$
$y = x^2 - x + c$ الدالة تصبح
النقطة (2,-1) تحقق المعادلة
$-1 = 2^2 - 2 + c$
$-1 = 4 - 2 + c$
$-1 = 2 + c \rightarrow c = -3$

---

1 /2004

س/ اذا كانت منحني الدالة $f(x) = 2ax^2 + b$ وكانت $a \in \{-1, 0, 1, 3\}$ تمتلك نهاية عظمى محلية جد قيمة a

Sol:

$f'(x) = 4ax$
$\rightarrow f''(x) = 4a$
$a = -1$
$\rightarrow f''(x) = -4 <$ تمتلك نهاية عظمى محلية

(2004/ 2)(2014/ 3)(2016/ 2 خارج القطر)
(2019/ 1 خارج القطر)

س/ جد معادلة المنحني $f(x)=ax^3-bx^2+cx$ حيث ان النقطة (-1,4) نقطة انقلاب له وميل المماس عندها يساوي(1)

Sol:

$f(x)=ax^3-bx^2+cx$

$4=a(-1)^3-b(-1)^2+c(-1)$

النقطة $(-1,4)$ تنتهي للدالة فتحققها

$-a-b-c=4 \dots\dots\dots (1)$

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$

$f''(x)=6ax-2b$

$0=6a(-1)-2b$

$-6a-2b=0 \quad \} \div (2)$

$3a+b=0 \quad \dots\dots\dots \ (2)$

$f'(x)=3ax^2-2bx+c$

$-1=3a(-1)^2-b(-1)+c$

$3a+2b+c=-1 \ \dots\dots\dots \ (3)$

$-a-b-c=4$

بالجمع

$2a+b=3$

$\mp 3a \mp b=0$

بالطرح

$-a=3 \quad \Rightarrow \quad a=-3$

$-9+b=0 \quad \Rightarrow b=9$

$-(-3)-9-c=4 \quad \Rightarrow \quad c=-10$

المعادلة $f(x)=-3x^3-9bx^2-10\,x$

2009/ 1

س/ اذا كانت (1, -2) نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=ax^2-(x+b)^2$ فجد قيمة $a, b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

sol:

$f(1)=-2 \ \rightarrow -2=a-(1+b)^2$

$\rightarrow -2=a-(1+2b+b^2)$

$\rightarrow -2=a-1-2b-b^2$

$\rightarrow a-2b-b^2=-1 \dots\dots\dots (1)$

$f'(1)=0 \rightarrow f'(x)=2ax-2(x+b)$

$\rightarrow [2a-2(1+b)=0]\div 2$

$a=b+1 \dots\dots\dots\dots (2$

نعوض (2) في (1)

$b+1-2b-b^2=-1$

$\rightarrow b^2+b-2=0$

$\rightarrow (b+2)(b-1)=0$

اما $b=-2$ يهمل

او $b=1 \rightarrow a=1+1=2$

$f''(x)=2a-2\,, a=2$

$\rightarrow f''(x)=2>0\ ,$ $(1,-2)$ نهاية صغرى محلية

2011/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كانت (2, 6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $F(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a, b\in R$ وبين نوع النقطة الحرجة؟

$F(x)=a-(x-b)^4$, نعوض النقطة (2, 6)

$6=a-(2-b)^4 \dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$

$x=2,\ F(x)=y=6$

$F'(x)=-4(x-b)^3$

لكن $F'(x)=0$ عند النقطة (2, 6)

$\{0=-4(2-b)^3\}\div(-4)$

$\rightarrow (2-b)^3=0$ بالجذر التكعيبي

$2-b=0 \rightarrow b=2 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

وبتعويض (2) في (1) ينتج:-

$6=a-(2-2)^4 \rightarrow a=6$

$\therefore F(x)=6-(x-2)^4$

$\rightarrow F'(x)=-4(x-2)^3(1)$

$F'(x)=-4(x-2)^3$

$\rightarrow \{0=-4(x-2)^3\}\div -4$

$\rightarrow (x-2)^3=0$

$\rightarrow x-2=0 \ \rightarrow x=2$

F'(x) +++++++2 --------

تزايد تناقص

$\therefore$ النقطة (2, 6) نهاية عظمى محلية للدالة

(2012/ 1)(2013/ 2)(2008/ 1 اسئلة خارج القطر
2015/ 1 اسئلة النازحين)(2016/ 3 اسئلة خارج القطر)

س/ اذا علمت ان للدالة $f(x)=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ جد قيمتي a, b؟

Sol:

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(-1)=0\ ,f'(2)=0$

$3-2a+b=0 \dots\dots\dots\dots (1)$

$12+4a+b=0 \dots\dots\dots (2)$

$\rightarrow b=-12-4a$ تعوض في(1)

$3-2a-12-4a=0$

$\rightarrow -6a=9$

$\rightarrow a=-\frac{3}{2}$

$\rightarrow b=-12-4\left(-\frac{3}{2}\right)$

$=-12+6=-6$

(2012/ 3)(2015/ 1)(2016/ 1 اسئلة خارج القطر)(2017/ "تمهيدي")(2019/1"تطبيقي")(2019/2)

س/ اذا كان $F(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت F مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة F نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيم الثوابت $a, b, c\in R$ ؟

Sol:

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$

مقعرة $x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ ∴ $f^{\backslash\backslash}(x)=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f''(x)=6ax+2b$

$0=6a(1)+2b \quad \rightarrow [0=6a+2b]\div 2$

$0=3a+b \; \dots\dots\dots (1)$

للدالة نهاية عظمى محلية $(-1\,,5) \quad \Leftarrow \quad f'(x)=0$

$0=3a(-1)^2+2b(-1)+c$

$0=3a-2b+c \; \dots\dots\dots (2)$

النقطة $(-1\,,5)$ ∋ لمنحني الدالة

$5=a(-1)^3+b(-1)^2+c(-1)$

$5=-a+b-c \quad \dots\dots\dots (3)$

$0=3a-2b+c \quad \dots\dots\dots (2)$

$5=-a+b-c \quad \dots\dots\dots (3)$

بالجمع

$5=2a-b \; \dots\dots\dots \; (4)$

$5=2a-b \quad \dots\dots\dots (4)$

$0=3a+b \; \dots\dots\dots (1)$

بالجمع

$5=5a \quad \rightarrow \quad a=1$

نعوض قيمة a في معادلة رقم (1)

$0=3(1)+b \quad \rightarrow \quad b=-3$

نعوض a , b في معادلة (3)

$5=-1+(-3)-c$

$5=-1-3-c \quad \rightarrow \quad 5=-4-c$

$c=-4-5=-9$

(2013/ 1)(2019/3)

س/ لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a\in R, x\neq 0$ برهن على ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

$F(x)=x^2-\frac{a}{x}\;,\; x\neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2-ax^{-1}$

$F'(x)=2x+ax^{-2}\Rightarrow F'(x)=2x+\frac{a}{x^2}=\frac{2x^3+a}{x^2}$

$0=\frac{2x^3+a}{x^2}\Rightarrow 2x^3+a=0 \Rightarrow 2x^3=-a$

$\Rightarrow x^3=-\frac{a}{2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

$\Rightarrow F''(x)=2\text{-}2ax^{-3}=2-\frac{2a}{x^3}$

$\therefore F''(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})=2\text{-}\frac{2a}{(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})^3}=2-\frac{2a}{-\frac{a}{2}}$

$\therefore F''(\sqrt[3]{\frac{-a}{2}})=2+\frac{4a}{a}=6>0$ موجبة

∴ للدالة F نهاية صغرى عند $x=\sqrt[3]{\frac{-a}{2}}$

2012/ 1 اسئلة خارج القطر)(2016/ 3)

س/ اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $F(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة $c\in R$ ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه؟

$sol:\; F(x)=3x^2-x^3+c$

6 تمثل نهاية صغرى محلية للدالة اي ان $y=6$

∴ النقطة $(x, 6)$ x نجدها من المشتقة الاولى

$F'(x)=6x\text{-}3x^2$

$(0=6x\text{-}3x^2)\div 3$

$\Rightarrow 2x-x^2=0$

$\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow x=0, x=2$

$f''(0)=6-6x$

$\Rightarrow f''(0)=6-0=6>0$

$f''(2)=6-12=-6<0$

$f(x)\ni$ هي نقطة النهاية الصغرى(0.6)

$6=0-0+6\Rightarrow c=6$

$\Rightarrow f(x)=3x^2-x^3+6$

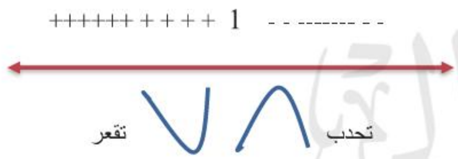
$f'(x)=6x-3x^2$

$\Rightarrow f''(x)=6-6x$

$6-6x=0$

$\Rightarrow 6x=6\Rightarrow x=1$

$f(1)=3-1+6=8 \;\Rightarrow (1,8)$ انقلاب مرشحة



∴ نقطة الانقلاب $(1, 8)$

$F'(x)=6x\text{-}3x^2$

ميل المماس عند $(1, 8)$

$\therefore F'(1)=6(1)\text{-}3(1)^2\Rightarrow F'(1)=3=$ ميل المماس عند $(1, 8)$ النقطة

∴ معادلة المماس هي

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-8=3(x\text{-}1)$

معادلة المماس المطلوبة $\Rightarrow y\;-8\;=\;3x-3\;\Rightarrow\; 3x-y+5=0$

2018/ 3

س/ اذا كانت للدالة $f(x)=x^3-ax^2+bx+3$ لها نقطة انقلاب هي النقطة $(1,8)$,جد قيمتي a,b الحقيقيتين

$sol\!: f(x)=x^3-ax^2+bx+3$

∵ $(1,8)$ نقطة انقلاب

∴تحقق منحني الدالة

$8=1-a+b+3$

$8-4=-a+b \quad \rightarrow -a+b=4 \dots\dots (1)$

$f'(x)=3x^2-2ax+b \quad \rightarrow f''(x)=6x-2a$

$f''(x)=0$ عندما $x=1$

$0=6-2a$

$2a=6 \quad \rightarrow a=\frac{6}{2} \quad \rightarrow a=3$

نعوضها في (1) لايجاد b

$-a+b=4$

$-3+b=4 \quad \rightarrow b=4+3 \quad \therefore b=7$

1 /2014

س/ اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $x < 1$ ومحدب لكل $x > 1$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند $x = 3$ جد قيمة $a, b, c \in R$ (او)

2017/ 1)(2017/ 3"الموصل")(2018/ 2 خارج القطر) (2/2019"تطبيقي")

س/ اذا كان منحني الدالة $F(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعر لكل $[x: x < 1]$ ومحدب لكل $[x: x > 1]$ ويمس المستقيم $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3, 1)$ جد قيمة $a, b, c \in R$

Sol:

$x = 3 \to y + 27 = 28$

$\to y = 1 \to (3, 1)$ نقطة تماس

$f(x) = 1 \to 27a + 9b + c = 1 \ldots\ldots\ldots (1$

$m = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{-9}{1} = -9$ ميل المستقيم

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$\to f'(x) = 27a + 6b$

$f'(3) = m \to 27a + 6b = -9 \ldots\ldots (2)$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \to 6a + 2b = 0 \ldots\ldots\ldots (3)$

$2b = -6a$

$\to b = -3a$ تعوض في المعادلة(2)

$27a + 6(-3a) = -9$

$\to 27a - 18a = -9$

$\to 9a = -9 \to a = -1$

$b = (-3)(-1) = 3$ تعوض في المعادلة(1)

$-27 + 27 + c = 1 \to c = 1$

---

1 /2018

س/ اذا كان المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند (2,-1) وكانت له نهاية صغرى محلية عند $x = 5$ جد قيم $a, b, c \in R$ ؟

sol: $y = ax^2 + bx + c$

$\because (2, -1)$ نقطة تماس ←تحقق منحني الدالة

$-1 = 4a + 2b + c \ldots\ldots\ldots (1)$

$f'(x) = M \leftarrow$ منحني الدالة يمس المستقيم$\because$

$3x - y = 7$ ميل المستقيم

$M = \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-3}{-1} = 3$

$f'(x) = 2ax + b$

$\to f'(2) = 4a + b$

$\therefore 4a + b = 3 \ldots\ldots\ldots (2)$

$f(x) = 0 \leftarrow$ للمنحني نهاية صغرى محلي$\because$

$0 = 10a + b \ldots\ldots\ldots (3)$

$\mp 3 = \mp 4a \mp b \ldots\ldots\ldots (2)$

بالطرح

$-3 = 6a \to a = -\dfrac{1}{2}$

$\therefore b = -10 * \dfrac{-1}{2} \to b = +5$

2014/ 2)(2017/ 1"اسئلة الموصل")

(2017/ 1"اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كان $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ و $g(x) = 1\text{-}12x$ وكان كل من F و g متماسان عند نقطة الانقلاب وكانت للدالة نقطة انقلاب هي (1, -11) فجد قيمة الثوابت $a, b, c \in R$

sol: $F(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ نعوض النقطة (1, -11)

$-11 = a(1)^3 + b(1)^2 + c(1)$

$\Rightarrow a + b + c = -11$ ——— (1)

$g'(x) = -12$ هو $g(x) = 1\text{-}12x$ ميل المماس (المستقيم)

$-12 = \dfrac{-12}{1} = \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = (y + 12x = 1)$ او يمكن ان نجد الميل

ميل المماس = $F'(X)$ عند النقطة (1, -11)

$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$F'(x) = -12$ عند $(1, -11)$

$-12 = 3a(1)^2 + 2b(1) + c$

$\Rightarrow 3a + 2b + c = -12$ ——— (2)

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$ ——— (1)

بالطرح

$2a + b = -1$ ——— (3)

$F''(x) = 6ax + 2b$

$F''(x) = 0$ لكن عند $(1, -11)$

$0 = 6a(1) + 2b \Rightarrow (6a + 2b = 0) \div (2)$

$3a + b = 0$ ——— (4)

$\mp 2a \mp b = \pm 1$ ——— (3)

بالطرح

$\Rightarrow a = 1$

$\therefore 3a + b = 0$ ——— (4) $\Rightarrow 3(1) + b = 0 \Rightarrow b = -3$

$a + b + c = -11$ ——— (1)

$\Rightarrow 1 + (-3) + c = -11 \Rightarrow c = -9$

2015/ 2)(2015/ 2 اسئلة خارج القطر)(2017/ 2 اسئلة خارج القطر)(1/2019)

س/ اذا كان للدالة $F(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ونقطة انقلاب عند $x=1$ فجد قيمة a, c ؟

Sol: $F(x) = ax^3 + 3x^2 + c$, $F''(x) = 0$

$F'(x) = 3ax^2 + 6x$

$F''(x) = 6ax + 6$ عند $x = 1$ $F''(x) = 0$

$0 = 6a(1) + 6 \Rightarrow 6a = -6 \Rightarrow a = -1$

$\therefore F(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

نهاية عظمى محلية تساوي 8 ⇐ $y = 8$

∴ نقطة النهاية العظمى هي (x, 8) نجد x من المشتقة الأولى

$F'(x) = -3x^2 + 6x$, $(0 = -3x^2 + 6x) \div (-3)$

$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0,\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

F''(X) -------- 0 +++ +++ 2 --------

∴ النقطة (2, 8) نهاية عظمى محلية للدالة

نعوض النقطة (2, 8) في الدالة لإيجاد قيمة c

$8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$

2 /2017

س/ لتكن $F(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a \in R, x \neq 0$ دالة, جد قيمة a علماً ان الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند x=1 ثم بين ان الدالة F لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

$sol:$

$F(x)=x^2+\frac{a}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow F(x)=x^2+ax^{-1}$

$F'^{(x)}=2x-ax^{-2} \Rightarrow F''(x)=2x+ax^{-3}$

$f''(x)=2+\frac{2a}{x^3} \Rightarrow f''(x)=0$

$2+\frac{2a}{x^3}$ $x=1$ عند

$2+\frac{2a}{(1)^3} \to 2a=-2 \quad \to a=-1$

$f(x)=x^2-\frac{1}{x}$

$\to f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$

$\left[2x+\frac{1}{x^2}=0\right].(x^2)$

$2x^3+1=0$

$\to 2x^3=-1$

$\to x^3=\frac{-1}{2}$ بجذر الطرفين

$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

$f''(x)=2-\frac{2}{x^3}$

$f''\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)=2-\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}\right)^3}=2+4=6>0$

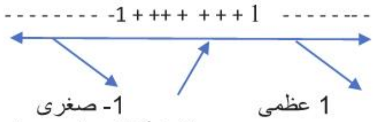
توجد للدالة نهاية صغرى محلية لاتمتلك الدالة نهاية عظمى محلية عند

$x=\sqrt[3]{\frac{-1}{2}}$

2 /2018

س/ اذا كانت للدالة $f(x)=3x-x^3+c$ نقطة نهاية عظمى محلية تنتمي لمحور السينات,جد c ثم جد معادلة المماس عند نقطة انقلابة

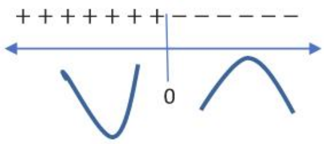
$sol: f(x)=3x-x^3+c$
$f'(x)=[3-3x^2=0]\div 3$
$1-x^2=0$
$x=1$
$x=-1$



النهاية تنتمي لمحور السينات:

$\therefore y=0 \quad \to (1,0)$ نعوضها في المعادلة

$f(x)=3x-x^3+c$
$\to 0=3(1)-(1)^3+c \quad \to c=-2$
$f(x)=3x-x^3-2$
$f'(x)=3-3x^2$
$\to f''(x)=-6x=0$
$x=0 \quad \to y=-2$



$(0,-2)$نقطة انقلاب

$m=f'(0)=3$ ميل المماس
$y-y_1=m(x-x_1)$
$y+2=3(x-0)$
$\to y+2=3x$
$3x-y-2=0$ معادلة المماس

2018/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كانت النقطة (-1,5) حرجة لمنحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وللدالة نقطة انقلاب عند x=1, جد قيم الثوابت $a,b,c \in R$, ثم بين نوع النقطة الحرجة؟

sol: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

$\because$ $(-1,5)$ نقطة حرجة

$\therefore$تحقق منحني الدالة

$5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots(1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(-1) = 3a - 2b + c \quad \to 3a - 2b + c = 0.\ldots(2)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots(1)$

$0 = 3a - 2b + c.\ldots(2)$

بالجمع

$5 = 2a - b \ldots\ldots\ldots(3)$

بما ان الدالة f تمتلك نقطة الانقلاب عندx=1 ← $f''(1) = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 6a + 2b \quad \to 6a + 2b = 0] \div 2$

$3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

بحل المعادلتين 3 و4 انيا ينتج

$2a - b = 5 \ldots\ldots(3)$

$3a + b = 0.\ldots\ldots(4)$

بالجمع

$5a = 5] \div 5 \quad \to a = 1$ نعوضها في معادلة رقم(3)

$2 - b = 5 \quad \to b = -3$

نعوض قيمتي a وb في معادلة رقم (1)

$-4 - c = 5 \quad \to -4 - 5 = c \quad \to c = -9$

لمعرفة نوع النقطة الحرجة

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$x = -1 \quad \leftarrow (-1,5)$

++++ ++++++-1 ---------

$\therefore$ النقطة (-1 ,5) نقطة نهاية عظمى محلية

(2017/ 2"اسئلة الموصل")(3/2019 "تطبيقي")

س/ عيّن قيمتي الثابتين a, b لكي يكون لمنحني الدالة $y=x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية صغرى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الانقلاب ان وجدت؟

sol: $y=x^3 + ax^2 + bx$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = -1$

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2ax + b$

$\Rightarrow 0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b$

$-2a+b= -3$ ——— (1)

لكن $\frac{dy}{dx} = 0$ عند $x = 2$

$0=3(4)+2a(2)+b$

$\Rightarrow 4a+b=-12$ ——— (2)

$\pm 2a \mp b = \pm 3$ ——— (1)

بالطرح

$6a=-9 \Rightarrow a=\frac{-9}{6} = \frac{-3}{2}$

نعوض في احدى المعادلتين لإيجاد قيمة b

$-2a+b=-3 \Rightarrow -2(\frac{-3}{2}) + b = -3$

$3+b= -3 \Rightarrow b=-6$

$\therefore y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3x - 6$

$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 3$

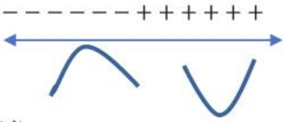
$\Rightarrow 0=6x-3$

$\Rightarrow 6x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{6} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3$

$= \frac{1-3-24}{8} = \frac{-26}{8} = \frac{-13}{4}$

− − − − − − + + + + + +



$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$

y محدبة في $\{x: x < \frac{1}{2}\}$

y مقعرة في $\{x: x > \frac{1}{2}\}$

$\therefore$ النقطة $(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4})$ نقطة انقلاب

2019/ تمهيدي

س/ لتكن $f(x) = ax^2 + bx + 6$ حيث $b \in R$ وان $a \in \{-1, 4\}$, جد قيمة a اذا علمت ان :

1) الدالة f محدبة 2) الدالة f مقعرة

sol :

$f(x) = ax^2 + bx + 6$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

عندما $a = -1$

$f''(x) = 2 * (-1) = -2 < 0 \;\; \rightarrow$ محدبة f $\therefore$

عندما $a = 4$

$f''(x) = 2 * (4) = 8 > 0 \;\; \rightarrow$ معقعرة f $\therefore$

طريقة ثانية للحل

$f(x) = ax^2 + bx + 6$

$f'(x) = 2ax + b$

$f''(x) = 2a$

1) الدالة f محدبة

$\therefore f'(x) < 0$

$2a < 0 \rightarrow a < 0$

$\therefore a = -1$ لان$a \in \{-1, 4\}$

2) الدالة f مقعرة

$\therefore f''(x) > 0$

$2a > 0 \rightarrow a > 0$

$\therefore a = 4$ لان$a \in \{-1, 4\}$

2019/ تمهيدي "تطبيقي"

س/ اذا كانت $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ دالة لها نقطة حرجة عند x=4 ونقطة انقلاب عند (1,22) فما قيمة كل من $a , b , c \in R$ ؟

Sol:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

(1,22) تحقق المعادلة اعلاه

$(1)^3 + a(1)^2 + b(1) + c = 22$

$a + b + c = 21 \dots\dots\dots (1)$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$f'(4) = 0$

$3(4)^2 + 2a(4) + b = 0$

$48 + 8a + b = 0$

$8a + b = -48 \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

$f''(x) = 6x + 2a$

$f''(1) = 0$

$6(1) + 2a$

$2a = -6$

$\rightarrow a = -3$

عوض في (2)

$8(-3) + b = -48$

$-24 + b = -24$

$\rightarrow b = -24$

بالتعويض في (1) عن قيمتي a , b نحصل

$-3 - 24 + c = 21$

$\rightarrow c = 48$

سَنبلغُ حُلمنا لو بعد حِينٍ فنحنُ بِحارُ عَزمٍ إنْ أردنا

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ اذا كانت $f(x) = x^3 - 3X^2 + 4$ والمستقيم $2x + ay = 5 + 3b$ متماسان في نقطة انقلاب المنحني $f(x)$ جد $a, b \in R$

Sol:

المعطى :- الدالة $f(x)$ متماسة مع معادلة المستقيم
الدالة $f(x)$ لها نقطة انقلاب يعني مشتقة الثانية = 0

$f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 6x$
$f^{\backslash\backslash}(x) = 6x - 6$
$\rightarrow 6x - 6 = 0$
$\rightarrow 6(x-1) = 0 \rightarrow x = +1$

عند $x = 1$ نقطة انقلاب

$f(1) = 1 - 3(1) + 4 = 2 \quad (1,2)$ نقطة انقلاب

$(1,2)$ تحقق معادلة المستقيم

$2x + ay = 5 + 3b$
$2(1) + a(2) = 5 + 3b$
$2a - 3b = 3 \ldots\ldots (1)$

$f(x)$ مماسة مع معادلة المستقيم لها نفس الميل
مشتقة المماس = مشتقة الدالة $f(x)$ عند $x = 1$

$f^{\backslash}(x) = 3x^2 - 6x$
$2x + sy = 5 + 3b$
$ay = 5 + 3b - 2x$
$y = \frac{5+3b-2x}{a}$
$y^{\backslash} = \frac{-2}{a}$
$3x^2 - 6x = \frac{-2}{a}$
$3 - 6 = \frac{-2}{a}$
$-3 = \frac{-2}{a}$
$a = \frac{2}{3}$

$2\left(\frac{2}{3}\right) - 3b = 3$ من واحد نعوض بقيمة $a = \frac{2}{3}$

$\frac{2}{3} - 3b = 3$
$4 - 9b = 9$
$b = \frac{-5}{9}$

2/2020

س/ إذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ ، وكانت f مقعرة عندما $x > 1$ ، ومحلية عندما $x < 1$ ، وللدالة نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ ، جد قيمة $a, b, c \in R$.

Sol:

$\because$ ان الدالة f مقعرة $\{x: x > 1\}$

f محدبة $\{x: x < 1\}$

$\therefore f''(x) = 0$ عند $x = 1$

$f'(x) = 3a^2 + 2bx + C$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$0 = 6a + 2b \ ] \div 2 \Rightarrow 3a + b = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

للدالة نهاية عظمى فأن $f'(x) = 0$ عند $x = -1$

$0 = 3a(-1)^2 + 2b\,(-1) + c$

$0 = 3a - 2b + c \ldots\ldots (2)$

النقطة $(-1, 5)$ تحقق المعادلة

$5 = a(-1)^3 + b\,(-1)^2 + c(-1)$

$5 = -a + b - c \ldots\ldots (3)$

$0 = 3a - 2b + c \ldots\ldots (2)$

بالجمع ____________________

$5 = 2a - b \ldots\ldots (4)$

$0 = 3a + b \ldots\ldots (1)$

بالجمع ____________________

$5 = 5a \Rightarrow a = 1$

نعوض قيمة a بمعادلة (1)

$0 = 3\,(1) + b \Rightarrow b = -3$

نعوض قيمة a , b بمعادلة (3)

$5 = -1 - 3 - c$

$c = -5 - 4$

$c = -9$

5-الاسئلة الوزارية حول" رسم الدوال"

1 /1997

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2)التقاطع مع المحورين

$0=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

∴ النقطتان (1, 0) (-1, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)=\frac{(0)^2-1}{(0)^2+1}=-1$

∴ النقطة (0, -1) تقاطع مع الصادات

3)التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{(-x)^2-1}{(-x)^2+1}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=F(x)$

$\Rightarrow$ الدالة متناظرة حول محور الصادات

4)المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+1\neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي: $y=\frac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow yx^2+y=x^2-1$

$\Rightarrow x^2-yx^2=y+1$

$x^2(1-y)=y+1$

$\Rightarrow x^2=\frac{y+1}{1-y}, 1-y=0 \Rightarrow y=1$

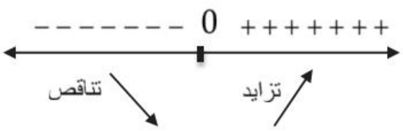
تجعل x *غير معرفة* y=1

معادلة المحاذي الأفقي y=1 ∴

5)

$$F'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-(x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow=\frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{(x^2+1)^2}=\frac{4x}{(x^2+1)^2}$$



F متزايدة في {x: x >0}

F متناقصة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, -1) نهاية صغرى محلية للدالة

$$F''(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-4x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{4(x^2+1)^2-16x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\Rightarrow F''(x)=\frac{x^2+1[4x^2+4-16x^2]}{(x^2+1)^4}$$

$$=F''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3} \Rightarrow 0=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$\Rightarrow 0=4-12x^2 \Rightarrow 12x^2=4$$

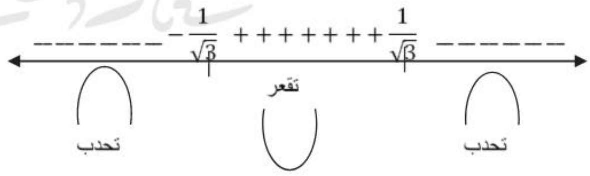
$$\Rightarrow x^2=\frac{4}{12}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$$

النقطة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$

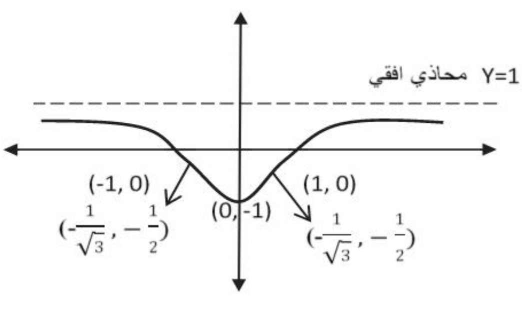
$F(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{1}{2}$ النقطة $(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$



F محدبة في $\{x: x<\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

F مقعرة في $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

∴ النقطتان $(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{2})$ و $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{2})$ نقطتا انقلاب



(1/1999)(2006/ تمهيدي)(2007/ 1)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x$

Sol:

1 أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \to y=0,\ \ if\ y=0$

$\to x^3-3x=0 \to x(x^2-3)=0$

$\to x=0\ \ OR\ \ x^2=3 \to x=\pm\sqrt{3}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0)$, $(\sqrt{3},0)$, $(-\sqrt{3},0)$

3)التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-(x^3-3x)=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) *المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.*

5) *النهايات*

$F'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-3=0 \to 3x^2=3$

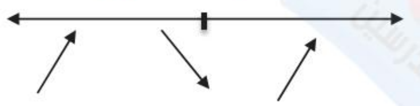
$\to x^2=1 \to x=\pm 1$

$F(1)=(1)^3-3(1)=-2$ F(-1) *نعوض في الدالة الاصلية*

$=(-1)^3-3(-1)=2$

$x<-1 \quad (-1,1) \quad x>1$

+ + + + + −1 − − − − 1 + + + + + + +



الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x\in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x:x\in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x\in(-1,1)\}$

صغرى $(1,-2)$, نهاية عظمى $(-1,2)$

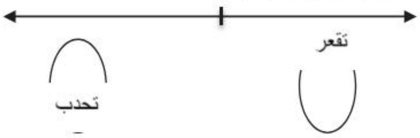
$F''(x)=6x \to 6x=0 \to x=0$

$F(0)=6(0)$ نعوض في الدالة الأصلية

نقطة انقلاب مرشحة $(0,0)$

$x<0 \qquad x>0$

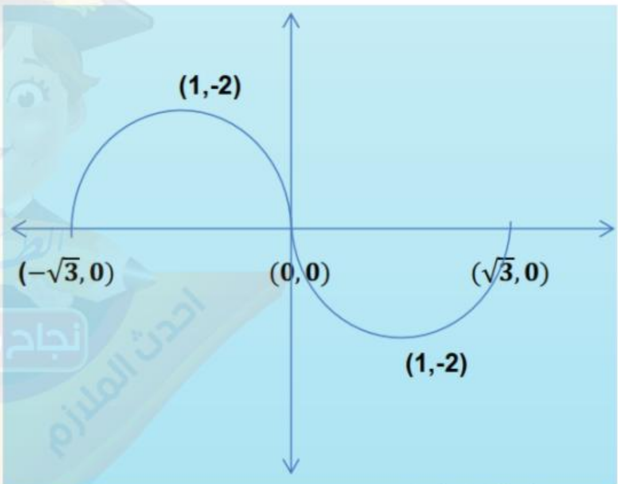
− − − − − 0 + + + + + + +



الدالة محدبه بالفترة $\{x:x\in R; x<0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,0)$

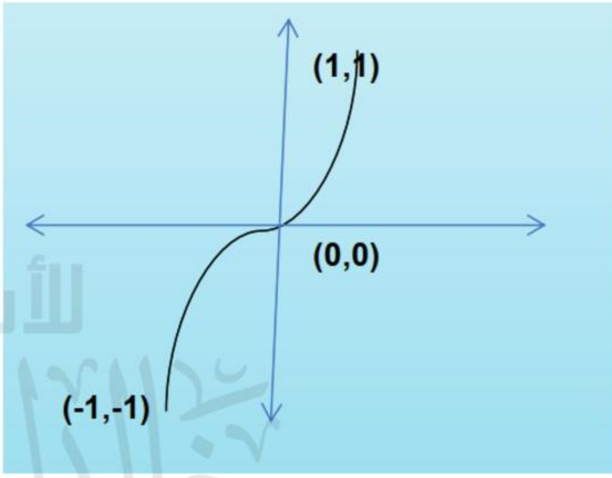


2000/ 1)(2006/ 1)(2007/ 1 خارج القطر)(2008/ تمهيدي)(2013/2)(2014/ تمهيدي)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^5$

نقاط مساعدة

(x,y)
(-1,-1)
(0,0)
(1,1)



Sol:

1أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

∴ النقطة (0 ,0) نقطة تقاطع مع السينات

$0=x^5 \Rightarrow x=0$

∴ النقطة (0 ,0) نقطة تقاطع مع محور الصادات

$f(0)=(0)^5=0$

3) التناظر

$f(-x)=(-x)^5=-x^5=-f(x)$

∴ الدالة متناظرة حول نقطة الاصل.

4) المحاذيات/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

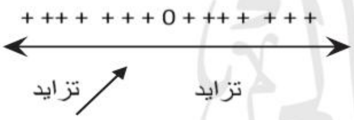
5) النهايات

$F'(x)=5x^4 \Rightarrow 0=5x^4$

$\Rightarrow x^4=0 \Rightarrow x=0$

$F(0)=(0)^5=0$

∴ النقطة (0 ,0)



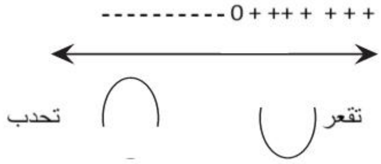
متزايدة في {x: x>0} , {x: x<0}

∴ النقطة (0 ,0) نقطة حرجة فقط.

$F''(x)=20x^3 \Rightarrow 0=20x^3$

$\Rightarrow x^3=0 \Rightarrow x=0$

$F(0)=(0)^5=0$



∴ النقطة (0 ,0)

F محدبة في {x: x <0}

F مقعرة في {x: x >0}

∴ النقطة (0 ,0) نقطة انقلاب.

2 /2000

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= (x^2-1)^2$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \to y=1$,

$if\ y=0 \to (x^2-1)^2=0$

$\to (x^2-1)=0$

$x^2=1 \to x=\pm 1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,1),(-1,0),(1,0)$

3) التناظر:

$F(-x)=(-x)^4-2(-x)^2+1=x^4-2x^2+1=F(x)$

$\to$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)=4x^3-4x$

$\Rightarrow 4x^3-4x=0$

$\to 4x(x^2-1)=0$

$\to x=0 \to f(0)=1$

$or\ \ x=1 \to f(0)=0$

$or\ x=-1 \to f(-1)=0$

نقاط حرجة $(0,1),(-1,0),(1,0)$

$x<-1 \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad x>1$

$-----(-1)++++(0)-----(1)+++++$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x\in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x\in R; x<-1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x\in R; x\in(-1,0)\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x\in R; x\in(0,1)\}$

نهاية صغرى $(1,0)$, نهاية صغرى $(-1,0)$, نهاية عظمى $(0,1)$

$F''(x)=12x^2-4=0 \ \to 12x^2=4$

$\to x^2=\frac{1}{3} \ \ \to x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}\ , f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{9}-\frac{2}{3}+1=\frac{4}{9}$

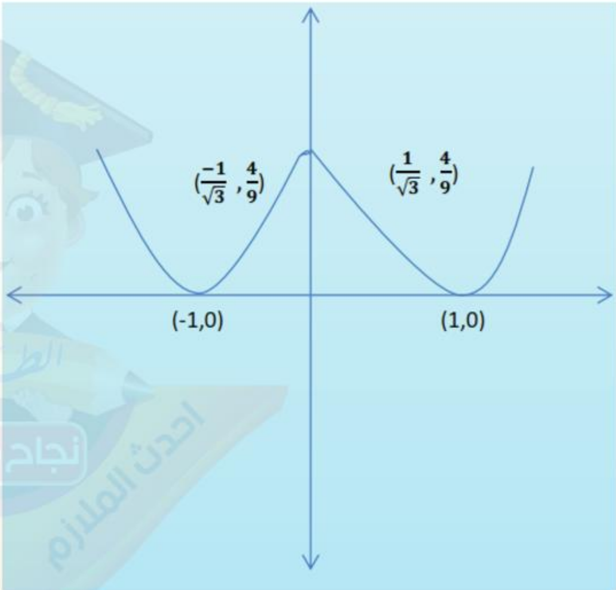
نقطة انقلاب مرشحة $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$

$++++++\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)-----\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+++++++$

الدالة محدبه بالفترة $\{x{:}x\in R; x\in(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\}$

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x{:}x\in R; x>\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x{:}x\in R; x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\}$

نقطة انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9}),(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{4}{9})$



2 /2001

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^3 + 3x^2$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \to y = 0$,

$if\ \ y = 0 \to x^3 + 3x^2 = 0$

$\to x^2(x+3) = 0$

$x^2 = 0 \to x = 0\ \ , x = -3$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0), (-3,0)$

3) التناظر:

$\forall\ x\ \in R, \exists\ (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3 + 3(-x)^2 = -x^3 + 3x^2$

$= -(-x^3 - 3x^2) \neq F(x)$ لا يوجد تناظر

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 3x^2 + 6x$

$\Rightarrow 3x^2 + 6x = 0$

$\to 3x(x+2) = 0$

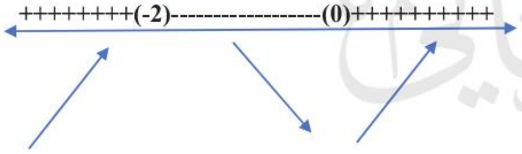
$\to x = 0\ \to f(0) = 0\ ,\ or\ \ x = -2$

$\to f(-2) = -8 + 12 = 4$

نقاط حرجة $(0,0), (-2,4)$

$x < -2$ $\quad (-2,0) \quad$ $x > 0$

++++++++(-2)------------------(0)++++++++++



الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > 0\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < -2\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x \in (-2,0)\}$

نهاية صغرى $(0,0)$, نهاية عظمى $(-2,4)$

$F''(x)= 6x + 6\ \to 6x + 6 = 0\ \to x = -1$

$F(-1)= 2$ **نعوض في الدالة الأصلية**

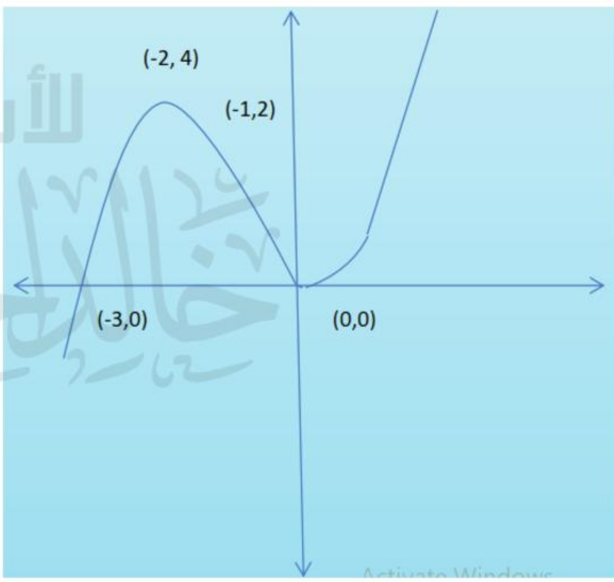
نقطة انقلاب مرشحة $(-1\ ,2)$

- - - - - - - - - - - (-1) + + + + + + + + + +

الدالة محدبه بالفترة $\{x{:}x \in R; x < -1\}$

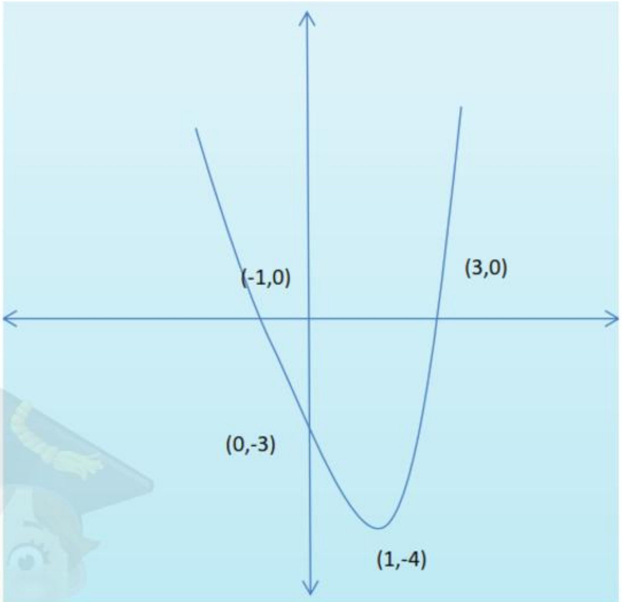
الدالة مقعرة بالفترتين $\{x{:}x \in R; x > -1\}$

نقطة انقلاب $(-1\ ,2)$



1 /2002

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^2 - 2x - 3$



Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \rightarrow y = -3$

$, if\ y = 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\rightarrow x = 3 \quad OR \quad x = -1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,-3), (3,0), (-1,0)$

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^2 - 2(-x) - 3 = x^2 + 2x - 3 \neq -F(x)$

$\rightarrow$ **لا يوجد تناظر**

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 2x - 2$

$\Rightarrow 2x - 2 = 0$

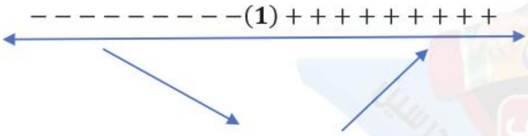
$\rightarrow x = 1$

$\rightarrow F(1) = 1 - 2 - 3 = -4$

نقطة حرجة **(1,-4)**

$x < -2 \qquad x > -2$

$- - - - - - - - - -(1) + + + + + + + + + +$



الدالة متزايدة بالفترة $\{x{:}x \in R; x > 1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x \in R; x < 1\}$

نقطة نهاية صغرى محلية $(1,-4)$

$F''(x)= 2 > 0$

الدالة مقعرة في كل مجالها ولا توجد نقاط انقلاب

*الخُطُوة الأُولَى لِكُل شَيءٍ؛
هِيَ أَنْ تَقُول أَنَا أَسْتَطِيع ..

2005/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= x^4 - 2x^2$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = $\mathbf{R}$

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x = 0 \to y = 0$

$, if\ y = 0 \to x^4 - 2x^2 = 0$

$\to x^2(x^2 - 2) = 0$

$\to x = 0, x^2 = 2 \to x = \pm\sqrt{2}$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(0,0), (\sqrt{2},0), (-\sqrt{2},0)$

3) التناظر:

$\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = F(x)$

$\to$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5) النهايات

$F'(x)= 4x^3 - 4x$

$\Rightarrow 4x^3 - 4x = 0$

$\to 4x(x^2 - 1) = 0$

$\to x = 0$

نعوض في الدالة الاصلية

$f(0) = 1$

$OR\ X = 1$

$\to F(1) = -1$

$OR\ X = -1$

$\to F(-1) = -1\ \ OR\ X = 1\ \ \to F(-1) = -1$

نقاط حرجة $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,-1)$

$x< -1 \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad x > 1$

$- - - - (-1) + + + + (0) - - - - (1) + + + + +$

$\{x : x \in R; x > 1\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x : x \in R; x < -1\}$ الدالة متناقصة بالفترة

$\{x : x \in R; x \in (-1,0)\}$ الدالة متزايدة بالفترة

$\{x : x \in R; x \in (0,1)\}$ الدالة متناقصة بالفترة

نهاية عظمى $(0,0)$ نهاية صغرى $(1,-1)$, نهاية صغرى $(-1,-1)$

$F''(x)= 12x^2 - 4 = 0$

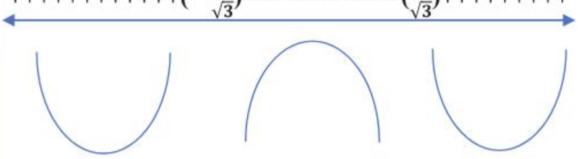
$\to 12x^2 = 4 \to x^2 = \frac{1}{3} \to x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$ نعوض في الدالة الأصلية

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}})= \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-5}{9}$

$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9}), (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-5}{9})$ *نقطة انقلاب مرشحة*

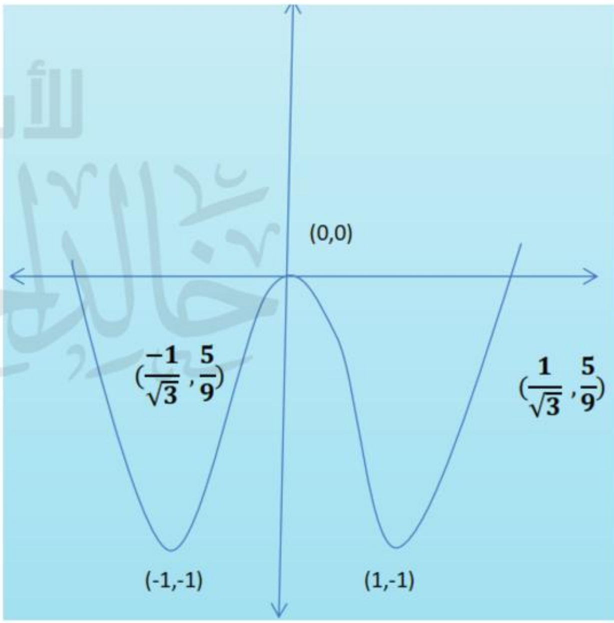
$+++++++++++++(-\frac{1}{\sqrt{3}})------------------(\frac{1}{\sqrt{3}})+++++++++$



$\{x : x \in R; x \in (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\}$ الدالة محدبه بالفترة

$\{x : x \in R; x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x : x \in R; x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\}$ الدالة مقعرة بالفترتين

نقطة انقلاب $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}), (\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$



(1 /2005)(1 /2008)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)= (x+2)\,(x-1)^2$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=(x+2)\,(x-1)^2$

$\Rightarrow$ either $(x+1)=0 \Rightarrow x=-2$

$\therefore$ النقطة $(-2, 0)$ تقاطع مع السينات

Or $(x-1)^2 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

$\therefore$ النقطة $(1, 0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)= (0+2)(0-1)^2 = 2$

$\therefore$ النقطة $(0, 2)$ تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x+2)\,(-x-1)^2 \neq F(x)$

الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$F(-x) \neq -F(x) \Rightarrow$

$\therefore$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية

5)

$F'(x)= (x+2)[2(x-1)(1)] + (x-1)^2(1)2$

$(x+2)(x-1) + (x-1)^2$

$\Rightarrow F'(x) = (x-1)[2x+4+x-1]$

$= (x-1)(3x+3) \Rightarrow 0 = (x-1)(3x+3)$

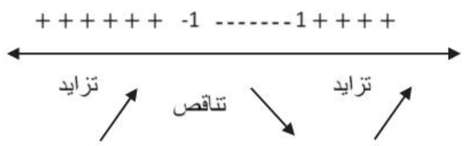
either $x-1=0 \Rightarrow x=1$, or $(3x+3)=0$

$\Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=-1$

$F(-1) = (-1+2)(-1-1)^2 = 1(4) = 4$

$\therefore$ النقطة $(-1, 4)$

$F(1) = (1+2)\,(1-1)^2 = 3(0) = 0$ $\therefore$ النقطة $(1, 0)$



F متزايدة في $\{x: x > 1\}, \{x: x < -1\}$

F متناقصة في $(-1, 1)$

$\therefore$ النقطة $(-1, 4)$ نهاية عظمى محلية للدالة.

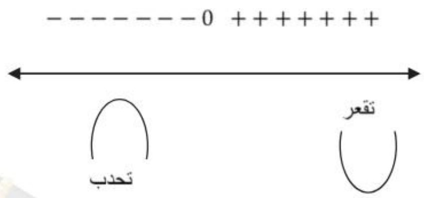
$\therefore$ النقطة $(1, 0)$ نهاية صغرى محلية للدالة.

$F''(x) = (x-1)(3) + (3x+3)(1) = 3x - 3 + 3x + 3$

$\therefore F''(x) = 6x \Rightarrow 0 = 6x \Rightarrow x = 0$

$F(0)= (0+2)\,(0-1)^2$

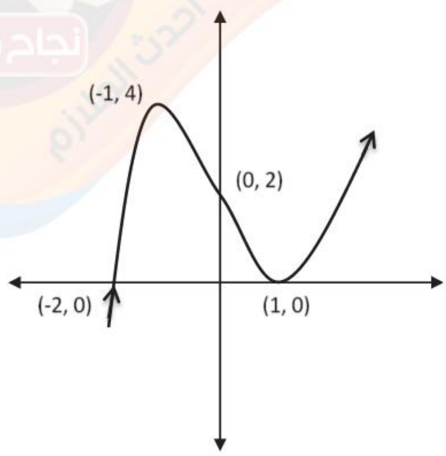
$= 2(1) = 2$ $\therefore$ النقطة $(0, 2)$ نعوض في الدالة الاصلية



الدالة محدبه بالفترة $\{x: x \in R;\ x < 0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R;\ x > 0\}$

$\therefore$ النقطة $(0, 2)$ نقطة انقلاب



1 /2006

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=x^3-3x+2$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \to y=2,$

$if\ y=0 \to x^3-3x+2=0$

$\to (x+2)(x-1)^2=0$

$\to x=-2\ OR\ x=1$

نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين $(1,0)$, $(-2,0)$, $(0,2)$

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(-x)^3-x+2=-x^3+3x+2$

$=-(x^3-3x-2) \neq -F(x)$

الدالة غير متناظرة حول نقطة الأصل ولا حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) النهايات

$F'(x)=3x^2-3$

$\Rightarrow 3x^2-3=0$

$\to 3x^2=3$

$\to x^2=1 \to x=\pm 1$

$F(1)=(1)^3-3(1)+2=0$ ***نعوض في الدالة الاصلية***

$F(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$

$x<-1 \quad (-1,1) \quad x>1$

$+ + + + + + -1 - - - - - - 1 + + + + + +$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x>1\}$

الدالة متزايدة بالفترة $\{x: x \in R; x<-1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x \in R; x \in (-1,1)\}$

نهاية عظمى $(-1,4)$, صغرى $(1,0)$

$F''(x)=6x$

$\to 6x=0 \to x=0$

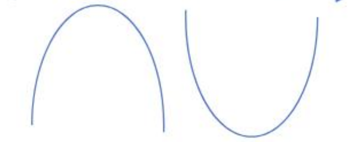
$F(0)=6(0)$ **نعوض في الدالة الأصلية**

نقطة انقلاب مرشحة $(0,0)$

$x<0 \qquad x>0$

$- - - - - - - 0 + + + + + +$

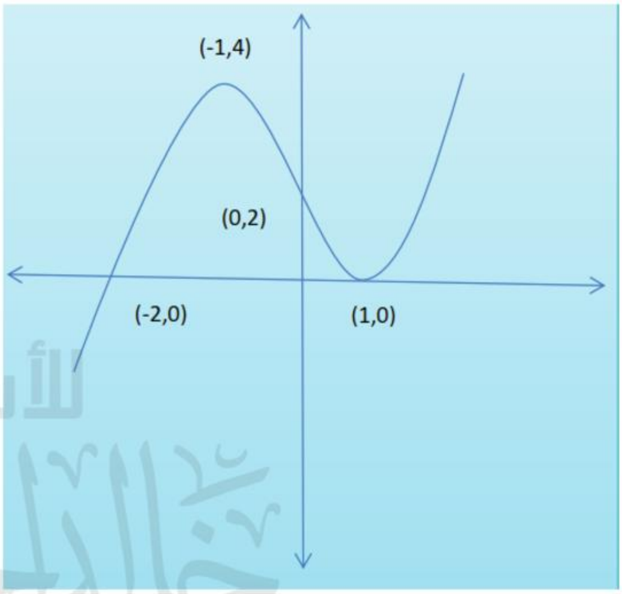
اشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x<0\}$

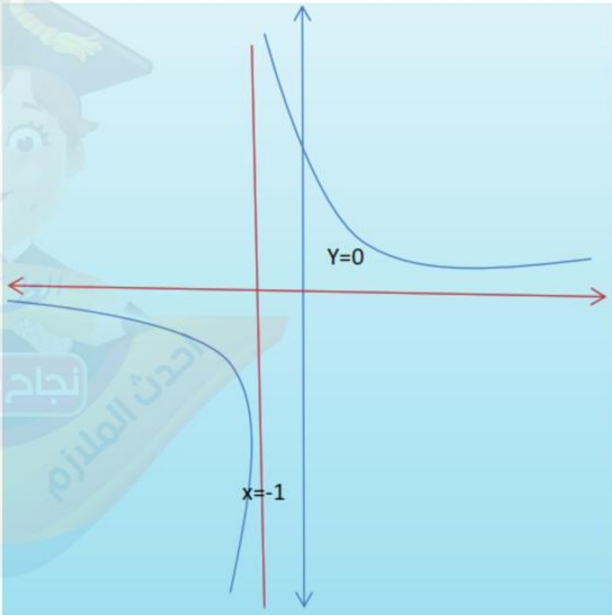
الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x>0\}$

نقطة انقلاب $(0,2)$



(2009/ تمهيدي)(2014/ اسئلة خارج القطر)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{1}{x+1}$



Sol:

1) أوسع مجال للدالة x=0 ناخذ المقام ونجعله= صفر

∴ أوسع مجال للدالة = R /{-1}

2) التقاطع مع المحورين

$if\ x=0 \rightarrow y=1$

$if\ y=0$ غير ممكن

نقطة التقاطع مع محور الصادات $(0,1)$

3) التناظر $\forall x \in \mathbf{R}, \exists (-x) \in R$

بما ان (1) ينتمي الى مجال الدالة لكن العدد(-1) لا ينتمي لها فالمنحني غير متناظر لا مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

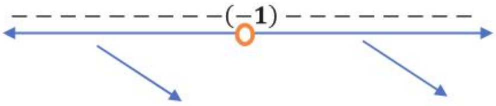
4)المستقيمات المحاذية:

المحاذي الافقي $y=0$, المحاذي العمودي $X=-1$

5)النهايات

$f'(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}\neq 0$ اي انه لاتوجد نقاط حرجة

$- - - - - - - - - - (-1) - - - - - - - - -$



الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x>1\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x<-1\}$

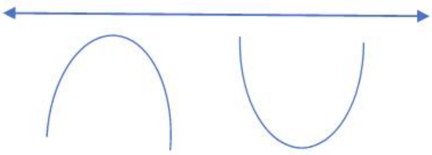
$$f''(x)=\frac{(x+1)^2.(0)+1[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}\neq 0$$

اي انه لا توجد نقاط انقلاب

$x<0 \qquad x>0$

$- - - - - - - 0 \ + + + + + +$

اشارة المشتقة الثانية



الدالة محدبة بالفترة $\{x:x\in R; x>-1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R; x<-1\}$

(2011 /1)(2015/ 3)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=6x-x^3$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=6x-x^3 \Rightarrow x(6-x^2)=0$

either x=0 ∴ النقطة (0, 0)

or $6-x^2=0$

$\Rightarrow x^2=6$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$, ∴ النقطتان $(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$

∴ النقاط (0, 0) $(\sqrt{6},0),(-\sqrt{6},0)$ تقاطع مع السينات

∴ النقطة (0, 0) تقاطع مع محور الصادات $F(0)=6(0)-(0)^3=0$

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=6(-x)-(-x)^3=-6x+x^3=-(6x-x^3)=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5)

$F'(x)=6-3x^2$

$\Rightarrow 0=6-3x^2$

$\Rightarrow 3x^2=6$

$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$

نعوض في الدالة الاصلية $F(-\sqrt{2})=6(-\sqrt{2})-(-\sqrt{2})^3$

$=-6\sqrt{2}+2\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$

∴ النقطة $(-\sqrt{2},-4\sqrt{2})$

$F(\sqrt{2})=6(\sqrt{2})-(\sqrt{2})^3=6\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4\sqrt{2}$,

∴ النقطة $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x>\sqrt{2}\},\{x:x\in R; x<-\sqrt{2}\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x:x\in R; x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})\}$

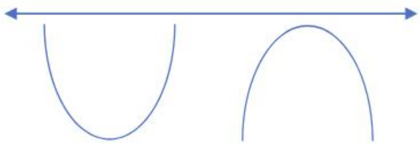
∴ النقطة $(-\sqrt{2},4\sqrt{2})$ نهاية صغرى محلية للدالة.

∴ النقطة $(\sqrt{2},4\sqrt{2})$ نهاية عظمى محلية للدالة.

$F''(x)=-6x$

$\Rightarrow 0=-6x \Rightarrow x=0$

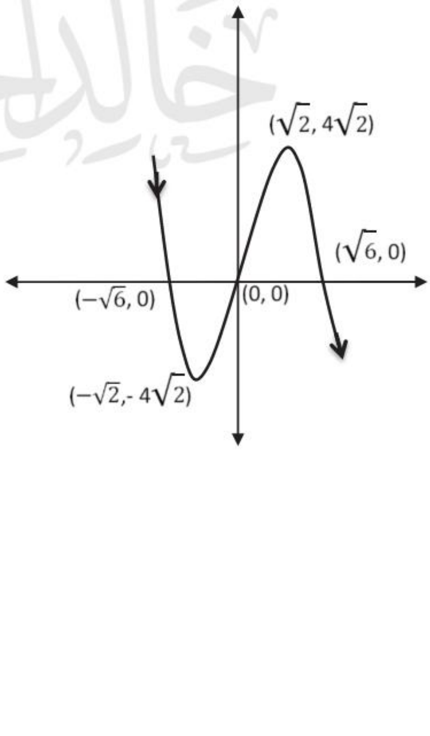
نعوض في الدالة الأصلية $F(0)=-6(0)-(0)^3$



الدالة محدبة بالفترة $\{x:x\in R; x>0\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x:x\in R; x<0\}$

∴ النقطة (0, 0) *نقطة انقلاب*



(2011/ 2)(2013/ 2)(2016/ تمهيدي)

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=(1-x)^3+1$

Sol:

1 أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=(1-x)^3+1$

$\Rightarrow (1-x)^3=-1$

$\Rightarrow 1-x=-1 \Rightarrow x=2$

∴ النقطة $(2, 0)$ تقاطع مع السينات

∴ النقطة $(0, 2)$ تقاطع مع الصادات $F(0)=(1-0)^3+1=2$

3) التناظر $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=(1-(-x))^3+1=(1+x)^3 \neq F(x)$

$\Rightarrow$ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$\Rightarrow F(-x) \neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الأصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5)

$F'(x)=3(1-x)^2(-1)=-3(1-x)^2$

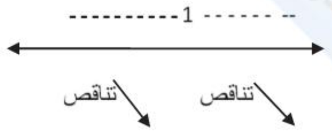
$\Rightarrow [0=-3(1-x)^2]\div(-3)$

$\Rightarrow (1-x)^2=0$

$\Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1=1$ *نعوض في الدالة الاصلية*

∴ النقطة $(1, 1)$



الدالة متناقصة بالفترة $\{x: x\in R; x<1\}, \{x: x \in R; x>1\}$

∴ النقطة $(1, 1)$ نقطة حرجة فقط للدالة

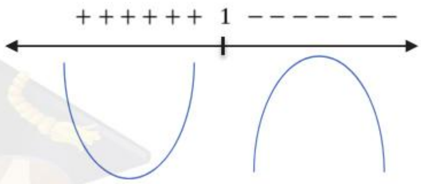
$F''(x)=-6(1-x)(-1)=6(1-x)$

$\Rightarrow [0=6(1-x)]\div 6 \Rightarrow 1-x=0$

$\Rightarrow x=1$

$F(1)=(1-1)^3+1$ *نعوض في الدالة الاصلية*

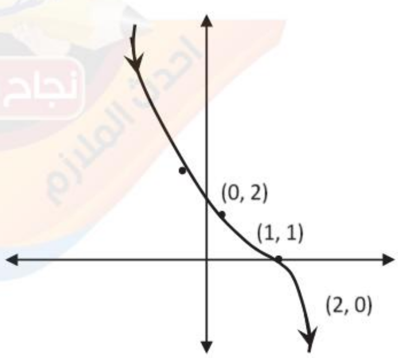
∴ النقطة $(1, 1)$



الدالة محدبة بالفترة $\{x: x \in R; x>1\}$

الدالة مقعرة بالفترة $\{x: x \in R; x<1\}$

∴ النقطة $(1, 1)$ نقطة انقلاب



2012/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{1}{x}$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة $x=0$ ناخذ المقام ونجعله = صفر

$\therefore$ أوسع مجال للدالة = $R/\{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{1}{x} \Rightarrow 0=1$ (غير ممكن)

$\therefore$ لا يوجد تقاطع مع محور السينات

لا يوجد تقاطع مع محور الصادات (كمية غير معروفة) $F(0)=\frac{1}{0}$

3) التناظر

$\forall\ x \in R, \exists\ (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-F(x)$

الدالة متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$X=0$ تجعل y غير معرفة

(محور الصادات) معادلة المحاذي العمودي $\therefore x=0$

المحاذي الافقي: $y=\frac{1}{x} \Rightarrow x=\frac{1}{y}, y=0$

$y=0$ تجعل x غير معرفة

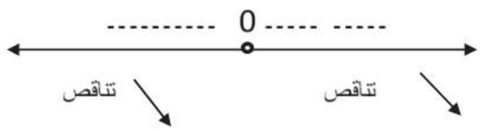
(محور السينات) معادلة المحاذي الافقي $\therefore y=0$

$F(x)=x^{-1} \Rightarrow F'(x)=-x^{-2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{x^2}$

$0=-\frac{1}{x^2} \Rightarrow 0=-1$ (غير ممكن)

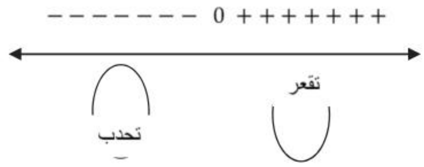
$x^2=0 \Rightarrow x=0 \notin$ للمجال



F متناقصة في $\{x: x>0\}, \{x: x<0\}$ $\therefore$ لا توجد نقاط حرجة

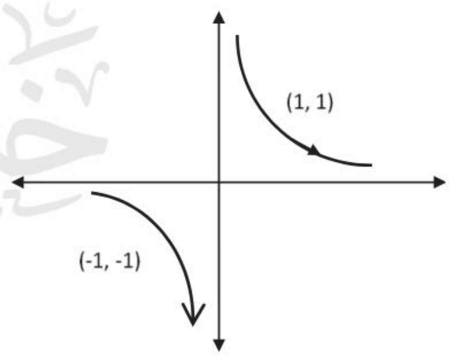
$F''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3} \Rightarrow (0=2)$ غير ممكن

ناخذ المقام ونجعله = صفر $x^3=0 \Rightarrow x=0 \notin$ للمجال



F محدبة في $\{x: x<0\}$

F مقعرة في $\{x: x>0\}$ لا توجد نقاط انقلاب



سنبلغ حلمنا لو بعد حين فنحن بحار عزم إن أردنا

(2012/ 2)(2017/ 1"اسئلة الموصل")

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 2x^2 - x^4$

Sol:

1)اوسع مجال للدالة = R

2)التقاطع مع المحورين

$0=2x^2-x^4 \Rightarrow x^2(2-x^2)=0$

either $x^2=0 \Rightarrow x=0$

$\therefore$ النقطة $(0, 0)$

or $2-x^2=0$

$\Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$ $(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ $\therefore$ النقطتان

$\therefore$ النقاط $(0, 0)$ $(\sqrt{2},0),(-\sqrt{2},0)$ تقاطع مع السينات

$F(0)= 2(0)^2-(0)^4 = 0$

$\therefore$ النقطة $(0, 0)$ تقاطع مع محور الصادات

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=2(-x)^2-(-x)^4 = 2x^2 - x^4 = F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المحاذيات لا توجد لان الدالة غير نسبية

5) *النهايات*

$F'(x)= 4x - 4x^3$

$\Rightarrow (0 = 4x - 4x^3) \div 4$

$\Rightarrow x - x^3 = 0$

$\Rightarrow x(1-x^2) = 0$

Either $x=0$ or $1-x^2 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$F(-1)= 2(-1)^2-(-1)^4 = 2-1 = 1$

$\therefore$ النقطة $(-1, 1)$

$F(0)= 2(0)^2-(0)^4 = 0$ $(0, 0)$ $\therefore$ النقطة

$F(1)= 2(1)^2-(1)^4 = 1$ $(1, 1)$ $\therefore$ النقطة

+ + + + + + + + -1 - - - - - - - 0 + + + + 1 - - - - -

تزايد تناقص تزايد تناقص

F *متناقصة في* $\{x: x>1\}, (-1, 0)$

F متزايدة في $\{x: x<-1\}$ $(0, 1)$

$\therefore$ النقطة $(-1, 0)$ و $(0, 1)$ نهاية عظمى محلية للدالة.

$\therefore$ النقطة $(0, 0)$ نهاية صغرى محلية للدالة.

$F''(x)=4-12x^2$

$\Rightarrow 0 = 4 - 12x^2$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$F(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = 2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{9} = \frac{5}{9}$ $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ $\therefore$ *النقطة*

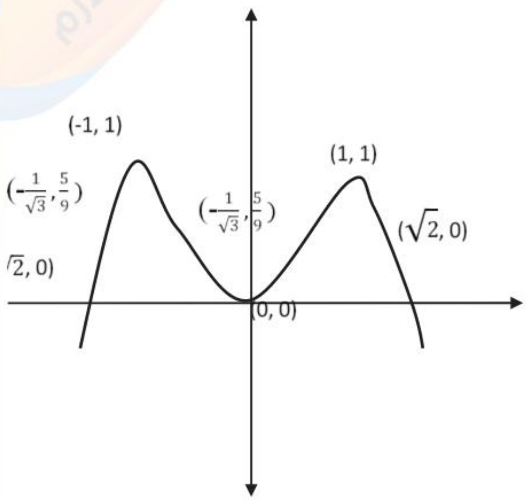
- - - - - - - - - - $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ + + + + + + $\frac{1}{\sqrt{3}}$ - - - - - - -

تحدب تقعر تحدب

F *محدبة في* $\{x: x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$ و $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

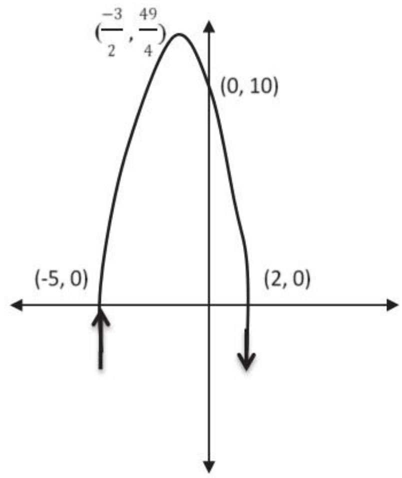
F *مقعرة في* $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

$\therefore$ *النقطتان* $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ و $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9})$ *نقطتا انقلاب*



2013/ تمهيدي

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = 10 - 3x - x^2$



Sol:

1) أوسع مجال للدالة $= R$

2) التقاطع مع المحورين

$0=10-3x-x^2 \Rightarrow (5+x)(2-x)=0$

either $5-x=0 \Rightarrow x=-5$ $(-5, 0)$ النقطة $\therefore$

or $2-x=0 \Rightarrow x=2$ $(2, 0)$ النقطة $\therefore$

نقاط تقاطع مع محور السينات $(2, 0)$ $(-5,0)$.

$F(0)= 10-3(0)-(0)^2 = 10$

$\therefore$ النقطة $(0, 10)$ *نقطة التقاطع مع محور الصادات*

3) التناظر: $\forall x \in R, \exists (-x) \in R$

$F(-x)= 10-3(-x)-(-x)^2 = 10+3x-x^2 \neq F(x)$

$\Rightarrow$ الدالة ليست متناظرة حول محور الصادات

$F(-x) \neq -F(x)$ الدالة ليست متناظرة حول نقطة الاصل

4) المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست نسبية.

5) *النهايات*

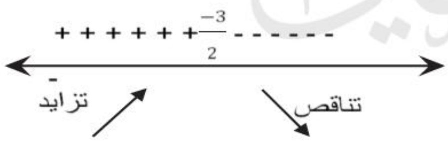
$F'(x)=-3-2x$

$\Rightarrow 0 = -3-2x$

$\Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{2}$

$\therefore f(\frac{-3}{2})=10-3(\frac{-3}{2}) - (\frac{-3}{2})^2$ *نعوض في الدالة الاصلية*

$= 10+\frac{9}{2}-\frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} = \frac{49}{4}$



F متزايدة في $\{x: x < \frac{-3}{2}\}$

F *متناقصة في* $\{x: x > \frac{-3}{2}\}$

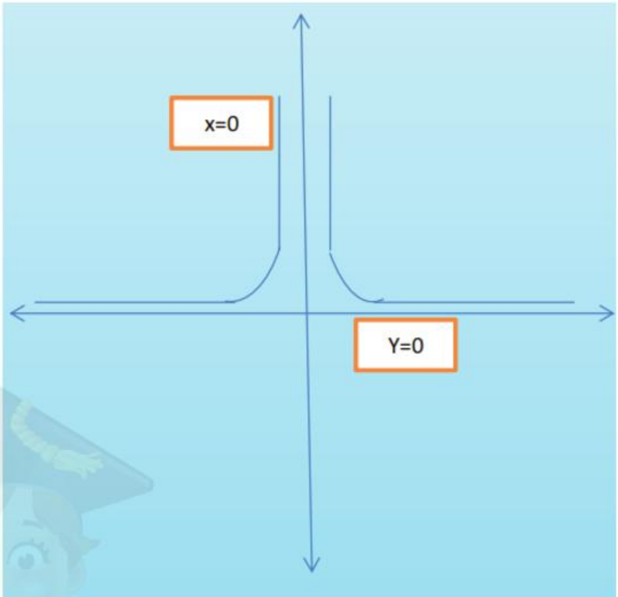
$\therefore$ النقطة $(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4})$ نهاية عظمى محلية للدالة

$\therefore$ الدالة محدبة في R $F''(x)=-2<0$

لا توجد نقاط انقلاب

3 /2014

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x)=\frac{3}{x^2}$



Sol:

1) أوسع مجال للدالة $R/\{0\}$

2) التقاطع مع المحورين

لا توجد نقاط تقاطع مع المحورين لان

محاذي $x=0$

محاذي $y=0$

3) التناظر

$\forall x \in R/[0] \exists (-x) \in R/[0]$

$$f(-x)=\frac{3}{(-x)^2}=\frac{3}{x^2}=f(x)$$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

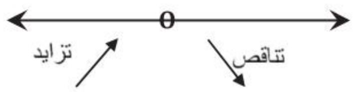
4) المستقيمات المحاذية:

X=0 ***المحاذي العمودي*** , y=0 ***المحاذي الافقي***

5)النهايات

$f'(x)=-6x^{-3}=\frac{-6}{x^3}\neq 0$ **اي انه لاتوجد نقاط حرجة**

+ + + + + + 0 - - - - - -



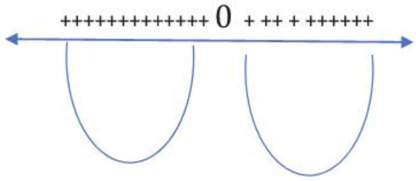
الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x\in R; x<0\}$

الدالة متناقصة بالفترة $\{x{:}x\in R; x>0\}$

$$f''(x)=18x^{-4}=\frac{18}{x^4}\neq 0$$

∴ لا توجد نقاط انقلاب

+++++++++++++ 0 + ++ + ++++++



اشارة المشتقة الثانية

الدالة مقعرة بالفترتين $\{x{:}x\in R; x>0\}$
$\{x{:}x\in R; x<0\}$

(2015/ تمهيدي)(3/2019"تطبيقي")

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Sol:

أوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$$x = 0 \Rightarrow y = (0)^3 - 3(0)^2 + 4 = 4$$

$\therefore$ النقطة $(0, 4)$

3)التناظر:

$\forall x \in R/[0] \exists (-x) \in R/[0]$

$f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

$\therefore f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$

$\therefore$لا يوجد تناظر مع محور الصادات ولا مع نقطة الاصل

4)المستقيمات المحاذية/ لا توجد لان الدالة ليست كسرية.

5) *النهايات*

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$

$\rightarrow [3x^2 - 6x = 0] \div 3$

$x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0 \ \rightarrow y = 4$

$x = 2$

$\rightarrow y = (2)^3 - 3(2)^2 + 4$

$= 8 - 12 + 4 = 0$

$\therefore$ نقاط حرجة $(0, 4)$, $(2, 0)$

$+ + + + + +0 - - - -2 + + + + + + +$

$\longleftrightarrow$

تزايد $\nearrow$ تناقص $\searrow$

مناطق التزايد $\{x: x < 0\}$,$\{x: x > 2\}$

مناطق التناقص $(0, 2)$

نهاية عظمى محلية$(2, 0)$, نهاية عظمى محلية$(0, 4)$

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0$

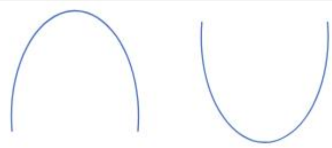
$\rightarrow [6x - 6 = 0] \div 6$

$x - 1 = 0$

$\rightarrow x = 1 \ \rightarrow y = (1)^3 - 3(1)^2 + 4$

$1 - 3 + 4 = 2$ $\therefore$ النقطة$(1, 2)$

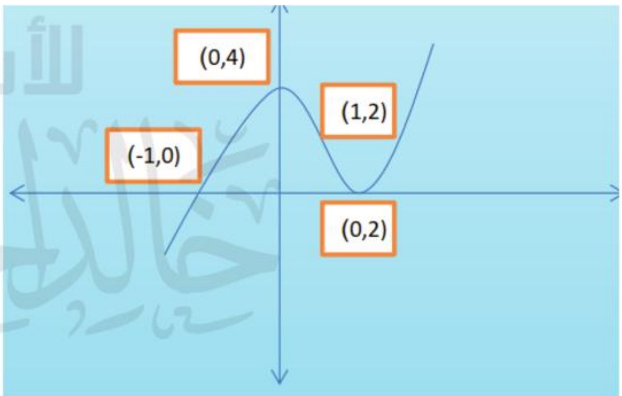
$- - - - -0 + + + + + + +$



مناطق التقعر $\{x: x > 1\}$

مناطق التحدب $\{x: x < 1\}$

نقطة انقلاب$(1, 2)$



2015/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{6}{x^2+3}$

Sol:

1) اوسع مجال للدالة = R

2) التقاطع مع المحورين

$0=\frac{6}{x^2+3} \Rightarrow 6 = 0$ (غير ممكن)

∴ الدالة لا تقطع محور السينات

$F(0)= \frac{6}{(0)^2+3} = \frac{6}{3} = 2$

∴ النقطة (0, 2) تقاطع مع الصادات

3) التناظر:

$F(-x)=\frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3} = F(x)$

الدالة متناظرة حول محور الصادات

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

$x^2+3\neq 0$

∴ لا يوجد محاذي عمودي

المحاذي الافقي:

$y=\frac{6}{x^2+3}$

$\Rightarrow yx^2 + 3y = 6$

$\Rightarrow yx^2 = 6 - 3y \Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y}$

y=0 تجعل x غير معرفة

∴ y=0 (محور السينات) معادلة المحاذي الافقي

5) النهايات

$F(x)=6(x^2+3)^{-1}$

$\Rightarrow F'(x) = -6(x^2+3)^{-2}(2x)$

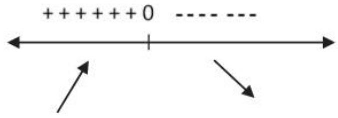
$\Rightarrow F'(x) = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow 0 = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$

$\Rightarrow -12x = 0 \Rightarrow x = 0$

$F(0)= \frac{6}{(0)^2+3} = 2$ النقطة (0, 2)

++++++0 ---- ---



F متناقصة في {x: x >0}

F متزايدة في {x: x <0}

∴ النقطة (0, 2) نهاية عظمى محلية للدالة

$F''(x)=\frac{(x^2+3)^2(-12)+12x[(2)(x^2+3)(2x)]}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow \frac{-12(x^2+3)^2 + 48x^2(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$

$\Rightarrow F''(x) = \frac{(x^2+3)[-12x^2 - 36 + 48x^2]}{(x^2+3)^4}$

$= \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 0 = \frac{36x^2-36}{(x^2+3)^3}$

$\Rightarrow 36x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow 36x^2 = 36$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\Rightarrow x = \pm 1$

$F(-1)= \frac{6}{(-1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(-1, \frac{3}{2})$

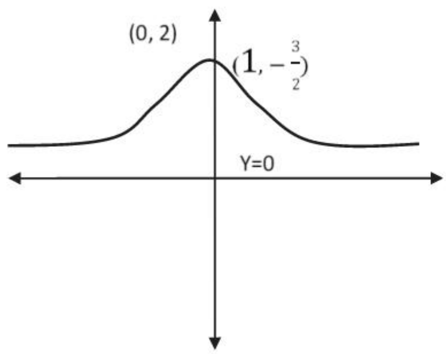
$F(1)= \frac{6}{(1)^2+3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ النقطة $(1, \frac{3}{2})$

-----------−1 ++++++ 1 ----- --

F مقعرة في {x: x <-1} و {x: x >1}

F محدبة في (-1, 1)

∴ النقطتان $(1, \frac{3}{2})$ و $(-1, \frac{3}{2})$ نقطتا انقلاب



2 /2016

س/ باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم منحني الدالة $F(x) = \frac{x-1}{x+1}$

Sol:

1) أوسع مجال للدالة $x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$

فيكون اوسع مجال للدالة = R /{-1}

2) التقاطع مع المحورين

$F(0)=\frac{x-1}{x+1} \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

∴ النقطة (1, 0)

∴ النقطة (1, 0) تقاطع مع السينات

$F(0)=\frac{0-1}{0+1} = -1$

∴ النقطة (0, -1) *تقاطع مع الصادات*

3) التناظر: $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}, \exists (-x) \in R$

$F(-x)=\frac{-x-1}{-x+1} \neq F(x)$

∴ $F(-x) \neq -F(x)$ لايوجد نناظر

4) المستقيمات المحاذية: المحاذي الشاقولي (العمودي)

معادلة المحاذي العمودي $\therefore x = -1$

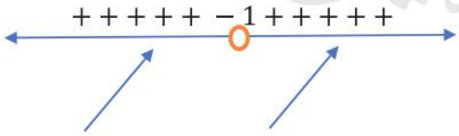
معادلة المحاذي الأفقي ∴y=1

5) النهايات

$F'(x)=\frac{(x+1)(1)-(x-1)(1)}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow= \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

$= \frac{2}{(x+1)^2} \Rightarrow 2 \neq 0$ (لا يوجد نقاط حرجة)



مناطق التزايد ({x: x <-1}

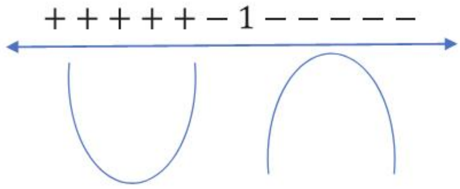
{x: x >-1}

$F'(x)=2\,(x+1)^{-2}$

$\Rightarrow F''(x) = -4(x+1)^{-3}(1) = \frac{-4}{(x+1)^3}$

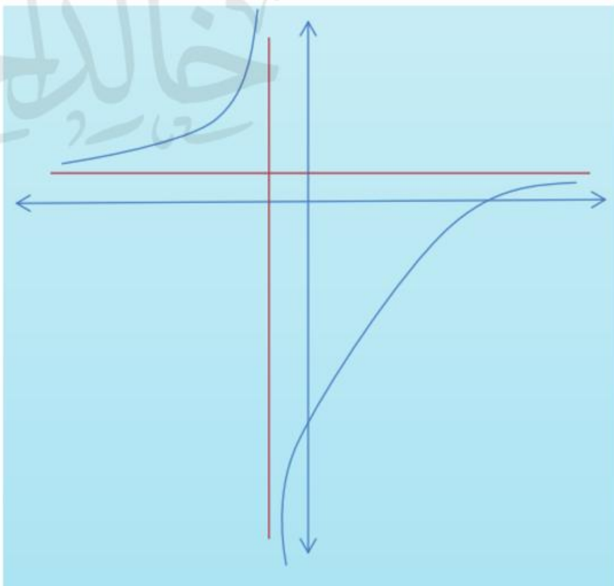
$\Rightarrow 0 = \frac{-4}{(x+1)^3}$

$\Rightarrow -4 \neq 0$ (لا يوجد نقاط انقلاب)



مناطق التحدب {x: x >-1}

مناطق التقعر {x: x <-1}



2 /2020

س/ باستخدام معلوماتك بالتفاضل ، أرسم منحني الدالة : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$.

Sol:

1) أوسع مجال للدالة R

2) محاذي افقي y = 1 , لا يوجد محاذي عمودي

3) التقاطع

$$x=0 \Rightarrow y=0 , \Rightarrow (0,0)$$

$$y=0 \Rightarrow y=\frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$$

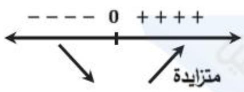
4) التناظر

الدالة متناظرة مع محور الصادات $f(-x)=f(x)$

5) النهايات

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$\Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0 \Rightarrow (0,0)$ **نقطة حرجة**



الدالة متزايدة في $\{x: x>0\}$

الدالة متناقصة في $\{x: x<0\}$

(0 , 0) نقطة نهاية صغرى

6) نقاط الانقلاب

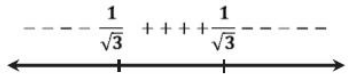
$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x\big(2(x^2+1)\big)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{(x^2+1)(2x^2+2-8^2)}{(x^2+1)^4}$$

$$\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0 \Rightarrow 2-6x^2=0 \Rightarrow 1-3x^2=0$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{1}{4} , \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$$

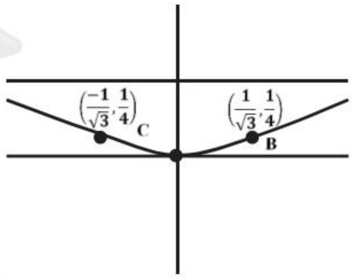


الدالة محدبة في $\{x: x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

الدالة مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

الدالة محدبة في $\{x: x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

نقاط الانقلاب $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}\right)$



الاسئلة الوزارية حول الفصل الرابع" التكامل"

30 درجة في الوزاري

1- الاسئلة الوزارية حول التكامل المحدد

1996 /1

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$

Sol:

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$$

$$= \int_0^3 (x+1)^{\frac{-1}{2}} dx$$

$$= 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3$$

$$= 2\left[\sqrt{x+1}\right]_0^3$$

$$= 2(2-1) = 2$$

1998 /1

س/ اذا كان $\int_{-1}^{a}(x - x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$ جد قيمة $a \in R$

Sol:

$$\int_{-1}^{a}(x - x^3)\ dx = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left[(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)\right]_{-1}^{a} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{-9}{4}$$

$$\rightarrow \left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) - \frac{1}{4} = \frac{-9}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}a^4\right) = -2$$

$$\rightarrow 2a^2 - a^4 = -8$$

$$\rightarrow a^4 - 2a^2 - 8 = 0$$

$$(a^2 - 4)(a^2 + 2) = 0$$

$$\rightarrow a^2 - 4 = 0$$

$$\rightarrow a^2 = 4$$

$$\rightarrow\ a = \mp 2\ , a^2 + 2 \neq 0$$

1997 /1

س/ جد قيمة التكامل $\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}\ dx$

Sol:

$$\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 2x(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\left[(x^2 - 15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2 - 15)^3}\right]_4^8$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(64 - 15)^3} - \sqrt{(16 - 15)^3}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(343 - 1) = \frac{342}{3} = 114$$

1998 /2

س/ اذا كان $\int_a^b (2x+3)\ dx = 12$,وكان $a + 2b = 3$ جد قيمتي $a, b \in R$

Sol:

$$\int_a^b (2x+3)\ dx = 12$$

$$\rightarrow [(x^2 + 3x)]_a^b = 12$$

$$(b^2 + 3b) - (a^2 + 3a) = 12$$

$$\rightarrow b^2 + 3b - a^2 - 3a = 12 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a = 3 - 2b \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

نعوض (2) في(1)

$$b^2 + 3b - (3 - 2b)^2 - 3(3 - 2b) = 12$$

$$b^2 + 3b - (9 - 12b + 4b^2) - 9 - 6b - 12 = 0$$

$$-3b^2 + 12b - 30 = 0] \div -3$$

$$\rightarrow b^2 - 7b + 10 = 0$$

$$(b - 2)(b - 5) = 0$$

اما $b = 2 \rightarrow a = -1$

او $b = 5 \rightarrow a = -7$

(2 /2005)(1 /2002)(2 /2000)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx$

Sol:

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}} x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 (x^2+9)^{\frac{1}{2}}\ 2x dx = \left[(\frac{1}{2})(\frac{2}{3})(x^2+9)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{(x^2+9)^3}\right]_0^4 = \frac{1}{3}\left[\sqrt{(16+9)^3} - \sqrt{(0+9)^3}\ \right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}\ \right]$$

$$= \frac{1}{3}(125-27) = \frac{98}{3}$$

---

1 /2001

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$

Sol:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}\ (2x+5)dx$$

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\left[\sqrt{(x^2+5x)^3}\right]_0^4$$

$$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{(36)^3} - \sqrt{(0)^3}\right) = \frac{2}{3}(216) = 144$$

---

2 /2001

س/ جد $\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

Sol:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$= \int_{-1}^1 \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int_{-1}^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_{-1}^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3+2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5} = \frac{2}{5}$$

---

1 /2004

س/ اذا كان $\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ dx = \ 2$ جد قيمة $a \in R$

Sol:

$$\int_a^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}\ dx = 2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}} x dx = 2$$

$$\rightarrow = \frac{1}{2}\int_a^4 (x^2+9)^{\frac{-1}{2}} 2x dx = 2$$

$$= \left[\left(\frac{1}{2}\right)(2)(x^2+9)^{\frac{1}{2}}\right]_a^4 = 2$$

$$\rightarrow = \left[\sqrt{x^2+9}\right]_a^4 = 2$$

$$(\sqrt{16+9}) - \left(\sqrt{a^2+9}\right) = 2 \ \rightarrow \sqrt{25} - \sqrt{a^2+9} = 2$$

$$\sqrt{a^2+9} = 3 \ \rightarrow a^2+9 = 9 \ \rightarrow a^2 = 0 \ \rightarrow a = 0$$

---

2 /2003

س/ جد $\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{dx}{9-12x+4x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^2}$$

$$= \int_0^1 (3-2x)^{-2}dx = \frac{-1}{2}\int_0^1 (3-2x)^{-2}(-2)dx$$

$$= \frac{1}{2}[(3-2x)^{-1}]_{-1}^1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3-2} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

---

2 /2002

س/ جد $\int_0^4 \sqrt{x}\ (x+6)dx$

Sol:

$$\int_0^4 \sqrt{x}\ (x+6)dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}}\ (x+6)dx$$

$$= \int_0^4 \left(x^{\frac{3}{2}} + 6x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \left[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 6\,.\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + 4\sqrt{x^3}\right]_0^4 = \left(\frac{2}{5}\sqrt{4^5} + 4\sqrt{4^3}\right) - (0)$$

$$= \frac{64}{5} + 32 = \frac{224}{5}$$

(2003/ 2)(2015/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد $\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{3x^3 - 2x^5}$

Sol:

$$\int_{-1}^{1} \sqrt[3]{x^3(3-2x^2)dx}$$
$$= \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} x dx$$
$$= \frac{-1}{4} \int_{-1}^{1} (3-2x^2)^{\frac{1}{3}} (-4) x dx$$
$$= \frac{-1}{4} \cdot \frac{3}{4} \left[(3-2x^2)^{\frac{4}{3}}\right]_{-1}^{1} \quad = \frac{-3}{16}(1-1) = 0$$

2006/ 1

س/ جد $\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$

Sol:

$$\int_1^2 \frac{1}{(5-2x)^2} dx$$
$$= \int_1^2 (5-2x)^{-2} dx \quad = \frac{-1}{2} \int_1^2 (5-2x)^{-2}(-2) dx$$
$$= \frac{1}{2}\left[(5-2x)^{-1}\right]_1^2$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5-2x}\right]_1^2 \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5-4} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

2006/ 2

س/ جد $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$

Sol:

$$\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$$
$$= \int_1^2 (3x-4)^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{3} \int_1^2 (3x-4)^{-2}(3) dx$$
$$= \frac{-1}{3}\left[\frac{1}{3x-4}\right]_1^2$$
$$= \frac{-1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{-1}\right) = \frac{-1}{3}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

2008/ تمهيدي

س/ جد $\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$

Sol:

$$\int_0^7 \frac{1}{\sqrt[3]{x+1}} dx$$
$$= \int_0^7 (x+1)^{\frac{-1}{3}} dx$$
$$= \frac{3}{2}\left[(x+1)^{\frac{2}{3}}\right]_0^7$$
$$= \frac{3}{2}\left[\sqrt[3]{(x+1)^2}\right]_0^7$$
$$= \frac{3}{2}(4-1) = \frac{9}{2}$$

2008/ 1

س/ اذا كان $\int_a^b f(x)dx = 5$, $\int_c^b f(x)dx = 3$,وكانت

$c \in [a, b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)dx$

Sol:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$
$$\to 5 = \int_a^c f(x)dx + 3 \to \int_a^c f(x)dx = 2$$

2010/ 2

س/ اذا كان $\int_1^3 g(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 6$,

جد $\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx$

Sol:

$$\int_1^3 [f(x) - g(x) + 4x]dx$$
$$= \int_1^3 f(x)dx - \int_1^3 g(x)dx + \int_1^3 4x\, dx$$
$$6 - 2 + [2x^2]_1^3$$
$$= 4 + (18 - 2)$$
$$= 20$$

1 /2009

س/ جد $\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$$

$$= \int_0^1 (x^2+1)^{-2}xdx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2}\,2xdx$$

$$= \frac{-1}{2}[(x^2+1)^{-1}]_0^1$$

$$= \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right) = \frac{1}{4}$$

(1 /2010)(1/2019"تطبيقي")

س/ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx+cosx)^2dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(sinx+cosx)^2dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(sin^2x+2\,sinx\,cosx+cos^2x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+sin2x)dx$$

$$= [x-\frac{1}{2}cos2x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}cos\pi\right)-\left(0-\frac{1}{2}cos0\right)$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}+1$$

(2 /2009)(2 /2018)

س/ جد $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx$

Sol:

$$\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx = \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}dx = \int_3^8 \frac{x}{x\sqrt{(x+1)}}dx$$

$$\int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx = 2\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$= 2\left((8+1)^{\frac{1}{2}}-(3+1)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2*3-2*2 = 6-4 = 2$$

(1 /2011)(3 /2016)

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2+\tan x}dx$

Sol:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{sec^2x}{2+\tan x}dx$$

$$= [\ln|2+\tan x|]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \ln|2+\tan\frac{\pi}{4}| - \ln|2+\tan(-\frac{\pi}{4})|$$

$$= \ln|2+1| - \ln|2-1| = \ln 3 - 0 = \ln 3$$

---

1 /2011 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}(-\sin x)\,dx$$

$$= -[e^{\cos x}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -[e^{\cos\frac{\pi}{2}} - e^{\cos 0}] = -(e^0-e^1)$$

$$= -(1-e) = e-1$$

---

1 /2011

س/ جد قيمة التكامل $\int_{-3}^{4}|x|dx$

Sol: $f(x)=|x| = \begin{cases} x, \forall x \ge 0 \\ -x, \forall x \le 0 \end{cases}$

$f(0)=0$

$\lim_{x\to0^{(+)}} f(x)=0=L_1$, $\lim_{x\to0^{(-)}} f(x)=0=L_2$

$\because L_1=L_2=0$ الغاية موجودة

$\because f(0)=\lim_{x\to0} f(x)=0$ الدالة مستمرة

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$$

$$= \int_{-3}^{0} f(-x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx$$

$$= [-\frac{1}{2}x^2]_{-3}^{0} + [\frac{1}{2}x^2]_0^4$$

$$= \left[(0)-\left(\frac{-9}{2}\right)\right]+[(8)-(0)]$$

$$= \frac{9}{2}+8=\frac{25}{2}=12.5$$

(1 /2011)(2 /2013)(2016/ تمهيدي)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx$

Sol:

$$\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x dx = [\frac{(1+e^x)^3}{3}]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - (1+e^0)^3]$$

$$= \frac{1}{3}[((1+e^1)^3 - (1+1)^3] = \frac{1}{3}[(1+e)^3 - 8]$$

---

2 /2011

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$$

$$= [\ln|x^3+4x+1|]_0^1$$

$$= \ln|1+4(1)+1| - \ln|0+0+1|$$

$$= \ln|6| - \ln|1| = \ln 6 - \ln 1 = \ln 6 - 0 = \ln 6$$

(2012/ تمهيدي)(2015/ تمهيدي)(3/2019)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

Sol:

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$$

$$= \ln|16+9| - \ln|0+9|$$

$$= \ln 25 - \ln 9 = \frac{ln25}{ln9}$$

2012/ تمهيدي

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x \sin x \, dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} tanx \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cosx} dx$$

$$= [-\ln|cosx|]_0^{\frac{\pi}{3}} = -[(\ln\left|cos\frac{\pi}{3}\right|) - (\ln|cos0|)]$$

$$= -\left[\left(\ln\left|\frac{1}{2}\right|\right) - (\ln|1|)\right] = -\left(\ln\frac{1}{2} - 0\right) = -\ln\frac{1}{2}$$

(1 /2012)(2 /2014)(2 /2016)

س/ جد قيمة التكامل $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

Sol:

$$\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx = \frac{1}{2}\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}(2dx) = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{\ln 3}^{\ln 5}$$

$$= \frac{1}{2}[e^{2\ln 5} - e^{2\ln 3}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{\ln 25} - e^{\ln 9}]$$

$$= \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}(16) = 8$$

(2012/ 1 خارج القطر)(2 /2012)(2 /2015)

س/ جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}}$

Sol:

$$\boxed{u = \sqrt{x} \ , du = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx}$$

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^4 e^{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

$$= [e^{\sqrt{x}}]_1^4 = e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}} = e^2 - e$$

(3 /2013)(2 /2014)

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x} dx$

Sol:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx \, sec^2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\left(tan\frac{\pi}{4} - tan0\right) = \frac{1}{2}$$

2014/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int_1^2 x \, e^{-\ln x} dx$

Sol:

$$\int_1^2 x \, e^{-\ln x} dx$$

$$= \int_1^2 x \, e^{\ln x^{-1}} x \, dx$$

$$= \int_1^2 e^{\ln\frac{1}{2}} x \, dx$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{x}(x) \, dx$$

$$= \int_1^2 dx = [x]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

(2014/ تمهيدي)(2015/ 1)(3/2019)

س/ جد قيمة $a \in R$ اذا علمت ان

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\, dx$$

Sol:

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right) dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2 x\, dx$$

$$\Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}\right]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[x^2+x]_1^a = 2[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{1}{2}[(a^2+a)-(1^2+1)]$$

$$= 2\left[tan\frac{\pi}{4} - tan0\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a^2+a-2) = 2(1-0) \Rightarrow \frac{1}{2}[a^2+a-2) = 2]\times 2$$

$$a^2+a-2=4 \Rightarrow a^2+a-6=0$$

$$\Rightarrow (a+3)(a-2)=0$$

either a+3=0 $\Rightarrow a=-3$ or a-2=0 $\Rightarrow a=2$

(2014/ 1)(2017/ تمهيدي)

س/ اذا كانت $f(x)=\begin{cases} 3x^2, \forall x \ge 0 \\ 2x, \forall x < 0 \end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ ؟

Sol:

نثبت ان الدالة مستمرة على [-1, 3]

$f(x)=3x^2 \Rightarrow f(3)=3(0)^2=0$ معرفة

$$\lim_{x\Rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\Rightarrow 0^+} 3x^2 = 3(0)^2 = 0 = L_1 \\ \lim_{x\Rightarrow 0^-} 2x = 2(0) = 0 = L_2 \end{cases}$$

$\therefore L_1 = L_2 = 0 \Rightarrow \lim_{X\to 0} f(x) = 0$ موجودة

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0$ $\therefore$ الدالة f مستمرة عند $x=0$

كذلك الدالة مستمرة على كل من {x: x<0}, { x: x>0}

$\therefore$ الدالة مستمرة على R

$\therefore$ الدالة مستمرة على [-1, 3]

$$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} 2x\, dx + \int_0^3 3x^2\, dx = [x^2]_{-1}^{0} + [x^3]_0^3$$

=[0-1]+[27-0] = -1+27=26

2015/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

Sol:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{-1}{2}} x \cos x\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = 2[\sqrt{\sin x}]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\left[\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}} - \sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}\right] = 2\left[\sqrt{1} - \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= 2\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 2-\sqrt{2}$$

(2014/ 3)(2017/ 2"اسئلة خارج القطر")(2019/ تمهيدي)

س/ اثبت ان $\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$

$$sol: \int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & 3x-6 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2 & [2,4] \\ -(3x-6) & 3x-6<0 \Rightarrow x<2 & [-2,2] \end{cases}$$

=6-3x

$$\therefore \text{LHS} \int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = \int_{-2}^{2}(6-3x)\, dx + \int_2^4 (3x-6)\, dx$$

$$= \left[6x-\frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2}-6x\right]_2^4$$

$$= \left[\left(12-\frac{12}{2}\right)-\left(-12-\frac{12}{2}\right)\right] + \left[\left(\frac{48}{2}-24\right)-\left(\frac{12}{2}-12\right)\right]$$

=[(12-6) – (-12-6)] + [(24 – 24) – (6 – 12)]

= 6 + 18 + 6 = 30=RHS

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int_2^5 x\, e^{-\ln x}\, dx$

Sol:

$$\int_2^5 x\, e^{-\ln x}\, dx = \int_2^5 x\, e^{\ln x^{-1}}\, dx$$

$$= \int_2^5 x\, e^{\ln\frac{1}{x}} x\, dx$$

$$= \int_2^5 \frac{1}{x}(x)\, dx \qquad [e^{\ln x} = x \text{ حيث}]$$

$$= \int_2^5 dx = [x]_2^5 = 5-2 = 3$$

(2015/ 2 خارج القطر)(2016/ 3 خارج القطر)

س/ اثبت ان $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$

(1/2019)

س/ جد قيمة $\int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

Sol:

$$\text{LHS} \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \left(x^{\frac{-2}{3}}\right) dx$$

$$= 3\int_1^8 \left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right) dx$$

$$= 3\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8 = 3\left(\frac{2}{3}\right)\left[\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)^3}\right]_1^8$$

$$= 2\left[\sqrt{(\sqrt[3]{8}-1)^3} - \sqrt{(\sqrt[3]{1}-1)^3}\right]$$

$$= (2\sqrt{(1)^3} - (2\sqrt{(0)^3} = 2 = \text{RHS}$$

(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2018/ تمهيدي)

س/ جد قيمة $\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx$

Sol:

$\int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\,dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}dx$

$= -\int_2^3 (x^2+x+1)dx$

$= -[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x]_2^3$

$= -[(9+\frac{9}{2}+3) - (\frac{8}{3}+2+2)] = -[\frac{33}{2}-\frac{20}{3}]$

$= -(\frac{99-40}{6}) = \frac{-59}{6}$

(2015/ 4 اسئلة النازحين)(2017/ 1)(1/2019)"اسئلة خارج القطر"

س/ اذا كان للمنحني $f(x)=(x-3)^3+1$ نقطة انقلاب (a, b) جد القيمة العددية للمقدار $\int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

Sol:

$F(x)=(x-3)^3+1$ نجد نقطة الانقلاب

$F'(x)=3(x-3)^2(1) = 3(x-3)^2$

$F''(x)=6(x-3)(1)=6(x-3) \Rightarrow [0 = 6(x-3)] \div 6$

$\Rightarrow x-3=0 \Rightarrow x=3$

$F(3)=(3-3)^3+1 = 0+1=1$

$\therefore$ نقطة الانقلاب هي $(3, 1)$

نقطة الانقلاب هي (a, b)

$\therefore a=3,\ b=1$

$\therefore \int_0^b f'(x)dx - \int_0^a f''(x)dx$

$= \int_0^1 3(x-3)^2dx - \int_0^3 6(x-3)dx$

$= 3[\frac{(x-3)^3}{3}]_0^1 - 6[\frac{(x-3)^2}{2}]_0^3$

$= [(x-3)^3]_0^1 - 3[(x-3)^2]_0^3$

$= [(1-3)^3-(0-3)^3] - 3[(3-3)^2-(0-3)^2]$

$= [-8+27] - 3[0-9] = 19 + 27 = 46$

2016/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

Sol:

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cot x\,dx$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x}dx = [lin|\sin x|]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \ln\left|\sin\frac{\pi}{2}\right| - \left|\sin\frac{\pi}{2}\right| = \ln 1 - \ln\frac{1}{2} = \ln\frac{1}{2} = \ln 2$

2016/ تمهيدي

س/ لتكن $f(x)=x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{-1}^{2} f(x)dx$

Sol:

$f(x)=x^2+2x+k$

النهاية الصغرى تساوي -5 يعني $y=-5$

$f'(x)=2x+x \Rightarrow 0 = 2x+2$

$\Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-1$

$\therefore$ *عند* $x=-1$ *نهاية صغرى*

$\therefore$ النقطة $(-1, -5)$ نهاية صغرى نعوضها في الدالة

$-5=(-1)^2+2(-1)+k$

$\Rightarrow -5=1-2+k \Rightarrow k=-4$

$\therefore f(x)=x^2+2x-4$

$\therefore \int_{-1}^{2} f(x)dx$

$= \int_{-1}^{2} (x^2+2x-4)dx = [\frac{x^3}{3}+x^2-4x]_{-1}^2$

$= \left(\frac{8}{3}+4-8\right) - \frac{1}{3}+1-4$

$= \frac{8}{3}-4+\frac{1}{3}-5 = 3-9 = -6$

(2/2019)(1/2016)

س/ $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فاذا كان $\int_{-2}^{6}[F(x)+3]dx = 32$ وكان $\int_1^6 f(x)dx = 6$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

Sol:

$\int_{-2}^{6}[f(x)+3]dx = 32$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx + \int_{-2}^{6} 3\,dx = 32$

$\int_{-2}^{6} 3\,dx = [3x]_{-2}^{6}$

$= 3(6) - 3(-2)$

$= 18+6 = 24$

$\therefore \int_{-2}^{6} f(x)dx + 24 = 32$

$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)dx = 8$

$\int_{-2}^{6} f(x)dx = \int_{-2}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{6} f(x)dx$

$8 = \int_{-2}^{1} f(x)dx + 6 \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)dx = 2$

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة اذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x\ ,\forall x\ \geq 3\\ 6\ ,\forall x\ <3\end{cases}$

جد $\int_1^4 f(x)dx$ ؟

Sol:

نثبت ان الدالة مستمرة على [1, 4]

$f(x)=2x \Rightarrow f(3)=2(3)=6$ معرفة

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to 3^+}(2x)=2(3)=6=L_1\\ \lim_{x\to 3^-}6=6=L_2\end{cases}$$

$\therefore L_1=L_2=6 \Rightarrow \lim_{X\Rightarrow 3} f(x)=6$ موجودة

$\therefore \lim_{X\Rightarrow 3} f(x)=f(3)=6$ ∴ الدالة f مستمرة عند $x=3$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x: x<3\}, \{x: x>3\}$

∴ الدالة مستمرة على R

∴ الدالة مستمرة على [1, 4]

$\int_1^4 f(x)dx=\int_1^3 6\,dx+\int_3^4 2x\,dx$

$=[6x]_1^3+[x^2]_3^4$

$=[18\text{-}6]+[16\text{-}9]=12+7=19$

2017/ تمهيدي

س/ جد قيمة التكامل $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

Sol:

$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}}$

$=2\int_1^4 e^{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$

$=2[e^{\sqrt{x}}]_1^4$

$=2(e^{\sqrt{4}}-e^{\sqrt{1}})=2(e^2-e)$

2017/ 1 اسئلة الموصل

س1/ جد قيمة التكامل $(\sqrt{x}+2)^2\int_0^1\sqrt{x}\ dx$

Sol:

$\int_0^1\sqrt{x}\ (\sqrt{x}+2)^2dx$

$=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\left(x+4x^{\frac{1}{2}}+4\right)dx$

$=\int_0^1(x^{\frac{3}{2}}+4x+4x^{\frac{1}{2}})\,dx$

$=[\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+2x^2+\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}]_0^1$

$=(\frac{2}{5}+2+\frac{8}{3})-(0+0+0)$

$=\frac{6+30+40}{15}=\frac{76}{15}$

2017/ 1

س/ اثبت ان $F(x)=1-\cos x$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=\sin x$ حيث $F:[0,\frac{\pi}{6}]\Rightarrow R$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$

Sol:

$F(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

$F(x)=1-\cos x$

$F'(x)=\sin x=f(x)$

∴ $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{6}}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F(0)$$

$=\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]-[1-\cos(0)]$

$=\left[1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]-[1-1]$

$=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

2017/ 2

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^2|x-1|\ dx$

Sol: حسب التعريف للقيمة المطلقة

$f(x)=|x\text{-}1|=\begin{cases}(x-1)\ ,\forall x\ \geq 1\\ (1-x)\ ,\forall x\ <1\end{cases}$

$\therefore \int_0^2|x-1|\ dx=\int_0^1(1-x)dx+\int_1^2(x-1)dx$

$=[x-\frac{x^2}{2}]_0^1+[\frac{x^2}{2}-x]_1^2$

$=\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-0\right]+\left[(\frac{1}{2}-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وان الدالة المقابلة للدالة f هي $F(x)=\sin x\ ,\ F:[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow R$ جد $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$

Sol:

$F(x)=\sin x$

دالة مقابلة $f(x)$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=[F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}-f(0)=[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1-0=1$

2017/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{x^2-x}{\sqrt{x}-1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(x-1)}{\sqrt{x}-1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1}dx$$

$$= \int_0^1 (x\sqrt{x}+x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{3}{2}} + x\,dx$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{x^2}{2}]_0^1 \quad = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}x^2]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{5}(1) + \frac{1}{2}\right) - (0)$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{9}{10}$$

ملاحظة:الحل اعلاه حسب فهم الطالب للسؤال وهو غير صحيح علمياً لان الدالة غير مستمرة من[0,1]

2018/ 1

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}\,\mathbf{dx}$

Sol:

$$\int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}dx}{2\sqrt{x}} = \int_0^4 e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$= 2[e^{\sqrt{x}}]_0^4 = (e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{0}}) = e^2 - 1$$

2018/ 3

س/ جد قيمة التكامل $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+5}dx$

Sol:

$$\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+5}dx$$

$$= [\ln|x^3+4x+5|]_0^1$$

$$= \ln|1+4+5| - \ln|0+0+5|$$

$$= \ln|10| - \ln|5| = ln\frac{10}{5} = ln2$$

(1/2019)

س/ اذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3 & \forall x > 1 \end{cases}$

جد $\int_0^5 f(x)dx$

Sol:

نبرهن استمرارية الدالة عندما $x = 1$

1) $f(x) = 2x+1 \;\Rightarrow\; f(1) = 2(1)+1 \;\Rightarrow f(1) = 3 \in R$

الدالة معرفة عندما $x = 1$

2) $\lim_{x\to1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to1^+}(2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to1^-} 3 \quad = 3 = L_2 \end{cases}$ متساويتان

$\therefore$ الغاية وحيدة وموجودة عندما $x = 1$

3) $f(1) = \lim_{x\to1} f(x)$

$\therefore$ الدالة مستمرة عندما $x = 1$ وتمر $(0,5)$

$$\int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2+x]_1^5$$

$$= (3-0) + (30-2)$$

$$= 3 + 28 = 31$$

2019/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int_1^3 x\,e^{-\ln x}\,dx$

Sol:

$$\int_1^3 x\,e^{-\ln x}\,dx$$

$$= \int_1^3 x\,e^{\ln x^{-1}}\,x\,dx$$

$$= \int_1^3 e^{\ln\frac{1}{2}}\,x\,dx$$

$$= \int_1^3 (x.\frac{1}{x})\,dx$$

$$= \int_1^3 1dx = [\mathrm{x}]_1^3 = 3 - 1 = 2$$

"2/2020"تطبيقي

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$$

Sol:

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}dx$$

$$\int_1^3 \left(\frac{2x^3}{x^2}-\frac{4x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)dx$$

$$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$$

$$=\left[\frac{2x^2}{2}-4x+5\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3$$

$$=\left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$=\left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5)$$

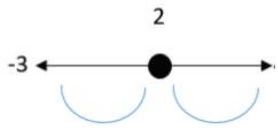
$$=\left(-3-\frac{5}{3}\right)-(-8)=\frac{-14}{3}+8=\frac{10}{3}$$

"1/2020"تطبيقي

س/ لتكن $f(x)=|2x-4|$ ، جد $\int_3^4 f(x)dx$

Sol:

$$f(x)=\begin{cases}2x-4 & , \; x\geq 2\\ 4-2x & , \; x<2\end{cases}$$



$$\int_{-3}^4 f(x)\;dx=\int_{-3}^2(4-2x)dx+\int_2^4(2x-4)dx$$

$$=\left[4x-\frac{2x^2}{2}\right]_{-3}^2+\left[\frac{2x^2}{2}-4x\right]_2^4$$

$$=[(8-4)-(-12-9)]+[(16-16)-(4-8)]$$

$$=[(4+2)]+[0+4]$$

$$=25+4$$

$$=29$$

3/2020

س/ اثبت فيما اذا كانت $F(x)=x^3-7$ ، $F:[1,3]\to$ هي دالة مقابلة للدالة $F(x)=3x^2$

$f:[1,3]\to R$ ثم جد $\int_1^3 f(x)\,dx$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل

Sol:

1) الدالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لانها كثيرة الحدود

2) الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(1,3)$ لانها كثيرة الحدود

$$F'(x)=3x^2=f(x)\forall\, x\in(1,3)$$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $F(x)$

$$\int_1^3 f(x)\,dx=F(3)-F(1)$$

$$=(3^3-7)-(1^3-7)$$

$$=(27-7)-(-6)$$

$$=20+6=26$$

2020/تمهيدي "تطبيقي"

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$$

Sol:

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\,dx$$

$$\int_1^3 x^{-2}(2x^3-4x^2+5)\,dx$$

$$\int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\,dx$$

$$=\left[\frac{2x^2}{2}-4x+\frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3$$

$$=\left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$=\left(9-12-\frac{5}{3}\right)-(1-4-5)$$

$$=\left(-3-\frac{5}{3}\right)-(-8)$$

$$=-3-\frac{5}{3}+8$$

$$=5-\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$$

1/2020

$$\int_{4}^{1} \sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)\,dx$$

Sol:

$$\int_4^1 \sqrt{x}(\sqrt{x}+1)dx$$

$$= -\int_1^4 (x+\sqrt{x})\,dx$$

$$= -\int_1^4 (x+x^{\frac{1}{2}})\,dx$$

$$= -\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4$$

$$= -\left[\left(\frac{16}{2}+\frac{2}{3}(2^{2})^{\frac{3}{2}}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\right]$$

$$= -\left[\left(8+\frac{16}{3}\right)-\left(\frac{3+4}{6}\right)\right]$$

$$= -\left[\frac{24+16}{3}-\frac{7}{6}\right] = -\left[\frac{40}{3}-\frac{7}{6}\right]$$

$$= -\left(\frac{80-7}{6}\right) = \frac{73}{6}$$

1/2020"تطبيقي"

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx$$

Sol:

$$\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}\,dx = [\ln|x^2+9|]_0^4$$

$$= \ln(16+9) - \ln(0+9)$$

$$= \ln 25 - \ln 9$$

$$= \ln\frac{25}{9} - \ln\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$= 2\ln\frac{5}{3}$$

1/2020

س/ اثبت ان $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث $F(x) =$ $\sin x + x$ ، $F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$

حيث $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ ، ثم احسب : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx$

Sol:

$f(x) = 1+\cos x$

$F(x)$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق

$F'(x) = \cos x + 1 = f(x)$

$\therefore$ الدالة $F(x)$ مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)\,dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0)$$

$$= \left[\sin\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right] - [\sin(0)+0]$$

$$= \left[\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\right] - [0]$$

$$= \frac{3+\pi}{6}$$

2/2020"تطبيقي"

س/ لتكن $f(x) = x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ و $f(x)$ دالة لها نهاية صغرى محلية تساوي (-5) ، جد $\int_1^3 f(x)\,dx$.

Sol:

$f(x) = x^2+2x+k$

$f'(x) = 2x+2 \Rightarrow f'(x) = 0$

$2x+2 = 0$

$\Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow x = -1$

f' ---- -1 ++++

$(-1,-5)$ **نقطة نهاية صغرى محلية ∋ وتحقق الدالة**

$f(x) = x^2+2x+k$

$-5 = (-1)^2 + 2(-1) + k$

$-5 = 1-2+k \Rightarrow -5 = -1+k \Rightarrow k = -4$

$\therefore f(x) = x^2+2x-4$

$$\therefore \int_1^3 (x^2+2x-4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3$$

$$= \left(\frac{27}{3}+9-12\right) - \left(\frac{1}{3}+1-4\right)$$

$$= (9+9-12) - \left(\frac{1}{3}-3\right)$$

$$= 6-\frac{1}{3}+3 = 9-\frac{1}{3} = \frac{26}{3}$$

2-الاسئلة الوزارية حول "التكامل غير المحدد"

1 /2003

س/ جد قيمة $\int x(x^2+3)^3 dx$

Sol:

$$\int x(x^2+3)^3 dx$$
$$=\frac{1}{2}\int (x^2+3)^3 2x dx$$
$$=\frac{1}{8}(x^2+3)^4+c$$

1 /2007

س/ جد قيمة $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}} dx$

Sol:

$$\int x(x^2+1)^{\frac{3}{4}}dx=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{\frac{3}{4}}2x dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{7}(x^2+1)^{\frac{4}{7}}+c \quad =\frac{4}{14}\sqrt[4]{(x^2+1)^7}+c$$

(2010/ تمهيدي)(2016/ 3)

س/ جد قيمة $\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx$

Sol:

$$\int (4x+6)\sqrt{2x+3}\,dx$$
$$=\int 2(2x+3)(2x+3)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\int (2x+3)^{\frac{3}{2}}2dx$$
$$=(\frac{2}{5})(2x+3)^{\frac{5}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(2x+3)^5}+c$$

3 /2013

س/ جد قيمة $\int x.e^{x^2}dx$

Sol:

$$\int x.e^{x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int 2x.e^{x^2}dx$$
$$=\frac{1}{2}e^{x^2}+c$$

3 /2014

س/ جد قيمة $\int \sqrt{e^{2x-4}}\,dx$

Sol:

$$\int \sqrt{e^{2x-4}}\,dx$$
$$=\int \sqrt{e^{2(x-2)}}\,dx \quad =\int e^{x-2}dx=e^{x-2}+c$$

2014/ 4 (اسئلة الانبار)

س/ جد قيمة $\int \frac{x}{(3x^2+5)}dx$

Sol:

$$\int \frac{x}{(3x^2+5)}dx$$
$$=\frac{1}{6}\int \frac{x}{(3x^2+5)}dx \quad =\frac{1}{6}\ln(3x^2+5)+c$$

2 /2015

س/ جد قيمة $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}dx$

Sol:

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}dx$$
$$=\int \frac{3(x-2)}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}dx$$
$$=3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}dx$$
$$3\left(\frac{3}{5}\right)(x-2)^{\frac{2}{3}}+c \quad =\frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5}+c$$

2 /2016

س/ جد قيمة $\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$

Sol:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$=\int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{3+\sqrt{x}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}}x^{\frac{-1}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}\int (3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{-1}{2}}\frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{2}}(2)(3+x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}+c$$
$$=2\sqrt{2}\sqrt{3+\sqrt{x}}+c$$

2016/ 1اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{(x-3)}{(2x-6)^3}\, dx$$
$$= \int \frac{(x-3)}{2^3(x-3)^3}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{(x-3)^2} dx \quad = \frac{1}{8}\int (x-3)^{-2} dx$$
$$= \frac{1}{8}(-1)(x-3)^{-1} + c \quad = \frac{-1}{8(x-3)} + c$$

2/2019"تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}\, dx$

نجد مشتقة داخل القوس

$$\left(3-\sqrt{5}x^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-\sqrt{5}}{2}\ .x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{\sqrt{7x}}\, dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7x}}\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{x^{\frac{1}{2}}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{7x}}\int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 .x^{-\frac{1}{2}}\ d$$

$\therefore$ نضرب $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ونقسم عليها

$$= \frac{-2}{\sqrt{5}} * \frac{1}{\sqrt{7}} * \int \left(3-\sqrt{5x}\right)^7 * \frac{-\sqrt{5}}{2}\ x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{-2^1}{\sqrt{35}} * \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^8}{8^4} + C = \frac{-1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5x}\right)^8 + C$$

(2/2019)

س/جد قيمة $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$$
$$= \int \frac{\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}}{x^{\frac{3}{4}}} dx$$
$$= \int x^{\frac{1}{4}}\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} * x^{-\frac{3}{4}}\ dx$$
$$= -2\int \left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{2}\ x^{\frac{-1}{2}}\right) dx$$
$$= \frac{-2(1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$
$$= \frac{-4}{3}\ (1-\sqrt{x})^{\frac{3}{2}} + C$$

3 /2017

س/ جد قيمة $\int \frac{\left(2-\sqrt{7x}\right)^3}{\sqrt{5x}}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{(2-\sqrt{7x})^3}{\sqrt{5x}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 x^{-\frac{1}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot -\frac{2}{\sqrt{7}}\int \left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^3 \left(\frac{-\sqrt{7}}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}} dx)$$
$$= \frac{-2}{\sqrt{35}} \cdot \frac{\left(2-\sqrt{7}\,x^{\frac{1}{2}}\right)^4}{4} + c$$
$$= \frac{-\left(2-\sqrt{7x}\right)^4}{2\sqrt{35}} + c$$

1/2019"تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}$

Sol:

$$\int \sqrt[3]{3x^3-5x^5}\ dx$$
$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\ dx$$
$$= \int x(3-5x^2)^{\frac{1}{3}} dx$$
$$= \frac{1}{-10}\int -10x\,(3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx$$
$$= \frac{-1}{10} \cdot \frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{-1}{10} \cdot \frac{3}{4}\ (3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$
$$= \frac{-3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + C$$

3/2020

$$\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\ dx$$

Sol:

$$\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\ dx$$

$$\int \sqrt[3]{(x+5)^2}\, dx$$

$$\int (x+5)^{\frac{2}{3}}\ dx$$

$$= \frac{(x+5)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{5}(x+5)^{\frac{5}{3}} + c$$

$$= \frac{3}{5}\ \sqrt[3]{(x+5)^5} + c$$

2/2020"تطبيقي"

$$\int \left(x^2+4\right)^2 dx$$

Sol:

$$\int \left(x^2+4\right)^2 dx$$

يمكن الحل بطريقة فتح القوس ثم التوزيع.

$$= \frac{1}{2}\int \left(x^2+4\right)^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+4\right)^3}{3} + C$$

3/2020"تطبيقي"

$$\int \frac{x dx}{(3x^2+7)^4}$$

Sol:

$$\int \frac{x\ dx}{(3x^2+7)^4}$$

$$= \int (3x^2+7)^{-4}\, x\, dx$$

$$= \frac{1}{6}\int (3x^2+7)^{-4}\, 6x\, dx$$

$$= \frac{1}{6} * \frac{(3x^2+7)^{-3}}{-3} + c$$

$$= \frac{1}{18\,(3x^2+7)^3} + c$$

4-الاسئلة الوزارية حول "تكامل الدوال المثلثية"

1996/1

س/ جد قيمة التكاملات:

1) $\int(\sin x-3\sec^2x)dx$

2) $\int\cos 6x\cos 3x\,dx$

:Sol

1) $\int(\sin x-3\sec^2x)dx=-\cos x-3\tan x+c$

2) $\int\cos 6x\cos 3x\,dx=\int(1-2\sin^2 3x)\cos 3x\,dx$

$=\int\cos 3x\ dx-2\int\sin^2 3x\cos 3x\ dx$

$=\frac{1}{3}\int\cos 3x\ 3dx-2\cdot\frac{1}{3}\int\sin^2 3x\ 3\cos 3x\ dx$

$=\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{2}{9}\sin^3 3x+c$

1996/2

س/ جد قيمة $\int(\sec x-\sin x)(\sec x+\sin x)dx$

Sol:

$\int(\sec x-\sin x)(\sec x+\sin x)dx$

$=\int(\sec^2x-\sin^2x)dx$

$\int\left[\sec^2x-\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]dx$

$=\int\left[\sec^2x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right]dx$

$\tan x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+c$

1997/1

س/ جد قيمة $\int\cos 2x\sin^2x\,dx$

Sol:

$\int\cos 2x\sin^2x\,dx$

$=\int\cos 2x\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$

$=\int\left(\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos^2 2x\right)dx$

$=\int\left[\frac{1}{2}\cos 2x-(\frac{1}{2})(\frac{1}{2})(1+\cos 4x)\right]dx$

$=\int\left[\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 4x\right]dx$

$=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}x-\frac{1}{16}\sin 4x+c$

(1997/2)(2013/2)

س/ جد قيمة $\int(1+\cos 3x)^2\,dx$

Sol:

$\int(1+\cos 3x)^2\,dx$

$=\int[1+2\cos 3x+\cos^2 3x]\,dx$

$=x+2(\frac{1}{3}\sin 3x)+\frac{1}{2}(x+\frac{1}{6}\sin 6x)+c$

$=x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$

$=\frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin 3x+\frac{1}{12}\sin 6x+c$

1998/1

س/ جد قيمة $\int(\cos x-\sin 2x)^2dx$

Sol:

$\int(\cos x-\sin 2x)^2dx$

$=\int(\cos^2x-2\sin 2x\cos x+\sin^2 2x)dx$

$\int[\frac{1}{2}(1+\cos 2x)-2.2\sin x\cos x\cos x+\frac{1}{2}(1-\cos 4x)]\,dx$

$=\int(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x-4\cos^2x\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x)\,dx$

$=\int(1+\frac{1}{2}\cos 2x-4\cos^2x\sin x-\frac{1}{2}\cos 4x)\,dx$

$=x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{4}\cos^3x-\frac{1}{8}\sin 4x+c$

2001/1

س/ جد قيمة $\int\sin^2x\cos^2x\,dx$

sol:

$\int\sin^2x\cos^2x\,dx$

$=\int(\sin x.\cos x)^2\,dx$

$=\int(\frac{1}{2}\sin 2x)^2\,dx$

$=\frac{1}{4}\int\sin^2 2x\,dx$

$=\frac{1}{4}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx$

$=\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c$

1 /2000

س/ جد قيمة $\int sin^4x\,dx$

Sol:

$$\int sin^4x\,dx$$
$$=\int[sin^2x]^2\,dx$$
$$=\int[\frac{1}{2}(1-cos2x)]^2\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int(1-cos2x)^2\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int(1-2cos2x+cos^2 2x)\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int[1-2cos2x+\frac{1}{2}(1+cos4x)]\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int[1-2cos2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}cos4x]\,dx$$
$$=\frac{1}{4}\int\left[\frac{3}{2}-2cos2x+\frac{1}{2}cos4x\right]dx$$
$$=\frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x-sin2x+\frac{1}{8}sin4x\right]+c$$

2006/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int(sin^2x+1)\,dx$

Sol:

$$\int(sin^2x+1)\,dx$$
$$=\int\left[\frac{1}{2}(1-cos2x)+\right]dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}sin2x\right)+x+c$$

2008/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد قيمة $\int tan2x\,sec^3 2x\,dx$

Sol:

$$\int tan2x\,sec^3 2x\,dx$$
$$=\int sec^2 2x\;\;sec2x\,tan2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int sec^2 2x\;\;2\,sec2x\,tan2x\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}sec^3 2x+c$$
$$=\frac{1}{6}sec^3 2x+c$$

2 /2008

س/ جد قيمة $\int cos^2 2x\,sinx\,dx$

Sol:

$$\int cos^2 2x\,sinx\,dx$$
$$=\int(cos2x)^2\,sinx\,dx$$
$$=\int(2cos^2x-1)^2\,sinx\,dx$$
$$=\int(4cos^4x-4cos^2x+1)\,sinx\,dx$$
$$=4\int cos^4x\,sinx\,dx-4\int cos^2x\,sinx\,dx+\int sinx\,dx$$
$$=-4\int cos^4x(-)\,sinx\,dx+4\int cos^2x(-)\,sinx\,dx+\int sinx\,dx$$
$$=\frac{-4}{5}cos^5x+\frac{4}{3}cos^3x-cosx+c$$

(2008/ 2 اسئلة خارج القطر)(3/2019)

س/ جد قيمة $\int cos^3x\,dx$

Sol:

$$\int cos^3x\,dx$$
$$=\int cosx\,x\,dx$$
$$=\int cosx(1-sin^2x)\,dx$$
$$=\int(cosx-sin^2x\;cosx)\,dx$$
$$=sinx-\left(\frac{1}{3}\right)sin^3x+c$$

2009/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int tan3x\,sec^5 3x\,dx$

Sol:

$$\int tan3x\,sec^5 3x\,dx$$
$$=\int sec^4 3x\;\;sec3x\,tan3x\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\int sec^4 3x\;\;3\,sec3x\,tan3x\,dx$$
$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}sec^5 3x+c$$
$$=\frac{1}{15}sec^5 3x+c$$

(2010/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x.\cos^2 x}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x} dx$$
$$= \int \frac{\cos x(1+\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)} dx$$
$$= \int (1+\sin x)\cos x\, dx = \frac{1}{2}(1+\sin x)^2 + c$$

(2012/ 2)(2019/ تمهيدي)

س/ جد قيمة $\int \cot x \csc^3 x\, dx$

Sol:

$$\int \cot x \csc^3 x\, dx$$
$$= \int \csc^2 x\,(\csc x \cot x) dx$$
$$= -\int \csc^2 x\,(-\csc x \cot x) dx$$
$$= -\frac{1}{3}\csc^3 x + c$$

2013/ 1

س/ جد قيمة $\int \csc^2 x \cos x\, dx$

Sol:

$$\int \csc^2 x \cos x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{\sin^2 x}\cos x\, dx$$
$$= \int \frac{1}{\sin x} \times \frac{\cos x}{\sin x} dx$$
$$= \int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 4اسئلة الانبار)

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1-2\sin 2x}\, dx$

Sol:

$$\int \sqrt{1-2\sin 2x}\; dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x)}\; dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\; dx$$
$$= \mp \int (\sin x - \cos x)\; dx$$
$$= \mp(-\cos x - \sin x) + c$$

(2014/ 1)(2015/ 1) (2019/ 1 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$
$$= \int (\cos 2x - \sin 2x)$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + c$$

2014/ 3

س/ جد قيمة $\int \sin 6x \cos^2 3x\; dx$

Sol:

$$\int \sin 6x \cos^2 3x\; dx = \int 2\sin 3x \cos 3x \cos^2 3x\; dx$$
$$= 2\int \cos^3 3x\; \sin 3x\, dx$$
$$= 2(\frac{-1}{3})\int \cos^3 3x\; (-3)\sin 3x\, dx$$
$$= \frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cos^4 3x + c$$
$$= \frac{-1}{6}\cos^4 3x + c$$

2015/ 1

س/ جد قيمة $\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx$

Sol:

$$\int \sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}\int 8\sec^2 8x\, e^{\tan 8x}\, dx$$
$$= \frac{1}{8}e^{\tan 8x} + c$$

2015/ 1 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin x}} dx$$
$$= \int (\sin x)^{\frac{-1}{3}} \cos x\, dx$$
$$= \frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} + c$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{\sin^2 x} + c$$

2015 /4 اسئلة النازحين

س/ جد قيمة $\int (sin2x + cos2x)^2\, dx$

$sol:$

$$\int (sin2x + cos2x)^2\, dx$$

$$= \int (sin^2 2x + 2sin2x \cdot cos2x + cos^2 2x)\, dx$$

$$= \int (1 + \sin 4x)\, dx$$

$$= x - \frac{1}{4} cos4x + c$$

2016 /تمهيدي

س/ جد قيمة $\int \tan x\, dx$

$sol:$

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{sinx}{\cos x} dx$$

$$= -\int \frac{-sinx}{\cos x} dx$$

$$= -ln|cosx| + c$$

2017 /2

س/ جد قيمة $\int tan^3 2x\, dx$

$sol:$

$$\int tan^3 2x\, dx$$

$$= \int tan2x\ tan^2 2x\, dx$$

$$= \int \tan 2x(\ sec^2 2x - 1)\, dx$$

$$= \int (\tan 2x\ sec^2 2x - tan2x\ )\, dx$$

$$= \int \tan 2x\ sec^2 2x\, dx - \int tan2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \tan 2x\ sec^2 2x.(2x) dx + \frac{1}{2}\int \frac{-2sin2x}{\cos 2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{tan^2 2x}{2} + \frac{1}{2} ln|cos2x| + c$$

$$= \frac{1}{4} \cdot tan^2 2x + \frac{1}{2} ln|cos2x| + c$$

(2016 /1)(2016 /3 "اسئلة خارج القطر")

س/ جد قيمة

$a) \int \sin 6x\, cos^2 3x\, dx$

$b) \int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

Sol:

$$a) \int \sin 6x\, cos^2 3x\ dx = \int 2\sin 3x\, cos3x\, cos^2 3x\ dx$$

$$= 2\int cos^3 3x \sin 3x\, dx$$

$$= (2)(\frac{-1}{3}) \int cos^3 3x\, (-3\sin 3x)\, dx$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right) cos^4 3x + c = \frac{-1}{6} cos^4 3x + c$$

$$b) \int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x} dx = \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ csc^2 2x\ dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ (-2)csc^2 2x\ dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} cot^{\frac{3}{2}} 2x + c$$

$$= \frac{-1}{3}\sqrt{cot^3 2x} + c$$

(2016 /3 "خارج القطر")(2017/ تمهيدي) (2020 /2)

س/ جد قيمة $\int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$

Sol:

$$\int \frac{\sqrt{cot2x}}{1 - cos^2 2x} dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{cot2x}}{sin^2 2x} dx$$

$$= \int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ csc^2 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (cot2x)^{\frac{1}{2}}\ (-2)csc^2 2x\ dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{2}{3} cot^{\frac{3}{2}} 2x + c\ = \frac{-1}{3}\sqrt{cot^3 2x} + c$$

2017 /1 "اسئلة الموصل"

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx$

$sol:$

$$\int \sqrt{1 - sin2x}\, dx$$

$$\int \sqrt{sin^2 x + cos^2 x - 2\ sin\ x\ cos\ x}\ dx$$

$$\int \sqrt{sin^2 x - 2\ sin\ x\ cos\ x + cos^2 x}\ dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\ dx$$

$$= \pm \int (\sin x - \cos x)\ dx$$

$$= \pm [-\cos x - \sin x] + c = \pm (\cos x + \sin x) + c$$

2017/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد قيمة $\int (cos^4x - sin^4x)\,dx$

$sol:$

$$\int (cos^4x - sin^4x)\,dx$$
$$= \int (cos^2x - sin^2x)(cos^2x + sin^2x)\,dx$$
$$= \int cos2x\,dx$$
$$= \frac{1}{2}sin2x + c$$

2017/ 3"اسئلة الموصل")(2018/ 2)

س/ جد قيمة $\int \frac{1+tan^2x}{tan^3x}\,dx$

$sol:$

$$\int \frac{1+tan^2x}{tan^3x}\,dx = \int \frac{sec^2x}{tan^3x}dx$$
$$= \int tan^{-3}x\, sec^2x\,dx$$
$$= \frac{tan^{-2}x}{-2}+c$$
$$= \frac{-1}{2tan^2x}+c$$

2018/ 3

س/ جد قيمة $\int \frac{tan\theta}{1-sin^2\theta}\,d\theta$

$$sol: \int \frac{tan\theta}{1-sin^2\theta}\,d\theta = \int \frac{tan\theta}{cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int tan\theta \cdot \frac{1}{cos^2\theta}\,d\theta$$
$$= \int tan\theta \cdot sec^2\theta\,d\theta$$
$$= \int \frac{tan^2\theta}{2} + c$$

2017/ 3

س/ جد قيمة $\int x^2 \sin x^3\,dx$

$$sol: \int x^2 \sin x^3\,dx$$
$$= \frac{1}{3} \int \sin x^3(3x^2)dx$$
$$= \frac{1}{3}(-cosx^3)+c$$

2018/ تمهيدي

س/ جد قيمة $\int \sec^2 3x\, e^{tan3x}\,dx$

Sol:

$$\int (\sec^2 3x)\cdot e^{tan3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int 3\sec^2 3x\, e^{tan3x}\,dx \quad = \frac{1}{3}e^{tan3x} + c$$

2018/ 1

س/ جد قيمة $\int [tanx - sec^2x]\,dx$

Sol:

$$\int [tanx - sec^2]\,dx$$
$$= \int tanx\,dx - \int sec^2\,dx$$
$$= \int \frac{sinx}{cosx}dx - \int sec^2\,dx$$
$$= -ln|cosx| - tanx + c \quad = ln|secx| - tanx + c$$

(1/2019)

س/ جد تكامل : - $\int \sec^2 3x e^{tan3x}\,dx$

Sol:

$$\frac{1}{3} \int 3\sec^2 3x e^{tan3x}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\, e^{tan3x} + C$$

(2/2019"تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$

Sol:

$$\int \sqrt{1-\sin 2x}\,dx$$
$$= \int \sqrt{\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\,dx$$
$$= \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\,dx = \pm \int (\sin x - \cos x)dx$$
$$= \pm(-\cos x - \sin x) + C$$

(1/2019 " تطبيقي")

س/ جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x + 2\sin x.\cos x + \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin 2x) dx$$

$$= \left[x - \tfrac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\cos\pi\right) - \left(0 - \frac{1}{2}\cos 0\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(1)$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1$$

(2/2019)

س/ جد قيمة $\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x - \sin 3x}\, dx$

Sol:

$$\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x - \sin 3x}\, dx = \int \frac{\cos^2 3x - \sin^2 x}{\cos 3x - \sin 3x}\, dx$$

$$= \int \frac{(\cos 3x - \sin 3x)\,(\cos 3x + \sin 3x)}{\cos 3x - \sin 3x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos 3x * 3\, dx + \frac{1}{3}\int \sin 3x * 3\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$$

طريقة ثانية :-

$$\int \frac{\cos 6x}{\cos 3x - \sin 3x} * \frac{\cos 3x + \sin 3x}{\cos 3x + \sin 3x}\, dx$$

$$= \int \frac{\cos 6x\,(\cos 3x + \sin 3x)}{\cos^2 3x - \sin^2 3x}$$

$$= \int \frac{\cos 6x(\cos 3x + \sin 3x)}{\cos 6x}\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \cos 3x * 3\, dx + \frac{1}{3}\int \sin 3x * 3\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{3}\cos 3x + C$$

(1/2019 اسئلة خارج القطر " تطبيقي")

س/ جد التكاملات التالية :-

1) $\int_1^2 8x\, e^{-lnx}\, dx$ 2) $\int \frac{\cos 4x}{(\cos 2x - \sin 2x)}\, dx$

Sol:

1) $\int_1^3 8xe^{-\ln x}\, dx$

$$= \int_1^3 8x^{\ln x^{-1}}$$

$$= \int_1^3 8x\, x^{-1}\, dx$$

$$= \int_1^3 8\, dx = [8\,x]_1^2 = (8x) - (8x)$$

$$= 8(2) - 8(1)$$

$$= 16 - 8 = 8$$

2) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$

$$= \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x}\, dx$$

$$= \int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)}\, dx$$

$$= -\sin 2x + \cos 2x + C$$

2020/تمهيدي"تطبيقي"

$\int \cot^3 5x\, dx$

Sol:

$$\int \cot^3 5x\, dx$$

$$= \int \cot^2 5x\, .\cot 5x\, dx$$

$$= \int (\csc^2 5x - 1)\cot 5x\, dx$$

$$= \int (\csc^2 5x\, .\cot 5x - \cot 5x)\, dx$$

$$= \int \left(\csc^2 5x\, .\cot 5x - \frac{\cos 5x}{\sin 5x}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{5}.\frac{\cot^2 5x}{2} - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$$

$$= \frac{-1}{10}\cot^2 5x - \frac{1}{5}\ln|\sin 5x| + c$$

3/2020"تطبيقي"

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\, dx$$

Sol:

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x \; dx$$

الطريقة الاولى

$$= \int \sec^2 x \tan x \;\; dx$$

$$= \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

الطريقة الثانية

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x} \tan x \; dx$$

$$= \int \sec x \sec x \tan x \; dx$$

$$= \frac{\sec^2 x}{2} + c$$

الطريقة الثالثة

$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\; dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx = \int \sin x \cos^{-3} x \, dx$$

$$= \frac{-\cos^{-2} x}{-2} + c$$

$$= \frac{1}{2\cos^2 x} + c = \frac{1}{2}\sec^2 x + c$$

2/2020"تطبيقي"

$$\int \sqrt{1 - 2\sin 2x}\, dx$$

Sol:

$$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sqrt{(\sin x - osx)^2}\, dx$$

$$= \pm \int (\sin x - \cos x)\, dx$$

$$= \pm(\cos x + \sin x) + C$$

1/2020

$$\int \sin 6x \;\cos^2 3x \;\; dx$$

Sol:

$$\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx$$

$$= \int 2\sin 3x \cos 3x \;. \cos^2 3x \;\; dx$$

$$= 2\int \cos^3 3x \sin 3x \;\; dx$$

$$= \frac{-2}{3}\int \cos^3 3x \;\; (-3\sin 3x) dx$$

$$= \frac{-\cancel{2}}{3}\,\frac{\cos^4 3x}{\underset{2}{\cancel{4}}} + c$$

$$= -\frac{1}{6}\cos^4 3x + c$$

1/2020

$$\int e^{\cos x} \sin x \;\; dx$$

sol :

$$\int e^{\cos x} \sin x \;\; dx$$

$$- \int e^{\cos x} \;(-\sin x)\; dx$$

$$= -e^{\cos x} + c$$

2/2020

س/ اثبت أنّ الدالة $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ، $F: R \to R$ دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$ حيث $f: R \to R$ ، ثم جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$ حسب المبرهنة الاساسية للتكامل.

Sol:

$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق.

$$F'(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - 2$$

$$= \cos 2x = f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F(0)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin(0)\right]$$

$$= \frac{1}{2}[1 - 0]$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx = \frac{1}{2}$$

3/2020

$$\int (\sin^4 x)\ dx$$

Sol:

$$\int (\sin^4 x) dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\ (1-\cos 2x)\right)^2\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \left[1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right]\ dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\right] + c$$

$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

2/2020

$$\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

Sol:

$$3)\ \int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$\int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx$$

$$\int \frac{(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)}{(\cos 2x - \sin 2x)}\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\, dx + \frac{1}{2}\int 2\sin 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$$

1/2020"تطبيقي"

$$\int (3-\sin x)^2 dx$$

Sol:

$$\int (3-\sin x)^2 dx$$

$$= \int (9 - 6\sin x + \sin^2 x) dx$$

$$= \int 9\ dx - 6\int \sin x\ \ dx + \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\ dx$$

$$= 9x + 6\cos x + \frac{1}{2}\ x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$= \frac{19}{2}\ x + 6\cos x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

1/2020"تطبيقي"

$$\int x e^{3\ln x}\ dx$$

Sol:

$$\int x e^{3\ln x}\ dx = \int x\ e^{\cancel{\ln} x^3} dx$$

$$= \int x\,.\,x^3\ dx = \int x^4\ \ dx = \frac{x^5}{5} + c$$

2020/تمهيدي

س/ اثبت ان $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ حيث $F: R \to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = \cos 2x$

حيث $f: R \to R$ ثم جد $\int_0^{\pi/4} \cos 2x\ \ dx$

Sol:

1) $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ مستمرة على R

$\therefore$ مستمرة بالفترة $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

2) $f'(x) = \cos 2x = f(x)$

$\therefore$ $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$

طريقة اولى

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ \ dx = F\left(\frac{\pi}{4}\right) = F(0)$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\,.\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\,.\,(0)$$

$$= \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

ملاحظة

اذا الطالب حل التكامل بطريقة قوانين التكامل يعتبر صحيح لان بالسؤال لم يحدد الطريقة

الطريقة الثانية

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\ \ dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2\,.\,\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin 2\,.\,(0)$$

$$= \frac{1}{2}(1) - 0 = \frac{1}{2}$$

4-الاسئلة الوزارية حول المساحة المحددة بالدالة

أ-المساحة المحددة بمنحني دالة

1998/ 1

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^4 - 4x^2$ ومحور السينات بالفترة [1,3]

Sol:

$if\ y = 0\ \to x^2 - 4x^2 = 0$

$\to x^2(x^2 - 4) = 0$

$\to x^2 = 0\ \to x = 0 \notin [1,3]\ OR\ \ x^2 = 4$

$\to x = 2\ \in [1,3]\ , x = -2 \notin [1,3]$

$A=|\int_1^2 f(x)dx| + |\int_2^3 f(x)dx|$

$\therefore A=|\int_1^2 (x^4 - 4x^2)dx| + |\int_2^3 (x^4 - 4x^2)dx$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_1^2| + |[\frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3]_2^3|$

$= |(\frac{32}{5} - \frac{32}{3}) - (\frac{1}{5} - \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3}) - (\frac{32}{5} - \frac{32}{3})|$

$=|(\frac{32}{5} - \frac{32}{3} - \frac{1}{5} + \frac{4}{3})| + |(\frac{243}{5} - \frac{108}{3} - \frac{32}{5} + \frac{32}{3})|$

$=|(\frac{31}{5} - \frac{28}{3})| + |(\frac{211}{5} - \frac{76}{3})| =|(\frac{93-140}{15})| +$

$=|(\frac{633-380}{15})|\ \ =|(\frac{-47}{15})| + |(\frac{253}{15})|$

$= \frac{300}{15} = 20$ وحدة مساحة

(2001/ 1)(2015/ 2)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 9x$ ومحور السينات بالفترة [-3,3]

Sol:

$if\ y = 0\ \to x^3 - 9x = 0$

$\to x(x^2 - 9) = 0$

$\to x = 0\ \in [-3,3]\ \ OR\ \ x^2 = 9$

$\to x = \pm 3\ \in [-3,3]$

$A=|\int_{-3}^0 f(x)dx| + |\int_0^3 f(x)dx|$

$\therefore A=|\int_{-3}^0 (x^3 - 9x)dx| + |\int_0^3 (x^3 - 9x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_{-3}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2]_0^3|$

$= |(0) - (\frac{81}{4} - \frac{81}{2})| + |(\frac{81}{4} - \frac{81}{2}) - (0)|$

$|(\frac{81}{4})| + |(\frac{-81}{4})|\ =\ \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}$ وحدة مساحة

2007/ تمهيدي

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحور السينات بالفتر [-2,2]

Sol:

$if\ y = 0\ \to x^3 - 4x = 0$

$\to x(x^2 - 4) = 0$

$\to x = 0\ \in [-2,2]\ OR\ \ x^2 = 4$

$\to x = \pm 2\ \in [-2,2]$

$A=|\int_{-2}^0 f(x)dx| + |\int_0^2 f(x)dx|$

$\therefore A=|\int_{-2}^0 (x^3 - 4x)dx| + |\int_0^2 (x^3 - 4x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_{-2}^0| + |[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2]_0^3|$

$= |(0) - (4 - 8)| + |(4 - 8) - (0)|$

$|(4)| + |(-4)|\ =\ 4 + 4 = 8$ وحدة مساحة

(2006/ تمهيدي) (2013/ 1)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

Sol:

$if\ y = 0\ \to x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

$\to x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$\to x(x - 2)(x - 1) = 0$

$x = 0\ \ OR\ \ \ x = 2\ \ \ OR\ x = 1$

$A=|\int_0^1 f(x)dx| + |\int_1^2 f(x)dx|$

$A=|\int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx| + |\int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx$

$= |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_0^1| + |[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2]_1^2|$

$= |(\frac{1}{4} - 1 + 1) - (0)| + |(4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1)|$

$=|(\frac{1}{4})| + |(-\frac{1}{4})|$

$=\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

(2005/ 1)(1/2019"اسئلة خارج القطر")(2/2019)

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $y=x^3+4x^2+3x$ ومحور السينات.

Sol:

$y=x^3+4x^2+3x$ نجعل $y=0$

$0=x^3+4x^2+3x$

$\Rightarrow x(x^2+4x+3)=0$

$\Rightarrow x(x+1)(x+3)=0$

either $x=0$ or $x+1=0$

$\Rightarrow x=-1$ or $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

$\therefore$ الفترة $-1 \in [-3,0]$

$\therefore$ الفترات هي $[-3,-1]$, $[-1,0]$

$A_1=\int_{-3}^{-1}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-3}^{-1}$

$=(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})-(\frac{81}{4}-\frac{108}{3}+\frac{27}{2})$

$=(\frac{3-16+18}{12})-(\frac{243-432+162}{12})$

$=\frac{5}{12}-(\frac{-27}{12})=\frac{5}{12}+\frac{27}{12}=\frac{32}{12}$

$\therefore A_2=\int_{-1}^{0}(x^3+4x^2+3x)dx=[\frac{x^4}{4}+\frac{4x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}]_{-1}^{0}$

$=(\frac{(0)^4}{4}-\frac{4(0)^3}{3}+\frac{3(0)^2}{2})-(\frac{1}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2})$

$=(0)-(\frac{3-16+18}{12}) = = -\frac{5}{12}$

$\therefore A=|A_1|+|A_2|=|\frac{32}{12}|+|-\frac{5}{12}|$

$=\frac{32}{12}+\frac{5}{12}$

$=\frac{37}{12}$ وحدة مساحة

(2008/ تمهيدي)(2010/ تمهيدي)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=3x^2+4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,2]$

Sol:

$y \neq 0$ حيث $3x^2+4>0$ دائما

$A=|\int_{-2}^{2}f(x)dx|$

$A=|\int_{-2}^{2}(3x^2+4)dx|$

$=|[x^3+4x]_{-2}^{2}|$

$=|(8+8)-(-8-8)|$

$|16+16|=32$ وحدة مساحة

1/ 2012

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=(1-x)^3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,3]$

Sol:

$(1-x)^3=0$

$\rightarrow x-1=0$

$\rightarrow x=1 \in [-1,3]$

$A=|\int_{-1}^{1}f(x)dx|+|\int_{1}^{3}f(x)dx|$

$A=|\int_{-1}^{1}(1-x)^3dx|+|\int_{1}^{3}(1-x)^3dx$

$=|[\frac{1}{4}(1-x)^4]_{-1}^{1}|+|[\frac{1}{4}(1-x)^4]_{1}^{3}|$

$=|(0)-(\frac{1}{4}(1+1)^3|+|(\frac{1}{4}(1-3)^3-(0)|$

$=8$ وحدة مساحة

3/ 2013

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1$, $x=3$

Sol:

$if\ y=0 \rightarrow x^2=0$

$\rightarrow x=0 \notin [1,3]$

$A=|\int_{1}^{3}f(x)dx| = |\int_{1}^{3}x^2dx|$

$=|[\frac{1}{3}x^3]_{1}^{3}|=|(9)-(\frac{1}{3})|=|(\frac{26}{3}|$

$=\frac{26}{3}$ وحدة مساحة

1/ 2012

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^2-4$ ومحور السينات بالفترة $[-2,3]$

Sol:

$if\ y=0 \rightarrow x^2-4=0$

$\rightarrow x^2=4$

$\rightarrow x=2 \in [-2,3]$, $x=2 \in [-2,3]$

$A=|\int_{-2}^{2}f(x)dx|+|\int_{2}^{3}f(x)dx|$

$A=|\int_{-2}^{2}(x^2-4)dx|+|\int_{2}^{3}(x^2-4)dx$

$=|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{-2}^{2}|+|[\frac{1}{3}x^3-4x]_{2}^{3}|$

$=|(\frac{8}{3}-8)-(-\frac{8}{3}+8|+|(9-12)-(\frac{8}{3}-8)|$

$=|(\frac{-16}{3}-\frac{16}{3})|+|-3+\frac{16}{3}|$

$=\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{39}{3}=13$ وحدة مساحة

(2001 /1)(2016 /2)(2018 /2)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$y = 1 - 2\sin^2 x$

$\rightarrow y = \cos 2x = 0$

$ei: 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad , k \in Z$

$k = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$k = 1 \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$or\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\left[(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}\left[(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|\right.\right.$

$= \left|\frac{1}{2}(1-0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0-1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

(2006 /1)(2016 /1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$y = 2\cos^2 x - 1 \quad \rightarrow y = 0$

$2\cos^2 x - 1 = 0 \quad \rightarrow \cos 2x = 0$

$2x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3\pi}{2}$

$\rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}\left[\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|\right.\right.$

$= \left|\frac{1}{2}(1-0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0-1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

2003/ 2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = \cos 2x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$\cos 2x = 0 \quad \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx\right|$

$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\left[(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)\right| + \left|\frac{1}{2}\left[(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})\right|\right.\right.$

$= \left|\frac{1}{2}(1-0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0-1)\right|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

(1 /2007)(1 /2018)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin4x$ ومحور السينات بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$if\ y = 0 \rightarrow sin4x = 0 \rightarrow 4x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 4x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \rightarrow 4x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 2 \rightarrow 4x = 2\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin4x\ dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin4x\ dx$

$= |[\frac{-1}{4} cos4x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{-1}{4} cos4x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= \frac{1}{4}|[(cos\pi) - (cos0)| + \frac{1}{4}|[(cos2\pi) - (cos\pi)|$

$= \frac{1}{4}|(-1) - (1)| + \frac{1}{4}|(1) - (1)|$

$= \frac{1}{4}|-2| + \frac{1}{4}|2|$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

2 /2008

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = sin2x$ ومحور السينات بالفترة $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$sol: if\ y = 0 \rightarrow sin2x = 0 \rightarrow 2x = 0 + k\pi$

$if\ k = 0 \rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = 1 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$if\ k = -1 \rightarrow 2x = -\pi \rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\therefore$ فترات التكامل $\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$A=|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} f(x)dx| + |\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin2x\ dx| + |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} sin2x\ dx$

$= |[\frac{-1}{2} cos2x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}| + |[\frac{-1}{2} cos2x]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$= \frac{1}{2}|[(cos0) - (cos-\pi)| + \frac{1}{2}|[(cos\pi) - (cos0)|$

$= \frac{1}{2}|(1) + (1)| + \frac{1}{2}|(-1) - (1)|$

$= \frac{1}{2}|2| + \frac{1}{2}|-2| = 1 + 1 = 2$ وحدة مساحة

1 /2017

س/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^3 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1, x = -1$

Sol:

$y= x^3 - x$ الفترة $[-1, 1]$

$y=0$ نجعل, $0= x^3-x \Rightarrow x(x^2-1)=0$

either $x=0 \in [-1, 1]$ or $x^2=1 \Rightarrow x= \pm 1 \in [-1, 1]$, $[-1,0], [0,1]$ الفترات هي $\therefore$

$A_1=|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx|$

$= |[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}|$

$= |(\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{2})|$

$= \left|-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$

$A_2=|\int_0^1 (x^3 - x)dx|$

$=|[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}]_{-1}^{0}| = |\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (\frac{(0)^4}{4} - \frac{(0)^2}{2})|$

$= \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$

$A= A_1 + A_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

3/2020

س/ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات

Sol:

$x^4 - x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 1) = 0$

$x^2(x-1)(x+1) = 0$

$x = 0$ او $x = -1$ او $x = 1$

$\therefore$ حدود التكامل $[-1, 0], [0,1]$

$A_1 = \left|\int_{-1}^{0}(x^4 - x^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right|$

$= \left|\left[\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^3}{3}\right] - \left[\frac{(-1)^5}{5} - \frac{(-1)^3}{3}\right]\right|$

$= \left|0 - \left[\frac{-1}{5} - \frac{-1}{3}\right]\right| = \left|-\left[\frac{-1}{5} + \frac{1}{3}\right]\right|$

$= \left|-\left[\frac{-3+5}{15}\right]\right| = \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15} \quad unit^2$

$A_2 = \left|\int_{0}^{1}(x^4 - x^2)dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$

$= \left|\left[\frac{(1)^5}{5} - \frac{(1)^3}{3}\right] - \left[\frac{(0)^5}{5} - \frac{(0)^3}{3}\right]\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right] - 0\right| = \left|\frac{3-5}{15}\right| = \left|\frac{-2}{15}\right| = \frac{2}{15}\ unit^2$

$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{15} + \frac{2}{15} = \frac{4}{15}\ unit^2$

2/2020 "تطبيقي"

س/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = \sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Sol:

$\sin 3x = 0 \Rightarrow 3x = 0, \pi, 2\pi$

نجزء التكامل

$x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$A_1 = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{0}^{\frac{\pi}{3}}$

$= \frac{-1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos 3\,(0)\right]$

$= \frac{-1}{3}[-1 - (1)] = \frac{2}{3}$

$A_2 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 3x\,dx = \left[\frac{-1}{3}\cos 3x\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{-1}{3}\left[\cos 3\left(\frac{\pi}{32}\right) - \cos 3\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$= \frac{-1}{3}[0 - (-1)] = \frac{-1}{3}$

$\therefore A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{2}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right|$

$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ وحدة مساحة

قمة الضعف..
أن تلبس حذاء يؤلمك
لانه يعجب الناس

ب-المساحة المحددة بمنحني الدالتين

(1997 /2)(2008 /1)(2008 /1 اسئلة خارج القطر)(2015 /1 اسئلة خارج القطر)(2015 /3)(2016 /3 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2 \quad , y = x^4 - 12$

Sol:

تقاطع الدالتين $y = x^4 - 12 \; , \quad , \; y = x^2$

$x^4 - 12 = x^2$

$\Rightarrow x^4 - 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 3)(x^2 - 4) = 0$

$\Rightarrow x^2 + 3 \neq 0$ (مجموع مربعين)

$\therefore x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \quad [-2, 2]$ الفترة $\therefore$

$\therefore A = |\int_{-2}^{2} (x^4 - 12 - x^2) dx|$

$= |[\frac{x^5}{5} - 12x - \frac{x^3}{3}]_{-2}^{2}|$

$= |(\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}) - (\frac{-32}{5} + 24 + \frac{8}{3})| = |\frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3} + \frac{32}{5} - 24 - \frac{8}{3}|$

$= |\frac{64}{5} - 48 - \frac{16}{3}| = |\frac{192-720-80}{15}| = |\frac{192-800}{15}| = |\frac{-608}{15}|$

$= \frac{608}{15}$ وحدة مساحة

1999 /2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = 2 - x^2 \; , g(x) = x^2$ بالفترة $[-2, 2]$

Sol:

$h(x) = x - (2 - x^2)$

$= x^2 + x - 2$

$, x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

$\rightarrow$ *either* $x = -2 \in [-2, 2]$

or $x = 1 \in [-2, 2]$

$\therefore A = |\int_{-2}^{1} h(x) dx| + |\int_{1}^{2} h(x) dx|$

$= |\int_{-2}^{1} (x^2 + x - 2) dx| + |\int_{1}^{2} (x^2 + x - 2) dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{-2}^{1}| + |[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x]_{1}^{2}|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2) - (\frac{-8}{3} + 2 + 4)]| + |[(\frac{8}{3} + 2 - 4) - (\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2)]|$

$= |[(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + \frac{8}{3} - 6)]| + |[(\frac{8}{3} - 2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2)]|$

$= \frac{19}{3}$ وحدة مساحة

(1998 /2)(2004 /1)(2009 /تمهيدي)(2014 /1)(2015 /1 اسئلة خارج القطر)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين

$g(x) = \sin x \cos x \; , f(x) = \sin x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

Sol:

Let $h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin x - \sin x \cos x$

$h(x) = 0$

$\sin x - \sin x \cos x = 0$

$\sin x \; (1 - \cos x) = 0$

اما $\sin x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = \pi \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

او $1 - \cos x = 0 \quad \rightarrow \quad \cos x = 1$

$x = 0 \in [0, 2\pi]$

$x = 2\pi \in [0, 2\pi]$

$A_1 = |\int_0^{\pi} h(x)\, dx| \quad , \quad A_2 = |\int_{\pi}^{2\pi} h(x)\, dx|$

$A_1 = |\int_0^{\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx|$

$= \left|\left[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}\right]_0^{\pi}\right|$

$= |[-(-1) - 0) - (-1 - 0)]| = 2$

$A_2 = |\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - \sin x \cos x)\, dx|$

$= \left|\left[-\cos x - \frac{(\sin x)^2}{2}\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$

$= |(-1 - 0) - (1 - 0)| = 2$

$\therefore A = A_1 + A_2 = 2 + 2 = 4$ وحدة مساحة

ملاحظة :- 1) اذا وجدت المساحتين دون اطلاق وبعد ان تجمعها وضع الاطلاق يعتبر الحل صحيح

2) او استخدم طريقة تعريف المطلق (الاثلاث) ايضا الحل صحيح

1 /2002

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = x^2 \; , g(x) = 2x$ بالفترة $[1,3]$

Sol:

$h(x) = x^2 - 2x$

$\rightarrow x^2 - 2x = 0$

$\rightarrow x(x-2) = 0$

$either \;\; x = 0 \notin [1,3]$

$or \; x = 2 \in [1,3]$

$\therefore A = |\int_1^2 h(x)dx| + |\int_2^3 h(x)dx|$

$= |\int_1^2 (x^2 - 2x)dx| + |\int_2^3 (x^2 - 2x)dx|$

$= |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_1^2| + |[\frac{1}{3}x^3 - x^2]_2^3|$

$= |[(\frac{8}{3} - 4) - (\frac{1}{3} - 1)]| + |[(9-9) - (\frac{8}{3} - 4)]|$

$= 2$ وحدة مساحة

---

2 /2004

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 1 + cosx$

$, y = -cosx$ بالفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= 1 + cosx + cosx = 1 + 2cosx$

$1 + 2cosx = 0$

$\rightarrow cosx = -\frac{1}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}$

$\rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$or \; x = \frac{4\pi}{3} \notin [0, \frac{\pi}{2}]$

$A = |\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$= |\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2cosx)dx|$

$= |[x + 2sinx]_0^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |(0) - (\frac{\pi}{2} + 2sin\frac{\pi}{2})|$

$= \frac{\pi}{2} + 2$ وحدة مساحة

2 /2002

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = 3x^2 \; , g(x) = x^4 - 4$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 4 - 3x^2$

$= x^4 - 3x^2 - 4$

$if \; h(x) = 0 \;\; \rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 1) = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \;\; \rightarrow x = 2 \;\; OR \;\; x = -2$

$, x^2 + 1 = 0$ تهمل

$\therefore A = |\int_{-2}^{2} h(x)dx| = |\int_{-2}^{2} (x^4 - 3x^2 - 4)\,dx|$

$= |[\frac{1}{5}x^5 - x^3 - 4x]_{-2}^{2}|$

$= |[(\frac{32}{5} - 8 - 8) - (\frac{-32}{5} + 8 + 8)]|$

$= |[\frac{32}{5} - 8 - 8 + \frac{32}{5} - 8 - 8]| = |[\frac{64}{5} - 32]|$

$= |[\frac{64 - 160}{5}]|$

$= |[\frac{-96}{5}]|$

$= \frac{96}{5}$ وحدة مساحة

(1999 /1)(2005/تمهيدي)

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين

$f(x) = x \; , g(x) = \sqrt[3]{x}$ بالفترة $[-1,1]$

Sol:

$h(x) = x - \sqrt[3]{x} \;\; \rightarrow \sqrt[3]{x} - x = 0$

$\rightarrow [\sqrt[3]{x} = x]$ بتكعيب الطرفين

$x = x^3 \;\; \rightarrow x - x^3 = 0$

$\rightarrow x(1 - x^2) = 0 \;\; \rightarrow x = 0 \;\;\; OR \;\; x = \pm 1$

$\in [-1,1]$ لا تجزأ

$\therefore A = |\int_{-1}^{0} h(x)dx| + |\int_0^1 h(x)dx|$

$= |\int_{-1}^{0} (x^{\frac{1}{3}} - x)dx| + |\int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x)dx|$

$= |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_{-1}^{0}| + |[\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} - \frac{1}{2}x^2]_0^1|$

$= |[(0-0) - (\frac{3}{4} - \frac{1}{2})]| + |[(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}) - (0-0)]|$

$= |-\frac{1}{4}| + |\frac{1}{4}| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2005/ 2

س/ جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $f(x)=\sin2x , g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin2x - \sin x = 2\sin x \cos x - \sin x = \sin x(2\cos x - 1)$

$\sin x(2\cos x - 1) = 0$

اما $\sin x = 0 \quad \rightarrow x = 0 \quad \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad OR \quad x = \pi \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

او $2\cos x - 1 = 0 \ \rightarrow 2\cos x = 1 \quad \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \ \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{\pi}{3} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad OR \ x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \notin \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{3}} h(x)dx|+|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x(2\cos x - 1)\ dx|+|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x(2\cos x - 1)\ dx\ |$

$= -\frac{1}{2}|\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\ dx|+|-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos x - 1)(-2\sin x)\ \ dx|$

$= |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_0^{\frac{\pi}{3}}| + |[\frac{-1}{4}(2\cos x - 1)^2]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2 - (2\cos0 - 1)^2| + |\frac{1}{4}[(2\cos\frac{\pi}{2} - 1)^2 - (2\cos\frac{\pi}{3} - 1)^2|$

$= \frac{1}{4}[(1-1)^2 - (2-1)^2| + |\frac{1}{4}[(0-1)^2 - (1-1)^2|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

2011/ 1

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $g(x)=\sqrt{x}$ والمستقيم $f(x)=x$

Sol:

$h(x) = \sqrt{x} - x$ بتربيع الطرفين

$\rightarrow \sqrt{x} - x = 0 \quad \rightarrow [\sqrt{x} = x]$

$x=x^2 \Rightarrow x\text{-}x^2 = 0 \Rightarrow x(1\text{-}x)=0$

$either \quad x=0 \quad or \quad 1\text{-}x=0 \Rightarrow x = 1 \quad [0, 1]$ الفترة ∴

$A=|\int_0^1 h(x)dx|$

$|\int_0^1(\sqrt{x} - x)dx| = |\int_0^1 \left(x^{\frac{1}{2}} - x\right) dx| = |[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}]_0^1$

$= |(\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{1}{2}) - |(\frac{2(0)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{(0)^2}{2})| = \left|\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{4-3}{6}\right|$

$= \left|\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$ وحدة مساحة

2012/ تمهيدي

س/ جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = 2x^2$, $y = x^4 - 8$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x) = x^4 - 8 - 2x^2$

$\rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

$\rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 2) = 0$

$\rightarrow x^2 = 4 \quad \rightarrow x = \pm 2$

$\therefore$ A$= |\int_{-2}^2 h(x)dx\ |$

$= |\int_{-2}^2(x^4 - 2x^2 - 8)\ dx| \ =$

$|[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 - 8x]_{-2}^2|$

$= |[\left(\frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 16\right) - \left(\frac{-32}{5} + \frac{16}{3} + 16\right)]|$

$= \left|\frac{64}{5} - \frac{32}{3} - 32\right|$

$= \left|\frac{192 - 160 - 480}{15}\right| = \frac{126}{5}$ وحد مساحة

2012/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد المساحة المحددة بين المنحنيين $f(x)=\sin^2 x$, $g(x)=\sin x$ بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= \sin^2 x - \sin x = \sin x(\sin x - 1)$

$\sin x(\sin x - 1) = 0$

$\rightarrow either\ \ \sin x = 0 \ \ \rightarrow x = 0 + k\pi$

$k = 0 \ \rightarrow x = 0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$k = 1 \ \rightarrow x = \pi \notin [0,\frac{\pi}{2}]$

$OR\ \ \sin x = 1$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x - \sin x)\, dx|$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x) - \sin x\right] dx$

$= |[\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= |\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi\right) + \cos\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\sin 0\right) + \cos 0\right]|$

$= |\frac{\pi}{4} - 1| = 1 - \frac{\pi}{4}$ وحدة مساحة

(2013/ 2)(2015/ 1 اسئلة النازحين)

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x)=2\sin x+1$ $g(x)=\sin x$ حيث $x \in [0, \frac{3\pi}{2}]$

Sol:

$2\sin x+1= \sin x$

$\Rightarrow 2\sin x+1- \sin x=0$

$\Rightarrow \sin x+1=0 \Rightarrow \sin x=-1$ تقاطع الدالتين

$\Rightarrow x= \frac{3\pi}{2} x\in [0, \frac{3\pi}{2}]$

$\therefore A= |\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(2\sin x + 1 - \sin x)dx |$

$=|\int_0^{\frac{3\pi}{2}}(\sin x + 1)dx |$

$= |[- \cos x+x]_0^{\frac{3\pi}{2}} |$

$= |(- \cos \frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}) - (- \cos 0 + 0) |$

$=|(-0+3 \frac{\pi}{2})-(-1+0)|$

$= |0+ \frac{3\pi}{2}+1| = \frac{3\pi+2}{2}$ وحدة مساحة

2014/ 1 اسئلة خارج القطر

س/ جد المساحة المحددة بين منحني القطع المكافىء $y = x^2$ والمستقيم الذي معادلته $y = 2x + 3$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

$\rightarrow x = 3 \ ,x = -1$

$\therefore A= |\int_{-1}^{3} h(x)dx | + |\int_{-1}^{3}(x^2 - 2x - 3)\, dx|$

$= |[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x]_{-1}^{3}|$

$=|[(\frac{27}{3} - 9 - 9) - (\frac{-1}{3} - 1 + 3)]|$

$=|[9 - 9 - 9 + \frac{1}{3} + 1 - 3]|$

$=|[-9 - \frac{-2}{3}]|$

$= |[\frac{-25}{3}]|= \frac{25}{3}$ وحدة مساحة

2009/ 2

س/ جد المساحة المحددة بالدالتين : $f(x)=\cos^2 x$, $g(x)=\sin^2 x$ ومحور السينات بالفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x) = f(x) - g(x)$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$\cos 2x = 0$

$\rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{4} \in [0,\frac{\pi}{2}]$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} h(x)dx|+ |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} h(x)dx|$

$A=|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx|+ |\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx$

$= |[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\frac{\pi}{4}}| + |[\frac{1}{2}\sin 2x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}|$

$= |\frac{1}{2}[(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0)| + |\frac{1}{2}[(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2})|$

$= |\frac{1}{2}(1-0)|+ |\frac{1}{2}(0-1)|$

$= |\frac{1}{2}| + |\frac{-1}{2}| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ وحدة مساحة

(2014/ تمهيدي "اسئلة خارج القطر")(2017/ 2)(2017/ 2 "اسئلة خارج القطر")(2019/1"تطبيقي")

س/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin x$ وعلى الفترة $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

Sol:

$h(x)=f(x)-g(x)$

$= \cos x - \sin x$

$\rightarrow \cos x - \sin x = 0 \quad \rightarrow \cos x = \sin x$

$\rightarrow \tan x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \ OR \ \ x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$

∴ الفترات هي $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{4}]$, $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}]$

$\therefore A= \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x - \sin x)dx\right|$

$=\left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$

$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\frac{\pi}{2}))\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4})\right|$

$= \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1+0)\right| + \left|(1+0) - (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}})\right| = |\sqrt{2}+1| + |1-\sqrt{2}|$

$= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$ وحدة مساحة

2018/ 1"اسئلة خارج القطر"

س/ جد المساحة المحددة بين منحني الدالة $y=x^2 +5x - 4$ والمستقيم $y = 6x + 2$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^2 + 5x - 4 - 6x - 2$

$\rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

$\rightarrow (x-3)(x+2) = 0$

$\rightarrow$ اما $x - 3 = 0 \quad \rightarrow x = 3 \ \ OR \ \ x + 2 = 0$

$\rightarrow x = -2$ ∴ فترة التكامل $[-2,3]$

$\therefore A= \left|\int_{-2}^{3} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-2}^{3}(x^2 - x - 6)\,dx\right| = \left|[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x]_{-2}^{3}\right|$

$=\left|[(\frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3)) - (\frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2))]\right| = \left|[(9 - \frac{9}{2} - 18) - (\frac{-8}{3} - 2 + 12)]\right|$

$=\left|-9 - \frac{9}{2} + \frac{8}{3} - 10\right|$

$= \left|\frac{8}{3} - \frac{9}{2} - 19\right| = \left|\frac{16-27-114}{6}\right| = \left|\frac{-125}{6}\right| = \frac{125}{6}$ وحدة مساحة

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد مساحة المنطقة المحصورة بمنحني الدالة $y = x^3$,
والمستقيم $y = x$

Sol:

نجعل $x^3 = x$

$\because x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

اما $x = 0$ أو $x^2 = 1 \rightarrow x = \mp 1$

$\therefore A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = (0 - 0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$

$= 0 - \frac{-1}{4} = \frac{1}{4}$

$A_2 = \int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)$

$= \frac{-1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$

$\because A = |A_1| + |A_2|$

$= \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

(2015/ تمهيدي)(2017 /3)

س/ جد المساحة المحصورة بين المنحنيين $y = x^3 \ , y = x$

Sol:

$h(x) = g(x) - f(x)$

$= x^3 - x$

$\rightarrow x^3 - x = 0$

$\rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

$\rightarrow x(x - 1)(x + 1) = 0$

$\rightarrow x = 0 \quad OR \ x = 1$

$OR \quad , x = -1$

$\therefore A = \left|\int_{-1}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1} h(x)dx\right|$

$= \left|\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{1}\right|$

$= \left|\left[(0 - 0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right]\right| + \left|\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0)\right]\right|$

$= \left|\left[\frac{1}{4}\right]\right| + \left|\left[\frac{-1}{4}\right]\right|$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

في الدنيا ثلاث :
أمل , ألم , أجر
فعش الأولى , وتحمل الثانية
لأجل الثالثة :

5- الاسئلة الوزارية حول "الازاحة"

1/1997

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرة $18\ m/sec^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/sec$ بعد مرور 4sec من بدء الحركة جد: a) المسافة خلال الثانية الرابعة.
b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور 10 ثواني

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 18\, dt \ \rightarrow V(t) = 18t + c$

$V(t) = 82$ عندما $t = 4$

$82 = 72 + c \ \rightarrow c = 10$

$\rightarrow V(t) = 18t + 10$

$a)\ d = d = |\int_3^4 V(t)\, dt|$

$= |\int_3^4 (18t + 10)dt| \ = |[9t^2 + 10t]_3^4|$

$= |184 - 111| = 73\ m$

$b)\ S = \int_0^{10} V(t)dt$

$= \int_0^{10} (18t + 10)dt$

$= [9t^2 + 10t]_0^{10}$

$= (900 + 100) - (0 - 0) = 1000\ m$

(2003/ 1)(2010/ تمهيدي)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم وكانت سرعته $v(t) = \frac{3}{2}\sqrt{t} + \frac{3}{\sqrt{t}} m/sec$ وكان بعده بعد مرور 4 ثواني من بدء الحركة يساوي 20m جد ازاحته عند كل t .

sol:

$s(t) = \int v(t)dt$

$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{t^{\frac{1}{2}}}\right)dt$

$= \int \left(\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}} + 3t^{\frac{-1}{2}}\right)dt$

$= \frac{3}{2}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 2.3\, t^{\frac{1}{2}} + c$

$s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t} + c$

$\rightarrow 20 = 8 + 12 + c$

$\rightarrow c = 0$

$\rightarrow s(t) = \sqrt{t^3} + 6\sqrt{t}$

---

2 /2000

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (2t - 4)\ m/s$ جد المسافة المقطوعة بالفترة [1,6] ثم جد بعد الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة .

Sol:

$a)\ V(t) = 0 \ \rightarrow 2t - 4 = 0 \ \rightarrow t = 2 \ \in [1,6]$

$d = |\int_1^2 V(t)dt| + |\int_2^6 V(t)dt|$

$d = |\int_1^2 (2t - 4)dt| + |\int_2^6 (2t - 4)dt|$

$= |[t^2 - 4t]_1^2| + |[t^2 - 4t]_2^6|$

$= |(4 - 8) - (1 - 4)| + |36 - 24) - (4 - 8)|$

$= |-4 + 3| + |12 + 4| = 1 + 16 = 17\ m$

$s = \int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (2t - 4)dt = [t^2 - 4t]_0^4$

$= (16 - 16) - (0 - 0) = 0m$

---

2 /2003

س / جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 + 6t + 3)\ m/s$ احسب
1) المسافة المقطوعة بالفترة [2,4]
2) الازاحة المقطوعة بالفترة [2,4].
3)الزمن اللازم ليصبح التعجيل $18\ m/sec^2$

sol:

$a)\ V(t) = 0 \ \rightarrow 3t^2 + 6t + 3 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 + 2t + 1) = 0 \ \rightarrow 3(t + 1)^2 = 0$

$t = -1 \ \notin [2,4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

$= |\int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)|$

$= |124 - 26| = 98$ m

$s = \int_2^4 V(t)dt$

$= \int_2^4 (3t^2 + 6t + 3)dt$

$= [t^3 + 3t^2 + 3t]_2^4$

$= (64 + 48 + 12) - (8 + 12 + 6)$

$= 124 - 26 = 98m$

$a(t) = V'(t) = 6t + 6$

$\rightarrow 18 = 6t + 6$

$\rightarrow 6t = 12 \ \rightarrow t = 2\ sec$

2004 /2

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $5\ m/sec^2$ فاذا كان بعده من بدء الحركة يساوي 180m بعد مرور 6sec والسرعة عندها $45 m/sec$ جد السرعة عند t=2.

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 5\ dt$

$\rightarrow V(t) = 5t + c$

$V(t) = 45$ عندما $t = 6$

$45 = 30 + c$

$\rightarrow c = 15 \quad \rightarrow V(t) = 5t + 15$

$V(2) = 10 + 15 = 25\ m/s$

2005/ تمهيدي

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل منتظم يساوي $(3t + 2)\ m/s^2$ جد سرعة الجسم بعد مضي 2sec من بدء الحركة ثم جد المسافة المقطوعة بالفترة [2,6]

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int (3t + 2)\ dt$

$\rightarrow V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t + c$

$c = 0$ اي انه $V = 0$

بما ان التعجيل منتظم فانه في بدء الحركة يكون فيها $t = 0$

$V(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2t$

$a)\ V(2) = 6 + 4 = 10\ m/s$

$b)$

بما ان السرعة مجموع حدين او اكثر فلا داعي الى مساواتها بالصفر عند حساب المسافة المقطوعة بفترة معينة لان الزمن وان وجد ستكون قيمته سالبة او صفر وفي الحالتين لا يتجزأ التكامل .

$d = |\int_2^6 V(t)dt|$

$= |\int_2^6 (\frac{3}{2}t^2 + 2t)dt|$

$= |[\frac{1}{2}t^3 + t^2]_2^6| = |(108 + 36) - (4 + 4)|$

$= |136| = 136$ m

(2007/ تمهيدي)(2014/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 2)
(2016/ 2)

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - 6t^2)\ m/s$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t)=100t-6t^2$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t)= \int v(t)dt = \int (100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t)=50t^2 - 2t^3 + c$

$S(t)=0\ ,\ t=0$ السكون يعني

$0=50\ (0)^3 - 2(0)^3 + c \quad \Rightarrow c=0$

$\therefore\ S(t)=50\ t^2 - 2\ t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه
يعني الازاحة = صفر

$S(t)=0\ ,\ (0=50\ t^2 - 2\ t^3)\div 2 \quad \Rightarrow 25\ t^2 - t^3=0$

$t^2(25 - t)=0$ either $t^2=0 \Rightarrow t=0$ يهمل

Or $25 - t = 0 \Rightarrow t=(25)$ s

التعجيل$=a(t)= V'(t)= 100 - 12t$, عندما $t=25$

$\therefore\ a(25)=100 - 12\ (25) = 100 - 300$

$= -\ 200\ m/s^2$ التعجيل

2007/ 1

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل ثابت مقداره $10\ m/s^2$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعته $24\ m/s$ جد المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ثم بعده بعد مضي4 ثواني من بدء الحركة .

Sol:

$V(t) = \int a(t)dt$

$\rightarrow V(t) = \int 10\ dt \quad \rightarrow V(t) = 10t + c$

$V(t) = 24$ عندما $t = 2$

$24 = 20 + c$

$\rightarrow c = 4$

$\rightarrow V(t) = 10t + 4$

$a)\ d=|\int_4^5 V(t)\ dt|$

$=|\int_4^5 (10t + 4)dt| = |[5t^2 + 4t]_4^5|$

$=|(125+20)-(80+16)| = 49$ m

$b)\ S = \int_0^4 V(t)dt$

$= \int_0^4 (10t + 4)dt$

$= [5t^2 + 4t]_0^4$

$S=\int_0^4 V(t)dt = \int_0^4 (10t + 4)dt = [5t^2 + 4t]_0^4$

$= (80 + 16) - (0 - 0) = 96\ m$

1 /2009

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 12t + 9)\ m/min$ احسب المسافة المقطوعة بالفترة **[0,2]** ثم احسب الزمن اللازم الذي يصبح فيه التعجيل $18\ m/min^2$.

Sol:

$V(t) = 0 \quad \rightarrow 3t^2 + 12t + 9 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 4t + 3) = 0$

$\rightarrow 3(t-3)(t-1) = 0$

$\rightarrow either \ t = 1 \in [0,2], \quad or \ t = 3 \notin [0,2]$

$d = |\int_0^1 V(t)dt| + |\int_1^2 V(t)dt|$

$d = |\int_0^1 (3t^2 + 12t + 9)dt| + |\int_1^2 (3t^2 + 12t + 9)dt|$

$= |[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1| + |[t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2|$

$= |(1 - 6 + 9) - (0)| + |(8 - 24 + 18) - (1 - 6 + 9)|$

$= |4| + |-2| = 6$ m

$a(t) = V'(t) = 6t - 12$

$\rightarrow 18 = 6t - 12$

$\rightarrow 30 = 6t \rightarrow t = 5min$

(2013/ 1 اسئلة خارج القطر)(2014/ 4اسئلة النازحين "الانبار")

س/ سفينة شحن تتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/m$ احسب:

(a) المسافة المقطوعة في الفترة **[2, 4]**

(b) الازاحة المقطوعة بعد مرور خمسة دقائق من بدء الحركة.

Sol:

$a)\ V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t + 3 = 0$

$\rightarrow 3(t^2 - 2t + 1) = 0$

$\rightarrow 3(t-1)^2 = 0$

$t = 1 \notin [2,4]$

$d = |\int_2^4 V(t)dt|$

$= |\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)dt|$

$= |[t^3 - 3t^2 + 3t]_2^4|$

$= |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)|$

$= |26| = 26$ m

$$s = \int_a^b V(t)dt$$

$$= \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)dt$$

$= [t^3 - 3t^2 + 3t]_0^5$

$= (125 - 75 + 15) - (0) = 65m$

(1/2019)(3 /2016)(2 /2011)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\ m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور **(4)** ثواني تساوي **90 m/s** احسب :

(a) السرعة عندما **t=2** (b) المسافة خلال الفترة **[1, 2]**

(c) الازاحة بعد **[10]** ثواني من بدء الحركة.

Sol:

$(a)\ a(t) = 4t + 12$

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (4t + 12)dt$$

$\Rightarrow v(t) = 2t^2 + 12t + c \qquad t = 4\,s,$

لكن $v(t) = 90\ m/s$

$\Rightarrow 90 = 32 + 48 + c \quad \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \qquad t = 2$

$\therefore v(2) = 8 + 24 + 10 = 42\ m/s$

$(b)\ v(t) = 2t^2 + 12t + 10 \neq 0$

$\therefore$ المسافة $= d = |\int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)dt|$

$= |[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_1^2|$

$= |(\frac{16}{3} + 24 + 20) - (\frac{2}{3} + 6 + 10)|$

$= |\frac{16}{3} + 44) - (\frac{2}{3} + 16)|$

$= |\frac{148}{3} - \frac{50}{3}| = |\frac{98}{3}| = \frac{98}{3}\ m$

(c)

$$s(t) = \int_0^{10} v(t)dt$$

$$s(t) = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)dt$$

$= \frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t]_0^{10} = \left(\frac{2000}{3} + 600 + 100\right) - 0$

$= \frac{2000 + 1800 + 200}{3} = \frac{4100}{3}$ m

1/2015

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدرهُ $18\ m/s^2$ فاذا كانت سرعته قد اصبحت $82\ m/s$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة جد:- (a) المسافة خلال الثانية الثانية. (b) بعدهُ عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين

Sol:

التعجيل $a(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=\int a(t)dt$

❖ تكامل التعجيل = السرعة

$\Rightarrow v(t)=\int 18\,dt \Rightarrow v(t)=18t+c \leftarrow$ (تكامل غير محدد دائماً)

لكن $v(t)=82\ m/s$ عندما $t=4\ s$

$82 = 18(4) + c \Rightarrow c = 10$

$\therefore v(t)= 18t + 10$ السرعة

المسافة خلال الثانية الثالثة يعني الفترة $[1, 2]$

$V(t) = 18t + 10 >0$

$0= 18t + 10 \Rightarrow t=\frac{-10}{18}$ يهمل

$\therefore s(t)= |\int_1^2(18t+10)dt |= |[9t^2+10t]_1^2| = |(36+20)-(9+10)|$

$= |56-19| = 37\ m$

بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور ثانيتين يعني الفترة $[0, 2]$ (2)

$S(t) = \int_0^2(18t+10)dt$

$= [9t^2+10t]_0^2 = (36+20)-(0+0) = 56\ m$

2016/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t دقيقة من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(50t-3t^2)\ km/min$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t) = 50t - 3t^2.$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt = \int(50t-3t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 25t^2 - t^3 + c$

$\because$ السيارة تتحرك من السكون فان $S(t) = 0,\quad t = 0\quad ,c = 0$

$\therefore S(t) = 25\,t^2 - t^3$

لكي تعود النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه

يعني الازاحة = صفر

$S(t) = 0\,, 25\,t^2 - t^3 = 0 \Rightarrow t^2(\,25 - t) = 0$

$t^2(25-t) = 0\quad either\ t^2 = 0 \Rightarrow t = 0$ يهمل

$Or\ 25 - t = 0 \Rightarrow t = (25)$

ولحساب التعجيل

$V(t) = 50t - 3t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 50 - 6t$, عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 50 - 6\,(25) = 50 - 150$

$= -100\frac{km}{min^2}$ التعجيل

2016/ تمهيدي

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث ان $V(t) = 3t^2 - 6t$

فجد: 1) المسافة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

2) الازاحة المقطوعة بالفترة $[1,3]$

Sol:

$V(t) = 0$

$\rightarrow 3t^2 - 6t = 0$

$\rightarrow 3t(t-2) = 0$

$\rightarrow t = 0 \notin [1,3]\quad or\ t = 2 \in\ [1,3]$

$d = |\int_1^2 V(t)dt|+|\int_2^3 V(t)dt|$

$d=|\int_1^2(3t^2-6t)dt|+|\int_2^3(3t^2-6t)dt|$

$=|[t^3-3t^2]_1^2|+|[t^3-3t^2]_2^3|$

$=|(8-12)-(1-3)|+|(27-27)-(8-12)|$

$=|-4+2|+|0+4|=2+4=6$ وحدة طول

$S=\int_1^3 V(t)dt$

$=\int_1^3(3t^2-6t)dt=[t^3-3t^2]_1^3$

$=(27-27)-(1-3)=2$ *وحدة طول*

1/2018

س/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t-6t^2)$ اوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه. ثم احسب التعجيل عندها.

Sol:

$V(t) = 100t - 6t^2.$

$\Rightarrow$ الازاحة $S(t) = \int v(t)dt$

$= \int(100t - 6t^2)dt$

$\Rightarrow S(t) = 50t^2 - 2t^3 + c$

$S(t) = 0,\quad t = 0$

$\because$ الجسم يتحرك من السكون فان $,c = 0$

$0 = 0 - 0 + c\ \rightarrow c = 0$

$\therefore S(t) = 50\,t^2 - 2t^3$

لان الجسم يعود الى موضعه الاول اي ان $s=0$

$[0 = 50t^2 - 2t^3] \div 2$

$25t^2 - t^3 = 0\quad \rightarrow t^2(25-t) = 0$

$t = 0$ يهمل او $25 - t = 0 \rightarrow t = 25$ ثانية

ولحساب التعجيل

$V(t) = 100t - 6t^2$

التعجيل $= a(t) = V'(t) = 100 - 12t$,

عندما $t = 25$

$\therefore a(25) = 100 - 12\,(25)$

$= 100 - 300 = -200\,m/sec^2$ التعجيل

2019/ تمهيدي

س/ تحرك رجل بسيارته من البيت وبعد t دقيقة من الزمن اصبحت سرعة سيارته $(50t-3t^2)km/min$ جد الزمن اللازم لعودته للبيت لجلب حقيبته التي نساها ومن ثم احسب تعجيل السيارة عند ذلك الزمن .

Sol:

$S=\int(50t-3t^2)\,dt$

$S=\frac{50t^2}{2}-\frac{3t^3}{3}+c$

$S=25t^2-t^3-c$

$t=0\ ,S=0\quad \because c=0$

$\therefore S=25t^2-t^3$

للعودة الى البيت S=0

$25t^2-t^3=0$

$t^2(25-t)=0$

اما $t^2=0\ \rightarrow t=0$ يهمل

او $25-t=0\ \rightarrow t=25\ min$

$a(t)=50-6t$

$a(25)=50-6(25)$

$=50-150=-100\ km/min^2$

(3/2019)

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)=6t^2-12t$ جد :

1) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$.

2) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$.

Sol:

$6t^2-12t=0]\div 6\ \Rightarrow\ t\text{^}2-2t=0$

$t(t-2=0$ أما $t=0\notin[1,3]$ أو $t=2\in[1,3]$

$[1,2],[1,3]$

$d_1=\left|\int_1^2 6t^2-12t\ dt\right|=\left|\left[\frac{\overset{2}{\cancel{6}}t^3}{\underset{1}{\cancel{3}}}-\frac{\overset{6}{\cancel{12}}t^2}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right]_1^2\right|$

$|[2t^3-6t^2]_1^2|=|[16-24]-[2-6]|$

$=|-8-(-4)|=|-8+4|=|-4|=4$ وحدة مسافة

$d_2=\left|\int_2^3(6t^2-12t)dt\right|=\left|\left[\frac{\overset{2}{\cancel{6}}t^3}{\underset{1}{\cancel{3}}}-\frac{\overset{6}{\cancel{12}}t^2}{\underset{1}{\cancel{2}}}\right]_2^3\right|$

$=|[2t^3-6t^2]_2^3|=|(54-54)-(16-24)|$

$=|(-(-8))|=8$ وحدة مسافة

$d=d_1+d_2=4+8=12$ وحدة مسافة

$S=\int_1^3(6t^2-12t)dt=\left[\frac{6t^3}{3}-\frac{12t^2}{2}\right]$

$=[2t^3-6t^2]_1^3=[2(3)^3-6(3)^2]-[2(1)^3-6(1)]$

$(54-54)-[2-6]=-(-4)=4$ وحدة مسافة

2 /2010

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2+4t+7)\ m/s$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي 4 ثواني من بدء الحركة ثم جد التعجيل عندها

Sol:

$V(t)=0\ \rightarrow 3t^2+4t+7\neq 0$

$a)\ d=|\int_0^4 V(t)\,dt|$

$=|\int_0^4(3t^2+4t+7)dt|$

$=|[t^3+2t^2+7t]_0^4|$

$=|(64+32+28)-(0)|=124\text{ m}$

$a(t)=V'(t)=6t+4$

$\rightarrow a(4)=24+4=28\ m/sec^2$

(2/2019"تطبيقي")

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t)=3t-6\ cm$ ، جد :-

1) المسافة المقطوعة في $[1,3]$

2) الازاحة المقطوعة في الثانية الخامسة .

3) بعده بعد مضي (4) ثوان من بدء الحركة .

Sol:

$1)\ \because V(t)=0$

$3t-6=0\rightarrow t=2\in[1,3]$

$d=\left|\int_1^2(3t-6)\,dt\right|+\left|\int_2^3(3t-6)dt\right|$

$=\left|\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_1^2\right|+\left|\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_2^3\right|$

$=\left|(6-12)-\left(\frac{3}{2}-6\right)\right|+\left|\left(\frac{27}{2}-18\right)-(6-12)\right|$

$=\left|-6-\frac{3}{2}+6\right|+\left|\frac{27}{2}-18+6\right|$

$=\left|\frac{-3}{2}\right|+\left|\frac{3}{2}\right|=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{6}{2}=3\ m$

$2)\ \because S=\int_4^5(3t-6)dt=\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_4^5$

$=\left[\frac{75}{2}-30\right]-\left[\frac{48}{2}-24\right]$

$=\frac{75}{2}-30-24+24=\frac{75}{2}-30=\frac{15}{2}\ m$

$3)\ \because S=\int_0^4(3t-6)dt$

$=\left[\frac{3t^2}{2}-6t\right]_0^4=\left(\frac{48}{2}-24\right)-(0-0)$

$=24-24$

$=0\ m$

2/2020

س/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4$ m/s ، جد:

1) المسافة المقطوعة في $[1, 3]$

2) بُعده بعد مضي (4) ثوان من بدء الحركة.

Sol:

1) $2t - 4 = 0$

$\Rightarrow t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1, 3]$

$$d = \left|\int_1^2 (2t-4)\,dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)\,dt\right|$$

$= \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^3\right|$

$= |[(4-8)-(1-4)]| + |[(9-12)-(4-8)]|$

$= |-4-3| + |-3+4| = |-1| + |1| = 2$

2) $S = \int_0^4 (2t-4)\,dt$

$= [t^2 - 4t]_0^4$

$= [(16-16)-(0)] = 0$

الاسئلة الوزارية حول الفصل الخامس" المعادلات التفاضلية"

20 درجة في الوزاري

1-الاسئلة الوزارية حول" برهن ان او هل ان او اثبت ان المعادلة التفاضلية"

(2011/ 1)(2014/ تمهيدي)

س/ هل ان $y=x^3-x-2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}-6x=0$

Sol:

$\frac{dy}{dx}=3x^2-1$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x$

$LHS: \frac{d^2y}{dx^2}-6x=6x-6x=0\ \ RHS$ اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

(2011/ 1 اسئلة خارج القطر)(2015/ 4 اسئلة النازحين)

2017/ 1 اسئلة خارج القطر)(2018/ 2)

س/ بين ان $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$ (او)

2016/ 3

س/ اثبت ان $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$

Sol:

$y=e^{2x}+e^{-3x}$ $\qquad y''+y'-6y=0$

$y'=e^{2x}(2)+e^{-3x}(-3)$

$=2e^{2x}-3e^{-3x}$

$y''=2e^{2x}(2)-3e^{-3x}(-3)$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}$

نعوض في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية

$LHS=y''+y'-6y$

$=4e^{2x}+9e^{-3x}+2e^{2x}-3e^{-3x}-6(e^{2x}+e^{-3x})$

$=6e^{2x}+6e^{-3x}-6e^{2x}-6e^{-3x}=0=RHS$

$\therefore$ $y=e^{2x}+e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+y'-6y=0$

2017/ 2 اسئلة خارج القطر

س/ هل يمثل: $y=x^3+x-2$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}-6x=0$

Sol:

$y=x^3+x-2$

$\frac{dy}{dx}=3x^2+1$

$\rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x$

$\therefore$ المعادلة $y=x^3+x-2$

هي حل للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}=6x$

(2011/ 2)(2017/ 2)

س/ هل ان $y^2=3x^2+x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2-3x=5$

Sol:

$2y\,y'=6x+3x^2$

$\rightarrow 2y\,y''+y'.2y'=6+6x$

$\rightarrow [2y\,y''+2(y')^2=6+6x]\div 2$

$y\,y''+(y')^2=3+3x$

$\rightarrow y\,y''+(y')^2-3x=3\neq 5 \because LHS\neq RHS$

اذن العلاقة المعطاة $y^2=3x^2+x^3$ هي ليست حل للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2-3x=5$

(2012/ تمهيدي)(2013/ 1)

س/ بين ان $y=ae^{-x}$ هو حل للمعادلة $y'+y=0$ حيث $a \in R$

Sol:

$y = ae^{-x}$

$y' + y = 0$

$\Rightarrow y' = ae^{-x}(-1)$

$\Rightarrow y' = -ae^{-x}$

$y' + y \Rightarrow -ae^{-x} + ae^{-x} = 0$

$\Rightarrow y' + y = 0$ وبذلك يتم المطلوب

$\therefore$ $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y' + y = 0$

(1/2012)(2015/تمهيدي)(2/2016 اسئلة خارج القطر)
(1/2017)(2019/تمهيدي) (1/2019 خارج القطر" تطبيقي")

س/ برهن ان $y=3\cos2x+2\sin2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$

Sol:

$y = 3\cos2x + 2\sin2x, \quad y'' + 4y = 0$

$y' = 3(1 - \sin2x(2)) + 2(\cos2x(2))$

$= -6\sin2x + 4\cos2x$

$y'' = -6(\cos2x(2)) + 4(-\sin2x(2))$

$= -12\cos2x - 8\sin2x$

$LHS = y'' + 4y$

$= -12\cos2x - 8\sin2x + 4(3\cos2x + 2\sin2x)$

$= -12\cos2x - 8\sin2x + 12\cos2x + 8\sin2x$

$= 0 = RHS$

$\therefore$ $y=3\cos2x+2\sin2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+4y=0$

1/2012 اسئلة خارج القطر

س/ برهن ان $y=\sin x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

Sol:

البرهان/

$y'' + y = 0$

$x\,y = \sin$

$\Rightarrow y' = \cos x\,(1) = \cos x$

$\Rightarrow y'' = -\sin x\,(1) = -\sin x$

$\therefore LHS = y'' + y$

$= -\sin x + \sin x = 0 = RHS$

$\therefore$ $y=\sin\ x$ هو حلاً للمعادلة $y''+y=0$

(1/2013 اسئلة خارج القطر)(2/2015)(2017/تمهيدي" تطبيقي")

س/ بين ان $C \in R,\ \ln|y| = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y + 2y$

Sol:

$y'' = 4x^2y + 2y \quad , \quad \ln y = x^2 + c$

$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x$

$\Rightarrow y' = 2xy$

$\Rightarrow y'' = 2xy' + y(2)$

$\Rightarrow y'' = 2xy' + 2y$

$\Rightarrow y'' = 2x(2xy) + 2y$

$\Rightarrow y''=4x^2y + 2y$ وبذلك يتم المطلوب

$\therefore$ $\ln|y| = x^2 + c$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y''=4x^2y + 2y$

(1/2014)(3/2013)

س/ بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

Sol:

$y' = 2x + 3$ نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفي متساويين

$LHS: xy' = x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

$RHS: x^2 + y = x^2 + x^2 + 3x$

$= 2x^2 + 3x$

$\because LHS = RHS$

اذن العلاقة $y = x^2 + 3x$ هي حلا للمعادلة التفاضلية $xy' = x^2 + y$

1/2014 اسئلة النازحين

س/ برهن ان $y=\cos x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

Sol:

البرهان/

$y'' + y = 0$

$x\ y = \cos$

$\Rightarrow y' = -\sin x\ (1)$

$= -\sin x$

$\Rightarrow y'' = -\cos x\ (1) = -\cos x$

$\therefore LHS = y'' + y = -\cos x + \cos x$

$= 0 = RHS$

$\therefore$ x $y=\cos x$ هو حلاً للمعادلة $y''+y=0$

2/2014

س/ بين ان $\ln y^2 = x + a$ حلاً للمعادلة $2y'' - y=0$

$a \in R$

Sol:

$\ln y^2 = x + a \quad , \quad 2\acute{y}-y=0$

$2\ln y = x + a$

$\Rightarrow 2.\frac{1}{y}.\ \acute{y}=1$

$\Rightarrow 2\acute{y}= y$

$\Rightarrow 2\acute{y}-y=0$

$\therefore$ $\ln y^2 = x + a$ حلاً للمعادلة $2y'-y=0$

3/2014

س/ اثبت ان $y = x\ln x$ احد حلول المعادلة

$x\frac{dy}{dx} = x + y \quad , x > 0$

Sol:

$\frac{dy}{dx} = (x)\left(\frac{1}{x}\right) + (\ln x)(1)$

$= 1 + \ln x$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x\ln x$

$RHS: x + y = x + x\ln x = x + x\ln x$

$\because LHS = RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

(1/2015)(1/2015 اسئلة النازحين)

س/ هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

Sol:

$\mathbf{2y\,y' = 6x + 3x^2}$

$\rightarrow [2y\,y'' + y'.2y' = 6 + 6x] \div 2$

$y\,y'' + (y')^2 = 3 + 3x$

$\rightarrow y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

1/2015 اسئلة خارج القطر

س/ اثبت ان $2x^2+y^2=1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$

(1/2018)(2/2016)

س/ هل ان $2x^2+y^2=1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$ بين ذلك

Sol:

$2x^2+y^2=1$

$[4x+2yy'=0]\div 2$

$2x+yy'=0 \quad \rightarrow \quad y'=\frac{-2x}{y} \quad \dots\dots\dots(1)$

$2+y(y'')+y'(y')=0$

$2yy''+(y')^2=0 \quad \dots\dots\dots(2)$

$2+yy''+\left(\frac{-2x}{y}\right)^2=0$

$[2+yy''+\frac{4x^2}{y^2}=0]*(y^2)$

$2y^2+y^3y''+4x^2=0$

$y^3y''=-4x^2-2y^2 \quad \dots\dots\dots *$

$y^3y''=-2(2x^2+y^2) \qquad \because 2x^2+y^2$

$\Rightarrow y^3y''=-2(1)$

$\Rightarrow y^3y''=-2$

ملاحظة/ يمكن للطالب ان يعوض بدل y^2 من الخطوة الاولى في الخطوة *

$\therefore$ المعادلة $2x^2+y^2=1$ هو حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$

2016/تمهيدي

س/ اثبت ان $y=x\ln x-x$ احد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx}=x+y \quad ,x>0$

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)-1=\ln x$$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x\frac{dy}{dx}=x\ln x$

$RHS: x+y=x+x\ln x-x=x\ln x$

$\because LHS=RHS$

اذن العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية

(2/2015 اسئلة خارج القطر)(1/2016 اسئلة خارج القطر)

(2017/تمهيدي)(1/2019)

س/ هل $y\,x=\sin 5x$ حلاً للمعادلة

$xy''+2y'+25\,y\,x=0$ (او)

2018/تمهيدي

س/ بين رتبة ودرجة المعادلة التفاضلية:

$xy''+2y'+25\,y\,x=0$ ثم بين هل ان $y\,x=\sin 5x$ حلا لها؟

Sol:

المعادلة التفاضلية هي من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

$xy''+2y'+25\,y\,x=0\,,\quad y\,x=\sin 5x$

$y(1)+x\,y'=5\cos 5x$

$\Rightarrow y'+x\,y''+y'(1)=-25\sin 5x$

$\Rightarrow x\,y''+2\,y'+25\sin 5x=0$

$\Rightarrow x\,y''+2\,y'+25\,y\,x=0$

$\therefore$ $y\,x=\sin 5x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $xy''+2y'+25\,y\,x=0$

3/2017"اسئلة الموصل"

س/ هل ان $y=x+2$ حلاً للمعادلة $y''+3y'+y=5$

Sol:

$y''+3y'+y=5 \qquad y=x+2$

$\Rightarrow y'=1 \Rightarrow y''=0$

$\therefore LHS=y''+3y'+y$

$=0+3(1)+x+2$

$=3+x+2$

$=x+5\neq 5\neq RHS$

$\therefore$ $y=x+2$ ليس حلاً للمعادلة التفاضلية $y''+3y'+y=5$

3/2016"اسئلة خارج القطر"

س/ هل $y=\sqrt{1-2x^2}$ تمثل حلاً للدالة $y^3\,y''=-2$؟ بين ذلك

Sol:

$y=\sqrt{1-2x^2}=(1-2x^2)^{\frac{1}{2}}$

$y=\dfrac{-4x}{2\sqrt{1-2x^2}}=\dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}$

$y''=\dfrac{-2\left(\sqrt{1-2x^2}\right)-\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-2x^2}}.(-2x)}{1-2x^2}$

$=\dfrac{-2\left(\sqrt{1-2x^2}\right)-\dfrac{-2x}{\sqrt{1-2x^2}}\,(-2x)}{1-2x^2}$

$=\dfrac{\dfrac{-2(1-2x^2)-4x^2}{\sqrt{1-2x^2}}}{1-2x^2}$

$\dfrac{-2+4x^2-4x^2}{(1-2x^2)\sqrt{1-2x^2}}=\dfrac{-2}{(1-2x^2)y}$

$y''=\dfrac{-2}{(1-2x^2)y}\to y''=\dfrac{-2}{(y^2)(y)}$

$\therefore\ y^3y''=-2$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

طريقة ثانية:

$y=\sqrt{1-2x^2}$ بتربيع الطرفين

$y^2=1-2x^2\ \to y^2+2x^2=1$

$2yy'=-4x$

$y'=\dfrac{-4x}{2y}=\dfrac{-2x}{y}$

$2yy''+y'(2y')=-4]\div 2$

$yy'+(y')^2=-2$

$yy''+(\dfrac{-2x}{y})^2=-2$

$yy''+\dfrac{4x^2}{y^2}=-2]*y^2$

$y^3y''+4x^2=-2y^2$

$y^3y''=-4x^2-2y^2$

$y^3y''=-2(2x^2+y^2)$

$y^3y''=-2(1)$

$\therefore\ y^3y''=-2$ يمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

3/2018

س/ هل يمثل $y=xln|x|-x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'=x+y$

Sol:

$y=xln|x|-x$

$\dfrac{dy}{dx}=x\cdot\dfrac{1}{x}+ln|x|1-1=lnx$

نقوم بتعويضها بطرفي المعادلة التفاضلية للحصول على طرفين متساويين

$LHS: x\cdot y'=x\ ln|x|$

$RHS: x+y=x+xln|x|-x=xln|x|$

$\because LHS=RHS$

اذن الدالة تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

3/2017

س/ هل ان $2x^2-y^2=1$ هو حل للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2=2$

Sol:

$2x^2-y^2=1$

$\to[4x-2y\,y'=0]\div 2$

$2x-y\,y'=0$

$2-(yy''+y'.y')=0$

$2-yy''-(y')^2=0$

$yy''+(y')^2=2$

اذن العلاقة $2x^2-y^2=1$ هي حل للمعادلة التفاضلية

2019/تمهيدي "تطبيقي"

س/ هل ان العلاقة $y^2=3x^2+x^3$ تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية $y\,y''+(y')^2-3x=8$

Sol:

$y^2=3x^2+x^3$

$2y\,y'=6x+3x^2$

$\to[2y\,y''+y'.2y'=6+6x]\div 2$

$y\,y''+(y')^2=3+3x$

$\to y\,y''+(y')^2-3x=3\neq 8$

الطرف الايمن $\neq$ الطرف الايسر

اذن العلاقة لا تمثل حلاً للمعادلة التفاضلية

(1/2019 اسئلة خارج القطر"تطبيقي")

س/ هل يمثل $y = \tan x$ حلا للمعادلة التفاضلية

$2yy` - y" = 0$ ؟ بين ذلك

Sol:

$y = \tan x$

$2yy^{\backslash} - y^{\backslash\backslash} = 0$

$y^{\backslash} = \sec^2 x$

$y^{\backslash\backslash} = 2\sec(\sec\tan x)$

$y^{\backslash\backslash} = 2\sec^2 . \tan x$

$2yy^{\backslash} - y^{\backslash\backslash} = 0$

$2\tan x \sec^2 x - 2\sec^2 x \tan x = 0$

$\therefore$ $y = \tan x$ حل للمعادلة

(2/2019)

س / هل ان $yx = \sin 5x$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

$xy'' + 2y' + 25yx = 8$ ؟ بين ذلك .

Sol:

$yx = \sin 5x$

$y * 1 = x * y' = 5\cos 5x$

$y + xy' = 5\cos 5x$

$y' + xy'' + y' * 1 = -25\sin 5x$

$xy'' + 2y' + 25\sin 5x = 0$

$xy'' + 2y' + 25\ yx \neq 8$

* $\therefore$ العلاقة لاتمثل حلا للمعادلة التفاضلية

ملاحظة :- (*) عليها درجة واحدة

(1/2019"اسئلة خارج القطر")

س/ اذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن ان $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

Sol:

$y = x\sin x$

$y^{\backslash} = x\cos x + \sin x * 1$

$y^{\backslash\backslash} = -x\sin x + \cos x * 1 + \cos x$

$y^{\backslash\backslash} = -x\sin x + 2\cos x$

$y^{\backslash\backslash\backslash} = -x * \cos x - \sin x - 2\sin x$

$y^{\backslash\backslash\backslash} = -x\cos x - 3\sin x$

$y^{(4)} = x\sin x - \cos x - 3\cos x$

$y^{(4)} = x\sin x - 4\cos x$

$y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

وهو المطلوب

(3/2019)

س/ هل ان $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ تمثل حلا للمعادلة التفاضلية

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$ بين ذلك

Sol:

$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)*\cos x - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2}$

$= \frac{1}{1+\cos x} = R.H$

2- الاسئلة الوزارية حول " المعادلات التي تنفصل متغيراتها"

(1/2011)(1/2014 اسئلة النازحين) (2/2019" تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2+e^y}$

Sol:

$$\Rightarrow (3y^2 + e^y)dy = \cos x\, dx$$
$$\Rightarrow \int(3y^2 + e^y)dy = \int \cos x dx$$
$$\Rightarrow 3\frac{y^3}{3} + e^y = \sin x + C$$
$$\Rightarrow y^3 + e^y = \sin x + c$$

1/2011 اسئلة خارج القطر

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{3y^2}$

Sol:

$$\Rightarrow 3y^2dy = \cos x\, dx$$
$$\Rightarrow \int 3y^2dy = \int \cos x dx$$
$$\Rightarrow 3\frac{y^3}{3} = \sin x + C$$
$$\Rightarrow y^3 = \sin x + c$$

2/2011

س/ حل المعادلة التفاضلية $e^x\, dx - y^3dy = 0$

Sol:

$$e^x dx - y^3 dy = 0$$
$$\Rightarrow y^3 dy = e^x dx$$
$$\Rightarrow \int y^3\, dy = \int e^x\, dx$$
$$\Rightarrow \left(\frac{y^4}{4} = e^x + c_1\right)(4)$$
$$\Rightarrow y^4 = 4e^x + 4c_1 \qquad c = 4c_1 \text{ يوضع}$$
$$\Rightarrow y^4 = 4e^x + c$$

(2/2012)(1/2018 اسئلة خارج القطر)

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

حيث $x = 2\, , y = 2$

Sol:

$$\frac{dy}{y-1} = (x+1)dx$$
$$\rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int (x+1)dx$$
$$\ln|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + x + c$$
$$\rightarrow \ln|1-y| = \frac{1}{2}(4) + 2 + c \quad \rightarrow c = -4$$
$$|1-y| = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$$

(3/2014)(2/2013)

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} + xy = 3x$, $x=1\, , y=2$

Sol:

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x - xy$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y)$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{3-y} = xdx$$
$$\Rightarrow -\int \frac{-dy}{3-y} = \int x\, dx$$
$$\Rightarrow -\ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \quad , x = 1\, , y = 2$$
$$-\ln|3-2| = \frac{1}{2} + c$$
$$\Rightarrow -\ln 1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c$$
$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2} \qquad \therefore \left(-\ln|3-y| = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\right) \quad (-1)$$
$$\ln|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 \Longrightarrow |3-y| = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$$
$$\Rightarrow 3 - y = \pm e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2}$$
$$\Rightarrow \therefore y = 3 \pm e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2} = 3 \pm e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

4/2014 اسئلة النازحين(الانبار)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية:

$\tan^2 y \, dy = \sin^3 x \, dx$

Sol:

$tan^2 y \, dy = sin^3 x dx$

$\Rightarrow \int (sec^2 y - 1) dy = \int \sin x \, sin^2 x \, dx$

$\Rightarrow \int (sec^2 y - 1) dy$

$= \int \sin x \,(1 - cos^2 x) dx$

$\Rightarrow \int (sec^2 y - 1) dy = \int (sin\, x - cos^2 x . \sin x \,) \, dx$

$\Rightarrow tan\, y - y = -\cos x + \frac{cos^3 x}{3} + C$

$\Rightarrow tan\, y - y = -cos\, x + \frac{1}{3} cos^3 x + C$

2/2015

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

Sol:

$\frac{dy}{y} = 2 = \frac{dx}{x+1} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x+1}$

$\ln|y| = \ln(x+1)^2 + c$

$\ln|y| - \ln(x+1)^2 = c$

$\ln \frac{|y|}{(x+1)^2} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$

حيث $c_1 = e^c$ ثابت اختباري

$|y| = e^c \,(x+1)^2$

$\therefore y = \pm c_1 (x+1)^2$

3/2015

س/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{6y^2 + e^y}$

Sol:

$\Rightarrow (6y^2 + e^y) dy = sin\, x \, dx$

$\Rightarrow \int (6y^2 + e^y) dy = \int sinx \, dx$

$\Rightarrow 6\frac{y^3}{3} + e^y = -cos\, x + C$

$\Rightarrow 2y^3 + e^y = -cosx + c$

(1/2016)(1/2017 اسئلة الموصل)

س/ اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2, \; y = 9$

Sol:

$y' - x\sqrt{y} = 0$

$y' = xy^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad y^{-\frac{1}{2}} dy = xdx$

$\int y^{-\frac{1}{2}} \, dy = \int x \, dx$

$2y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} x^2 + c$

$\because \quad x = 2 \;\; , \;\; y = 9$

$2\sqrt{9} = \frac{1}{2} \, (2)^2 + c \quad \Rightarrow \quad c = 4$

$\therefore$ الحل هو

$2\sqrt{y} = \frac{1}{2} x^2 + 4$

$y = \left(\frac{1}{4} \, x^2 + 2\right)^2$

$y = (\frac{1}{4} x^2 + 2 \;)^2$ ……………*

ملاحظة/ الخطوة * اذا لم يكتبها الطالب لا يحاسب

(1/2016 اسئلة خارج القطر)(2/2018)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الاتية:

$$xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

Sol:

$$Xy\frac{dy}{dx}+y^2=1-y^2$$

$$\Rightarrow xy\frac{dy}{dx}=1-2y^2$$

$$\Rightarrow y\frac{dy}{dx}=\frac{1-2y^2}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-2y^2}*\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{1-2y^2}dy=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\int\frac{-4ydy}{1-2y^2}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}ln|1-2y^2|=ln|x|+c$$

(3/2019)(3/2016)

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y'=2e^x\,y^3$

عند $y=\frac{1}{2}\,,x=0$

Sol:

$$\frac{dy}{dx}=2e^x\,y^3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y^3}=2e^xdx$$

$$\Rightarrow \int y^{-3}\,dy$$

$$=\int 2e^x\,dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2}=2e^x+c\Rightarrow -\frac{1}{2y^2}=2e^x+c \qquad x=0,\ y=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2(\frac{1}{4})}=2e^0+c\Rightarrow -2=2(1)+c\ \Rightarrow\ c=-4$$

$$\therefore(-\frac{1}{2y^2}=2e^x-4)(-1)$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{2y^2}=4-2e^x)(2)$$

$$\frac{1}{y^2}=8-4e^x\Rightarrow y^2\frac{1}{8-4e^x}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{1}{\sqrt{8-4e^x}}$$

(2/2017) (1/2019 "تطبيقي")

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$

حيث $x=0\,,y=0$

$$sol:\ \frac{dy}{dx}=e^{2x+y} \qquad x=0\ ,\ y=0$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^y$$

$$\frac{dy}{e^y}=e^{2x}.dx$$

$$-\int -e^{-y}\,dy\ =\frac{1}{2}\int e^{2x}.2dx$$

$$-e^y=\frac{1}{2}e^{2x}+c \qquad \because x=0\ ,y=0$$

$$-e^0=\frac{1}{2}e^0+c \quad \rightarrow -1=\frac{1}{2}(1)+c$$

$$c=\frac{-3}{2} \quad \rightarrow -e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2}$$

$$e^{-y}=\frac{1}{2}(3-e^{2x})$$

$$\frac{1}{e^y}=\frac{3-e^{2x}}{2} \quad \rightarrow e^y=\frac{2}{3-e^{2x}}$$

2018/تمهيدي

س/ حل المعادلة التفاضلية الاتية : $y'x=cos^2y$

عند $y=\frac{\pi}{4}\,,x=1$

Sol:

$$y'x=cos^2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cos^2y}{x}$$

$$\frac{x\,dy}{xcos^2y}=\frac{cos^2y}{xcos^2y}dx$$

$$\frac{1}{cos^2y}dy=\frac{1}{x}dx$$

$$\int sec^2y\,dy=\int\frac{1}{x}dx$$

$$tan\,y=ln|x|+c$$

$y=\frac{\pi}{4}\,,x=1$ عند

$$tan\,y=ln|1|+c$$

$$1=0+c \quad \rightarrow c=1$$

$$\therefore tan\,y=ln|x|+1$$

(1/2019)

س/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية الآتية:

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

Sol:

$$\sin x \cos y \frac{dy}{dx} + \cos x \sin y = 0$$

$$\frac{\sin x \cos y}{\sin x \sin y} dy = \frac{-\cos x \sin y}{\sin x \sin y} dx$$

$$\frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{-\cos x}{\sin x} dx$$

$$\int \frac{\cos y}{\sin y} dy = -\int \frac{\cos x}{\sin x} dx$$

$$Ln\,|\sin y| = -Ln\,|\sin x| + C$$

(3/2019"تطبيقي")

س/ جد حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x\ \cos^2 y\ dx$

حيث $\cos y \neq 0\ ,\ y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

Sol:

$$[dy = \sin x \cos^2 y\, dx] \div \cos^2 y$$

$$\frac{dy}{\cos^2 y} = \sin x\, dx$$

$$\int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int \sin x\, dx$$

$$\int \sec^2 y\, dy = \int \sin x\, dx$$

$$\tan y = -\cos x + C$$

تمت بعونه تعالى
مع تحيات الاستاذ خالد الحيالي
و مكتب الطابعي