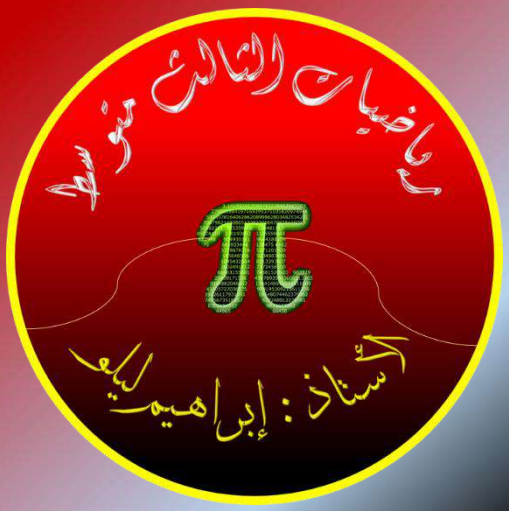


2020

رياضيات الثالث متوسط

الأستاذ: إبراهيم ليلو

1 الجزء الأول

2 الفصل الاول

3 الفصل الثاني

1 الفصل الثالث

إبراهيم ليلو

بسم الله الرحمن الرحيم

((اللهم لا علم لنا الا ما علمتنا))

الحمد الله الذي وهبنا العلم وجعله نورا" نهتدي به

نقدم لكم ملزمة الى طلاب الصف الثالث متوسط ومن يهتم بالعلم . والى كل من يجمعنا بهم رباط العلم . هذه الملزمة لمادة رياضيات الثالث متوسط المنهج الجديد . نحاول في هذه الملزمة ان اضع جميع الملاحظات.

وضعت الملاحظات على أساس اسأله الطلبة الشائعة و الأخطاء التي يقعون بها دائما" . مع شرح الموضوع والرموز الرياضية وحل تمارين الكتاب .و نتمنى ان ينال اعجابكم

ان شاء الله وان يكون ملما" وشاملا" للمنهج . والله ولي التوفيق

ملاحظة: يجب عليك نسخ الملزمة ملونة لان الملزمة تفاعلية والملاحظات وضعت على أساس الألوان.

ويمكنك متابعتي على منصات التواصل الاجتماعي

ابراهيم ليلو / Ibrahim lello

إبراهيم ليلو

@ibrahimkdab

ملاحظات مهمه يجب ان تعرفها قبل الدخول في الفصل

الضرب

- السالب * سالب = موجب
- السالب * الموجب = سالب
- موجب * موجب = موجب

الجمع والطرح

- + + + = +
- + - = نطرح ونضع اشارة الكبير
- - - = نجمع ونضع نفس الاشارة

لندرس بعض خواص الكسور وكيف تجري العمليات عليها

لا حظ عزيزي الطالب عملية جمع او طرح بين كسرين فيكون الحل $\frac{a}{b} \pm \frac{d}{c}$ =

يجب توحيد المقام قبل الجمع والطرح اما عملية التوحيد فسوف نتطرق لها من خلال الأمثلة

حالة الضرب بين الكسرين

هنا لا يتم توحيد المقامات لان العملية ضرب . يكون الحل بضرب المقام مع المقام والبسط مع البسط والاختصار اذا وجد $\frac{a}{b} * \frac{c}{d}$ = الاختصار

عزيزي الطالب يجب ان تعرف مجاميع الاعداد و رموزها . كما درستها سابقا"

1- مجموعة الاعداد الطبيعية = {1,2,3,4.....} رمزها N

اي ان الأرقام الموجبة الى مالا نهاية

2 – مجموعة الاعداد الكلية{0,1,2,3.....} ويرمز لها بالرمز w

3- مجموعة الاعداد الصحيحة = {.....,-4,-3,-2,-1,0,2,3,4,5.....} رمزها Z

أي ان المجموعة تتكون من الصفر والأرقام الموجبة والسالبة

الاعداد الموجبة والسالبة تعتبر نسبية لأنها كسريه مقامها 1 وكما تعلم الواحد عندما يكون في المقام ليس له قيمة فلا يكتب

4- مجموعة الاعداد النسبية = {.....,-4,-3,-2,-1,0,2,3,4,5.....} رمزها Q

هي مجموعة الاعداد التي تكون على صيغة كسرية و أيضا" الأرقام التي تكون تحت الجذر ويمكن استخراجها

أي مربع كامل مثل ($\sqrt[2]{16}\ \sqrt[2]{9}\ \sqrt[2]{4}$

هذه الأرقام التي تحت الجذر يمكن استخراجها أي هي عبارة عن ضرب رقم في نفسه مرتين

5- الاعداد الغير نسبية = {الأرقام التي لا يمكن استخرجها من تحت الجذر } رمزها H

$\sqrt[2]{5}\ \sqrt[2]{3}\ \sqrt[2]{2}$ الخ من الاعداد التي لاتخرج من تحت الجذر

6- مجموعة الاعداد الحقيقية = { الاعداد النسبية والاعداد الغير نسبية } رمزها R

من المهم جدا" عزيزي الطالب ان تفرق بين الاعداد النسبية والغير نسبيه

إبراهيم ليلو

https://www.youtube.com/channel/UCBhMweKzALgVz5Eh7ibFzdw?view_as=subscriber

ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية الدرس [1 – 1]	استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية	[1 – 1 – 1]

ملاحظات

الحالة الأولى : اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)(a-b)$ يتم التبسيط بطريقتين :

1) توزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم جمع أو طرح الحدود المتشابهة .

2) القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

الحالة الثانية : فتح الأقواس باستخدام خاصية التوزيع ((الضرب على الجمع أو الطرح))

1) وضع الجذور بأبسط صورة باستخدام طريقة التحليل أو عوامل العدد بشرط أن يكون أحد العوامل مربع كامل .

2) فتح الاقواس بخاصية التوزيع وخواص ضرب الجذور .

3) اذا كان السؤال يحتوي على جذور فيمكن تبسيطها مرة أخرى .

الحالة الثالثة : الجمل العددية التي تحتوي على القسمة أو الضرب :

1) في حالة الضرب وضع الأعداد الحقيقية (الجذور) في ابسط صورة ثم نجري عمليات الاختصارات أن وجدت .

2) نجري عمليات الضرب ((البسط × البسط والمقام × المقام)) .

3) في حالة القسمة نقلب القسمة إلى ضرب وقلب الكسر الذى بعد القسمة .

ت	خواص الجذور التربيعية	ت	خواص الجذور التكعيبية	
1	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$	1	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$	$\sqrt[3]{8} = 2$ $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[3]{64} = 4$ $\sqrt[3]{125} = 5$ $\sqrt[3]{216} = 6$
2	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ ، $b>0$	2	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ ، $b>0$	
3	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = (\sqrt{a})^2 = a$	3	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a} = (\sqrt[3]{a})^3 = a$	
4	$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	4	$a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$	
		5	$\sqrt[3]{-a} = -\sqrt[3]{a}$	

يمكنك مشاهدة شروحاتي على اليوتيوب

فقط ابحث باسم إبراهيم ليلو

إبراهيم ليلو

اليك شرح الجدول السابق بالتفصيل

في الصفحة الأولى تعرفنا على الاعداد الغير نسبيه (هي الاعداد التي لا تخرج من تحت الجذر على شكل رقم صحيح بال على شكل رقم عشري غير منتهي).

أولا" الجمع والطرح

$\sqrt{a} \pm \sqrt{b}=$

لا يمكن الجمع والطرح بين الاعداد الغير نسبيه الغير متشابه.

فيكون اما بتبسيط احدهم وجعله مشابه للأخر عن طريق التحليل

$\sqrt{a} \pm \sqrt{a}=$

اما هنا تستطيع وبسهولة اجراء الجمع والطرح لان تحت الجذور متشابه

عملية الضرب على الجذور

يمكن اجراء عملية الضرب بين الجذور الاعداد الغير متشابه بضربها مباشر $\sqrt{a} * \sqrt{b}=\sqrt{a * b}$

يمكن استخراج العدد من تحت الجذور في حال كون العدد الذي تحت الجذر متشابه

$\sqrt{a} * \sqrt{a}=$ a

انتبه اذا كان الجذر تربيعي فيضرب في نفسه مرتين حتى يتم استخراجه والتكعيبي ثلاث مرات والجذر الرابع اربع مرات .....الخ

اذا كان **الجذر تربيعي** مرفوع الى اس **تربيع** التربيع يلغي الجذر

$(\sqrt{a})^2$ = a

اذا كان **الجذر تكعيبي** مرفوع الى اس **تكعيب** التكعيبي يلغي الجذر التكعيبي

$(\sqrt[3]{a})^3$ = a

خاصية توزيع الجذر

توزيع الجذر الى البسط والمقام وتنطبق الملاحظة أيضا" على الجذور التكعيبية .

$$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

خاصية تحويل الجذر الى اس او بالعكس .

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

مثال جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر .

الحل قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه

سرعة التسونامي التقريبية $v = \sqrt{9.6d} = \sqrt{9.6 \times 1000} = \sqrt{9600} \approx 98 \ m/sec$

مثال بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

i) $(\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18}) = (\sqrt{12})^2 - (\sqrt{18})^2 = 12-18 = -6$

ii) $\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) \div \left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

$$= \frac{-(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})}{3\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}} = -1$$

مثال بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

i) $\sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8}) - 6 = 2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2\sqrt{2}) - 6$

$= 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{2} - 6$

$= 6 - 4\sqrt{6} - 6 = -4\sqrt{6} = -4 \times 2.4 = -9.6$

2	8
2	4
2	2
$2\sqrt{2}$	1

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

ii) $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{1}{9}\sqrt{28}\right) = \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7}\right) = -3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7} - \frac{2}{9}\sqrt{7}\right)$

$= -3 \times \frac{1}{9}\sqrt{7} + 3 \times \frac{2}{9}\sqrt{7} == -\frac{1}{3}\sqrt{7} + \frac{2}{3}\sqrt{7}$

$= \frac{1}{3}\sqrt{7}$

$= \frac{1}{3} \times 2.6 = \frac{2.6}{3} = 0.86 \approx 0.9$

2	28
2	14
7	7
$2\sqrt{7}$	1

تنسيب المقام

اذا كان المقام يحتوي على جذر فيجب التخلص منه هنالك حالتان :

1) اذا كان المقام يتكون من حد واحد نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام . أي أن :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}}$$

2) اذا كان المقام يتكون من حدين نقوم بالضرب والقسمة على نفس المقام بعكس الإشارة .

$$\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \times \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

مثال بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

1) $\frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7 \times \sqrt{5} - \sqrt{5} \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}-5}{5}$

1) $\frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7} \times \sqrt{3} \times 2\sqrt{3} + \sqrt{7} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}}{12-7}$

$= \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$

[1 – 1 – 2]	استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط الجمل العددية

خواص الأسس

1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	2	$(a^n)^m = a^{nm}$	3	$(a.b)^n = a^n . b^n$	4	$a^0 = 1$
5	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	6	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	7	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$		

اذا لم تفهم خواص الاسس اليك الشرح

1 – الخاصية الأولى هي عند الضرب تجمع الأسس مع مراعات الإشارة **والاساس متشابه ينزل كما هو ولا يضرب**

2 – عندما يكون الرقم مرفوع الى اس والرقم والاس مرفوعين الى اس الاسس تضرب

3-- اذا كان الاس لقوس والعملية ضرب فيوزع على عناصر القوس

4 – – عند ما يكون اس أي رقم صفر الناتج هو واحد

5 – - اذا كان الاس سالب يجب ان نتخلص منه بجعلة في المقام

6 – اذا كان الاس في المقام ورفعناه الى البسط يجب تغير الإشارة

مثال أحسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين اذا لم يكن عددا صحيحا :

1) $9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} = 0.037 \approx 0.04$

2) $\left(\sqrt{7}\right)^2 = \left(7^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 7$

3) $2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{5}{3}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} = 1.414 \approx 1.41$

4) $5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{2-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4-3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} = 2.236 \approx 2.24$

4) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = 0.36 - 2.83 = -2.47$

4) $8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{2+\frac{1}{2}} = 2 - 1 + 3^{\frac{4+1}{2}} = 1 + 3^{\frac{5}{2}} = 1 + \sqrt{3^5}$

$= 1 + \sqrt{243} \approx 1 + 15.588 = 16.588 = 16.59$

مثال استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

1 $7.6\times10^{-4}-0.4135\times10^{-3}=7.6\times10^{-4}-4.135\times10^{-4}=(7.6-4.135)\times10^{-4}$

$=3.465\times10^{-4}\approx3.47\times10^{-4}$

2 $0.052\times10^{4}+7.13\times10^{2}=5.2\times10^{2}+7.13\times10^{2}=(5.2+7.13)\times10^{2}$

$=12.33\times10^{2}$

3 $(7.83\times10^{-5})^{2}=(7.83\times10^{-5})(7.83\times10^{-5})=61.3089\times10^{-10}\approx61.31\times10^{-10}$

4 $4.86\times10^{2}\div0.55\times10^{5}=(4.86\div0.55)\times10^{2}\times10^{-5}=8.836\times10^{-3}$

تأكد من فهمك

بسط الجمل العددية الأتية :

1 $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})=(\sqrt{5})^{2}-(\sqrt{3})^{2}=5-3=2$

2 $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^{2}=(\sqrt{7}-\sqrt{2})(\sqrt{7}-\sqrt{2})=\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{7}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}$

$=7-\sqrt{14}-\sqrt{14}+2=9-2\sqrt{14}$

3 $(\sqrt{125}-\sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right)=(5\sqrt{5}-2\sqrt{5})\left(\frac{2}{3}\right)=3\sqrt{5}\times\frac{2}{3}$

$=2\sqrt{5}$

2	20
2	10
5	5
$2\sqrt{5}$	1

5	125
5	25
5	5
$5\sqrt{5}$	1

4 $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}}\div\frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}}=\frac{4\times2\sqrt{3}}{5(-3)}\div\frac{2\times2\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\frac{8\sqrt{3}}{-15}\div\frac{4\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

$=\frac{8\sqrt{3}}{-15}\div\frac{4\sqrt{3}}{2}=\frac{8\sqrt{3}}{-15}\times\frac{2}{4\sqrt{3}}=\frac{-4}{15}$

2	8
2	4
2	2
$2\sqrt{2}$	1

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

2	24
2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{5}$	1

بسط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر :

5 $\sqrt{7}\,(\sqrt{28}-\sqrt{2})-5=\sqrt{7}(2\sqrt{7}-\sqrt{2})-5=\sqrt{7}\times2\sqrt{7}-\sqrt{7}\times\sqrt{2}-5$

$=14-\sqrt{14}-5=9-\sqrt{14}=9-3.74$

$=5.26\approx5.3$

2	28
2	14
7	7
$2\sqrt{7}$	1

6 $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right)=\sqrt[3]{-125}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\times2\sqrt{3}\right)=-5\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$

$=-5\times\frac{1}{10}\sqrt{3}+5\times\frac{1}{2}\sqrt{3}=\frac{-1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{2}\sqrt{3}$

$=\frac{4\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}=2\times1.73=3.46$

2	12
2	6
3	3
$2\sqrt{3}$	1

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد

7 $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\times 1-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}-3}{12}$

8 $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(1-2\sqrt{5})}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\times 1-\sqrt{5}\times 2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}-10}{5}$

2	20
2	10
5	5
$2\sqrt{5}$	1

$\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} == \frac{\sqrt{3}(5\sqrt{2}-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}(10-\sqrt{6})}{2\sqrt{6}\times\sqrt{6}}$

$= \frac{\sqrt{3}\times 5\sqrt{2}-\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{6}\times 10-\sqrt{6}\times\sqrt{6}}{12}$

2	50
5	25
5	5
$5\sqrt{2}$	1

$= \frac{5\sqrt{6}-3}{6} - \frac{10\sqrt{6}-6}{12} = \frac{10\sqrt{6}-6-10\sqrt{6}+6}{12} = \frac{0}{12} = 0$

توحيد المقام . نجد المضاعف المشترك بقسمة الأرقام البسط كلا" على حدة .ومن ثم نضرب الارقم التي قسمنا بها . ثم نضع الناتج في المقام الجديد . ونقسم . ونضرب

= 12

6	6 , 12
2	1 , 2
	1,1

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقربا الى مرتبتين عشريتين مستعملا الحاسبة لكل مما يأتي :

[10] $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \sqrt{3^3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \sqrt{27} = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - 3\sqrt{3} = 0.111 + 0.037 - 3(1.73)$

$= 0.148 - 5.19 = -5.042 \approx -5.04$

[11] $27^{\frac{1}{2}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{27} - 1 + 9 \times \sqrt{5} == 3\sqrt{3} - 1 + 9 \times 2.236$

$= 3 \times 1.73 - 1 + 20.124$

$= 5.19 - 1 + 20.124 = 24.314 \approx 24.31$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[12] $6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-4} = 0.643 \times 10^{-4} - 0.25 \times 10^{-4} = (0.643 - 0.25) \times 10^{-4}$

$= 0.393 \times 10^{-4} \approx 0.39 \times 10^{-4}$

[13] $(9.23 \times 10^{-3})^2 = 9.23 \times 10^{-3} \times 9.23 \times 10^{-3} = 85.192 \times 10^{-6} \approx 85.19 \times 10^{-6}$

تدرب وحل التمرينات

بسط الجمل العددية الآتية :

14 $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = (3\sqrt{2}-5\sqrt{2})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{64}}\right) = -2\sqrt{2}\times\frac{-3}{4} = \frac{6\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

15 $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{3\times 5} \div \frac{5\times 2}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15} \div \frac{10}{5} = \frac{2\sqrt{3}}{15}\times\frac{5}{10} = \frac{\sqrt{3}}{15}$

بسط الجمل العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عشر :

16 $7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} = 7\times\frac{\sqrt{2}}{7} - 3\times\frac{\sqrt{8}}{9} + \frac{\sqrt{18}}{6} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{3\sqrt{2}}{6} = \frac{6\sqrt{2}-4\sqrt{2}+3\sqrt{2}}{6} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{5\times 1.41}{6} = \frac{7.05}{6} = 1.17 \approx 1.2$

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد

17 $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}-3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{7}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})-3\sqrt{5}(\sqrt{7}-3\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(3\sqrt{5})^2}$

$= \frac{\sqrt{7}\times\sqrt{7}-\sqrt{7}\times 3\sqrt{5}-3\sqrt{5}\times\sqrt{7}+3\sqrt{5}\times 3\sqrt{5}}{7-45}$

$= \frac{7-3\sqrt{35}-3\sqrt{35}+45}{-38} = \frac{52-6\sqrt{35}}{-38} = \frac{-52+6\sqrt{35}}{38}$

السالب بالمقام يجب التخلص منه وذلك بضرب بالسالب فتتغير إشارات البسط و تختصر إشارة المقام

18

$\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}$

$= \frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{3\sqrt{11}}\times\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} - \frac{2\sqrt{15}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}}\times\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}} = \frac{(\sqrt{33}-\sqrt{11})\sqrt{11}}{3\sqrt{11}\times\sqrt{11}} - \frac{(2\sqrt{15}-\sqrt{5})\sqrt{15}}{5\sqrt{15}\times\sqrt{15}}$

$= \frac{\sqrt{33}\times\sqrt{11}-\sqrt{11}\times\sqrt{11}}{3\times 11} - \frac{2\sqrt{15}\times\sqrt{15}-\sqrt{5}\times\sqrt{15}}{5\times 15}$

$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{11}\times\sqrt{11}-11}{33} - \frac{2\times 15-\sqrt{5}\times\sqrt{5}\times\sqrt{3}}{75} = \frac{11\sqrt{3}-11}{33} - \frac{30-5\sqrt{3}}{75}$

$\frac{11(\sqrt{3}-1)}{33} - \frac{5(6-\sqrt{3})}{75} = \frac{(\sqrt{3}-1)}{3} - \frac{(6-\sqrt{3})}{15} = \frac{5(\sqrt{3}-1)-(6-\sqrt{3})}{15}$

$\frac{5\sqrt{3}-5-6+\sqrt{3}}{15} = \frac{-11-6\sqrt{3}}{15}$

تدرب وحل مسائل حياتية

[19] **لأقمار الصناعية :** يستعمل القمر الصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير اذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية : $v = \sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$ m/sec اذ r نصف قطر المدار (بعد القمر عن مركز الأرض) . ما سرعة القمر

اذا كان نصف قطر المدار 300km ؟

الحل

نحول نصف القطر من km الى m

$$r = 300km = 300 \times 1000 = 3 \times 10^5 m$$

$$V = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{r}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14}}{3 \times 10^5}} = \sqrt{\frac{4 \times 10^{14-5}}{3}} = \frac{2 \times \sqrt{10^9}}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{10} \times \sqrt{10^8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{10} \times 10^4}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{10} \times 10^4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{30} \times 10^4}{3} = \frac{2 \times 5.47 \times 10^4}{3} = \frac{10.94 \times 10^4}{3} = 3.65 \times 10^4$$

[20] مكافحة الحرائق : تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون : $V = \sqrt{2hg}$ foot/sec اذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل سرعة التعجيل الأرضي $(32\ foot/sec^2)$ لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني الى مضخة لتضخ الماء الى ارتفاع 80 foot فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec

الحل

V : السرعة . أقصى ارتفاع $h = 80\ foot$. *التعجيل الأرضي* $g = 32\ foot/sec^2$

$V = \sqrt{2hg} \implies 72 = \sqrt{2 \times h \times 32} \implies \implies 72 = \sqrt{64 \times h}$ بتربيع الطرفين

$5184 = 64 \times h$

$h = \frac{5184}{64} = 81 \implies$ نعم : مضخة الماء تفي بالحاجة

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الأرتفاع

---

[21] هندسة : جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت اذا كان ارتفاعه $\sqrt{18} - \sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2} + \sqrt{3}$ m

الحل

مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة $\times$ الأرتفاع

$$A = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{18} - \sqrt{3}) = \frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{3})(3\sqrt{2} - \sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2\right] = \frac{1}{2}(18 - 3) = \frac{1}{2} \times 15 = 7.5\ m^2$$

فكر

[22] أثبت صحة ما يأتي :

الحل

2) $\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)=2$

الحل ملاحظة : اذا كان المقدار بالصورة : $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

$R.H.S=\left(7^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3=7-5=2$. $H.S=\left(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}}\right)\left(7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)$

[23] أصحح الخطأ : كتب شاكر ناتج جمع العددين كالآتي : $8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=4.368\times10^{-3}$ حدد خطأ شاكر وصححه .

الحل

$8.4\times10^{-3}+0.25\times10^{-2}=8.4\times10^{-3}+2.5\times10^{-3}=(8.4+2.5)\times10^{-3}=10.9\times10^{-3}$

[24] حس عددي : هل أن العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

الحل

$\sqrt{125}=5\sqrt{5}=5\times2.23=11.15$

نعم العدد $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

5	125
5	25
5	5
	1
$5\sqrt{5}$	

أكتب // ناتج الجمع بالتقريب لأقرب عشر : $6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}$

الحل :

$6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{6^3}+\sqrt{5^3}=\sqrt{216}+\sqrt{125}$

$=6\sqrt{6}+5\sqrt{5}=6\times2.44+5\times2.23$

$=14.64+11.15=25.79\approx25.8$

2	216
2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1
$6\sqrt{6}$	

5	125
5	25
5	5
	1
$5\sqrt{5}$	

التطبيقات

الدرس [2 – 1]

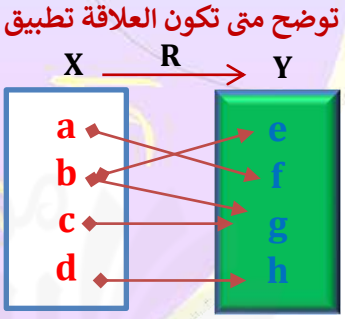
[1 – 2 – 1] التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي

التطبيق (Mappings) : لتكن R علاقة من المجموعة X (المجال) الى المجموعة Y (المجال المقابل)
حيث كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر وحيد من عناصر Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق
وتكتب $R : X \longrightarrow Y$.

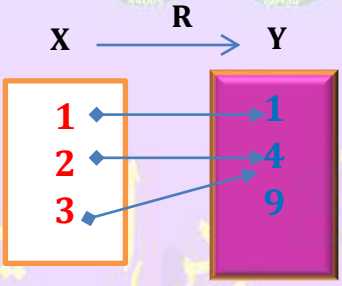
الزوج المرتب (ordered pair) : هي مجموعة الأزواج المرتبة (x, y) اذ ينتمي المسقط الأول ((الإحداثي الأول)) الى المجموعة X والمسقط الثاني ((الإحداثي الثاني)) الى المجموعة Y من حاصل الضرب الديكارتي $X \times Y$

المدى (Range) : يمثل المدى المسقط الثاني من الأزواج المرتبة (x, y) أي تمثل صور عناصر المجال ((النواتج))

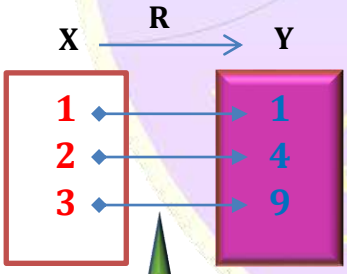
فيما يلي أمثلة توضح متى تكون العلاقة تطبيق :



R لا يمثل تطبيق لأن العنصر b في المجال ارتبط بعنصرين في المجال المقابل



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y



R يمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y

ملاحظة

هنا هذا السهم الذي يربط بين المجموعتين يسمى قاعدة الاقتران .

قاعدة الاقتران عبارة عن معادلة ندخل فيها عناصر المجموعة X ويكون الناتج .

هو الذي يرتبط به السهم في المجموعةY.. **وهذى الناتج يسمى المدى.**

مثال اذا كانت $R : X \to Y$ تمثل تطبيقا بقاعدة اقتران $y = \frac{1}{2}x$ من المجموعة $X = \{4, 6, 8\}$ الى المجموعة $Y = \{2, 3, 4, 5\}$.

اكتب التطبيق على شكل أزواج مرتبة ثم مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .

الحل:

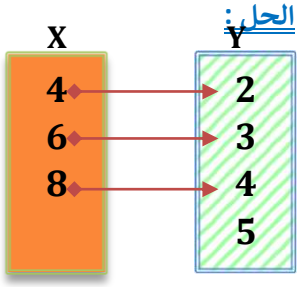
$y = \frac{1}{2}x \quad , \quad X = \{4, 6, 8\}$

$y = \frac{1}{2} \times 4 = 2$

$y = \frac{1}{2} \times 6 = 3$

$y = \frac{1}{2} \times 8 = 4$

أولا" وضع قاعدة الاقتران ثانيا" التعويض بدل كل X الأرقام الموجودة في المجموعة X الناتج يمثل المدى والازواج المرتبة هي عبارة عن المدخلات في قاعدة الاقتران والمخرجات



$R = \{(4, 2), (6, 3), (8, 4)\}$ الأزواج المرتبة $\Longrightarrow$ $X = \{4, 6, 8\}$ المجال $\Longrightarrow$ $\{2, 3, 4\} =$ المدى

مثال الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك

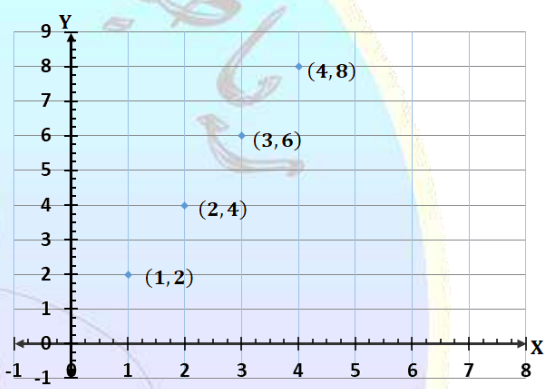
الوزن / كغم X	السعر بألوف الدنانير Y
1	2
2	4
3	6
4	8

هل تمثل العلاقة تطبيقا ؟ اذا كانت تطبيقا فاكتب قاعدة الاقتران وحدد المجال والمدى ومثله في المستوي الإحداثي .

الحل :

قاعدة الأقتران $y = 2x$

المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$, المدى $= \{2, 4, 6, 8\}$



أنواع التطبيقات [1 – 2 – 2]

أولاً التطبيق الشامل

يكون التطبيق $f : X \to Y$ شامل اذا كان
المدى = المجال المقابل

ملاحظة

يكون التطبيق $f : X \to Y$ غير شامل اذا كان
المجال المقابل N, Z, R, Q

ثانياً

التطبيق المتباين

يكون التطبيق $f: X \to Y$ متباين اذا كان كل عنصر في X يرتبط بعنصر واحد من Y أي أن :

$\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \quad \to \quad f(x_1) \neq f(x_2)$

((النواتج مختلفة))

التطبيق غير المتباين

يكون التطبيق $f: X \to Y$ غير متباين اذا كان :

$\forall x_1, x_2 \in X \ , x_1 \neq x_2 \quad \to \quad f(x_1) = f(x_2)$

((النواتج متشابهة))

ثالثاً التطبيق التقابل

يكون التطبيق تقابل اذا كان التطبيق شامل ومتباين

دعك من الرموز سوف نفهمها في الأمثلة و لاكن افهم ان كل عنصر من المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من المجال المقابل

مثال اذا كانت : $f : Z \to Z$ حيث : $f(x) = 2x^2 - 3$ بين نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة .

الحل :

$f(x) = 2x^2 - 3$, $X = Z = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\dots\}$

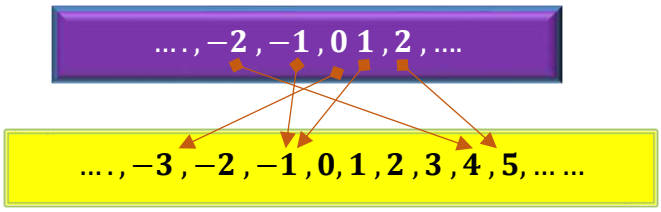
$f(0) = 2(0)^2 - 3 = 0 - 3 = -3$

$f(1) = 2(1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(-1) = 2(-1)^2 - 3 = 2 - 3 = -1$

$f(2) = 2(2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$

$f(-2) = 2(-2)^2 - 3 = 8 - 3 = 5$



المدى $= \{-3 , -1 , 5 , \dots\dots\dots\}$

التطبيق ليس شامل لأن المدى ≠ المجال المقابل Z

التطبيق ليس متباينا لأن $f(1) = f(-1) = -1$ بينما $1 \neq -1$

أي ان عوضنا 1 والسالب واحد والناتج هو نفسه 1-

وهذا يخالف شرط التطبيق المتباين

تركيب التطبيقات

1	$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$	2	$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

$[g(x)]$ الدالة تقرأ f تركيب g بالنسبة للـ x

$g[f(x)]$ الدالة تقرأ g تركيب f بالنسبة للـ x

لاحظ عزيزي الطالب في كلتا الحالتين يجب عليك ان تبدأ بالحل من الدالة التي داخل القوسين .

مثال اذا كان : $f : N \to N$ حيث : $f(x) = 2x + 1$ و $g : N \to N$ حيث : $g(x) = x^2$ جد :

1) $(f \circ g)(3)$ 2) $(g \circ f)(x)$ وماذا تلاحظ ؟ 3) جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 33$

الحل :

1) $(f \circ g)(3) = f[g(3)] = f[(3)^2] = f(9) = 2(9) + 1 = 19$

2) $(g \circ f)(3) = g[f(3)] = g[2(3) + 1] = g(7) = (7)^2 \implies (f \circ g)(3) \neq (g \circ f)(3)$

3) $(f \circ g)(x) = 33$

$f[g(x)] = 33 \implies f(x^2) = 33 \implies 2x^2 + 1 = 33$

$2x^2 = 33 - 1 \implies 2x^2 = 32$

$x^2 = \frac{32}{2} = 16 \implies x = \mp 4$

تأكد من فهمك

اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى لها :

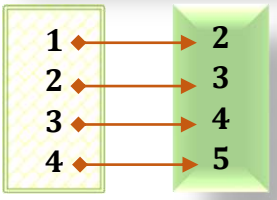
[1] $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$

الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = x + 1$

المجال $= \{1,2,3,4\}$

المدى $= \{2,3,4,5\}$



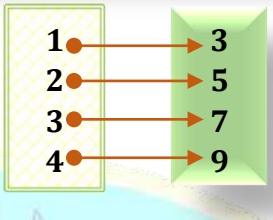
[2] $g = \{(1,3),(2,5),(3,7),(4,9)\}$

الحل :

قاعدة الاقتران : $f(x) = 2x + 1$

المجال $= \{1,2,3,4\}$

المدى $= \{3,5,7,9\}$

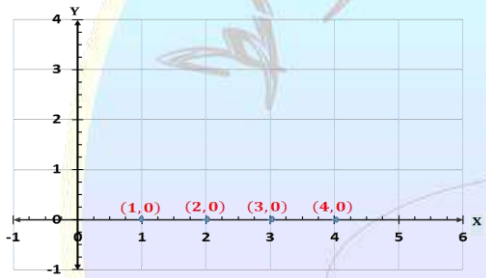


اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها :

[3] $f = \{(1,0),(2,0),(3,0),(4,0)\}$

الحل : قاعدة الاقتران : $f(x) = 0$

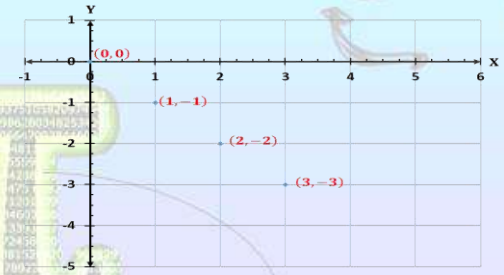
المجال $= \{1,2,3,4\}$, المدى $= \{0\}$



[4] $g = \{(0,0),(1,-1),(2,-2),(3,-3)\}$

الحل : قاعدة الاقتران : $f(x) = -x$

المجال $= \{0,1,2,3\}$, المدى $= \{0,-1,-2,-3\}$



5 اذا كان التطبيق $f : N \to N$ اذ أن : $f(x) = 3x + 2$ بين هل أن التطبيق شامل أم لا ؟

الحل :

$f(x) = 3x + 2$, $X = N = \{1,2,3,\ldots\ldots\}$

$f(1) = 3(1) + 2 = 5$

$f(2) = 3(2) + 2 = 8$

$f(3) = 3(3) + 2 = 11$

المدى $= \{5,8,11,\ldots\ldots\ldots\}$ $\Leftarrow$ التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل

6 ليكن التطبيقان $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وأن $g : \to A \to A$ حيث $g(x) = 2x + 5$

جد قيمة x اذا كان : $(f \circ g)(x) = 28$

الحل :

$f[g(x)] = 28$

$f[2x + 5] = 28$

$3(2x + 5) + 1 = 28$

$6x + 15 + 1 = 28$

$6x + 16 = 28$

$6x = 28 - 16$

$$6x = 12 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{12}{6} = 2$$

7 اذا كانت $f : N \to N$ حيث $f(x) = 5x + 2$ وأن $g: N \to N$ حيث $g(x) = x + 3$ اكتب التطبيق $f \circ g$ بكتابة الأزواج المرتبة لها واكتب مداها وبين نوعها ؟

الحل :

$f \circ g(x) = f[g(x)]$, $X = N = \{1, 2, 3, \dots \dots \dots\}$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(1 + 3) = f(4) = 5(4) + 2 = 22$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(2 + 3) = f(5) = 5(5) + 2 = 27$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(3 + 3) = f(6) = 5(6) + 2 = 32$

$f \circ g = \{(1, 22), (2, 27), (3, 32), \dots \dots \dots \dots\}$ الأزواج المرتبة

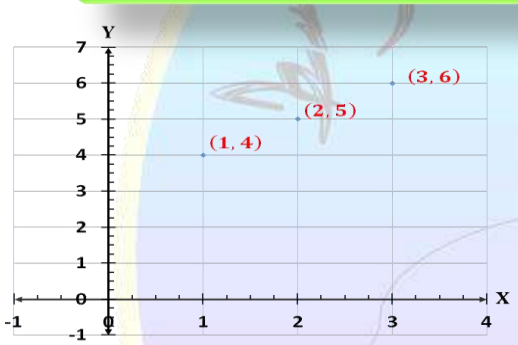
المدى $= \{22, 27, 32, \dots \dots \dots \dots\}$

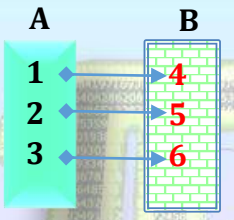
التطبيق ليس شامل لأن المدى $\neq$ المجال المقابل N

التطبيق متباين لأن $f \circ g(1) \neq f \circ g(2)$ بينما $1 \neq 2$ $\Longleftarrow$ التطبيق ليس تقابل .

تدرب وحل التمرينات

8 اذا كان $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ وأن $f : A \to B$ معرف كالآتي $f = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$ ارسم المخطط السهمي للتطبيق وارسم المخطط البياني له وبين نوعه .





الحل :

المدى $= \{4, 5, 6\}$

المجال المقابل $= \{4, 5, 6\}$

التطبيق شامل لأن المدى $=$ المجال المقابل

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(2)$. التطبيق تقابل

9 اذا كان $f : A \to Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ مثل التطبيق في المستوي الاحداثي وبين هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟

الحل :

$f(x) = x^2$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

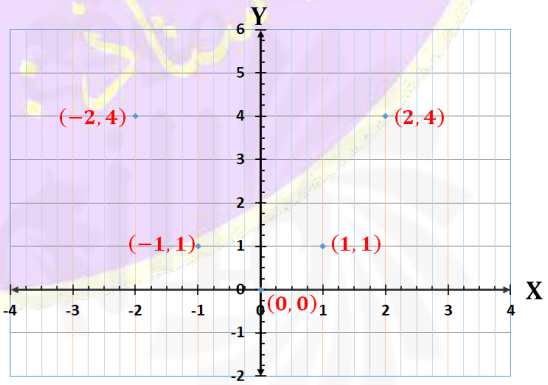
$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$

$f = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$



10 ليكن $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = x^2$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x + 1$ والمطلوب إيجاد :

1) $(g \circ f)(x)$, $(f \circ g)(x)$ 2) $(f \circ g)(2)$, $(g \circ f)(2)$

الحل :

1) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g[x^2] = x^2 + 1$

$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f[x + 1] = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

$(f \circ g)(1) = f[g(2)] = f[2 + 1] = f(3) = (3)^2 = 9$

$(g \circ f)(2) = g[f(2)] = g[(2)^2] = g(4) = 4 + 1 = 5$

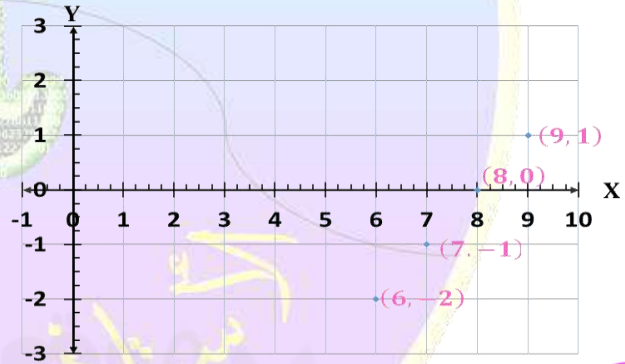
تدرب وحل مسائل حياتية

11 درجات الحرارة : سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية : $R = \{(6, -2), (7, -1), (8, 0), (9, 1)\}$ اذ يمثل الاحداثي الأول بالساعة والاحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية . مثل العلاقة بجدول ومثلها بالمستوي الاحداثي بيانيا هل تمثل العلاقة تطبيقا أم لا ؟

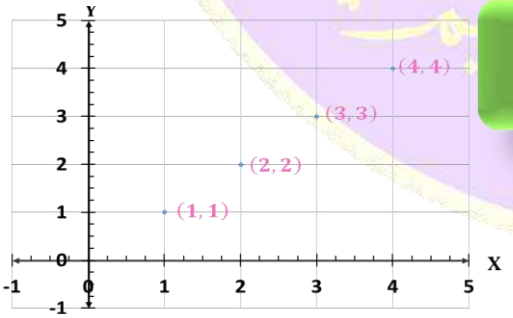
الحل :

الوقت (X)	6	7	8	9
درجة الحرارة (Y)	-2	-1	0	1

العلاقة تمثل تطبيقا لأن كل عنصر من عناصر X يرتبط بعنصر واحد من عناصر Y



12 المستوي الاحداثي : الشكل البياني المجاور يمثل تطبيق $f : N \longrightarrow N$ اكتب احداثيات الأزواج المرتبة التي تمثلها نقاط التطبيق في البياني واكتب قاعدة اقتران التطبيق وهل التطبيق متباين أم لا ؟



الحل :

الأزواج المرتبة $f = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}$

قاعدة الاقتران : $f(x) = x$

التطبيق متباين لأن $f(2) \neq f(1)$ بينما $2 \neq 1$ ((النواتج مختلفة))

13 الصحة : العلاقة $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$ تمثل كتلة الماء في جسم الانسان اذ W_r تمثل وزن الماء و W_b تمثل كتلة الانسان كتلة حسان $150kg$ استعمل نظام خاص بانقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقد من كتلته $6kg$ في الشهر الأول ثم $12kg$ في الشهر الثاني , $12kg$ في الشهر الثالث . اكتب جميع الأزواج المرتبة للعلاقة بين كتلة حسان وكتلة الماء في جسمه , هل تمثل تطبيقا أم لا , واكتب المجال والمدى له .

الحل :

$W_b = \{150, 150-6=144, 144-12=132, 132-12=120\}$, $W_r = 2\left(\frac{W_b}{3}\right)$

$W_r(150) = 2\left(\frac{150}{3}\right) = 2(50) = 100$

$W_r(144) = 2\left(\frac{144}{3}\right) = 2(48) = 96$

$W_r(132) = 2\left(\frac{132}{3}\right) = 2(44) = 88$

$W_r(120) = 2\left(\frac{120}{3}\right) = 2(40) = 80$

الأزواج المرتبة $f = \{(150,100),(144,96),(132,88),(120,80)\}$

يمثل تطبيقاً لأن كل عنصر في المجال يرتبط بعنصر واحد فقط من عناصر المجال المقابل .

فـــكر

14 تحد : اذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان $f : A \to A$ و $g : A \longrightarrow A$ معرفان كما يلي :
$f = \{(1,3),(3,3),(2,3)\}$, $g = \{(3,1),(1,2),(2,3)\}$ بين هل أن : $f \circ g = g \circ f$ ؟

الحل :

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$
$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$
$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$
$f \circ g(x) \neq g \circ f(x)$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$
$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$
$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

15 أصحح الخطأ : قال ياسين أن العلاقة $f : Z \to Z$ حيث $f(x) = x^3$ لا تمثل تطبيقا متباينا . حدد خطأ ياسين وصححه .

الحل :

$X = Z = \{-2,-1,0,1,2\}$, $f(x) = x^3$

$f(-2) = (-2)^3 = -8$, $f(-1) = (-1)^3 = -1$

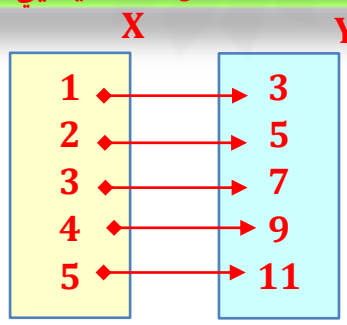
$f(0) = (0)^3 = 0$, $f(1) = (1)^3 = 1$, $f(2) = (2)^3 = 8$

التطبيق متباين لأن $f(1) \neq f(-1)$ بينما $1 \neq -1$ ((النواتج مختلفة))

16 حس عددي : حدد ما اذا كانت كل علاقة فيما يلي تمثل تطبيقا أم لا ؟ فسر ذلك .

i)

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11



الحل :

العلاقة تمثل تطبيق لأن كل عنصر من X يرتبط بعنصر واحد من Y

اكتب ليكن التطبيق $f : N \to Z$ حيث $f(x) = 4x - 3$ اذا كان $(f \circ f)(x) = 33$ فجد قيمة x ؟

الحل :

$$f[f(x)] = 33$$
$$f(4x - 3) = 33$$
$$4(4x - 3) - 3 = 33$$
$$16x - 12 - 3 = 33 \quad \Longrightarrow \quad 16x - 15 = 33$$
$$16x = 33 + 15 \quad \Longrightarrow \quad 16x = 48 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{48}{16} = 3$$

المتتابعة

المتتابعة : هي دالة مجالها N أو مجموعة جزئية مرتبة منتهية من N أي أن : $f : N \longrightarrow R$ وتكتب على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة حيث المساقط الأولى تمثل عناصر المجال N والمساقط الثانية تمثل عناصر المجال المقابل (الصور) كما في الشكل : $\{(1, f(1)), (2, f(2)), (3, f(3)), \dots\dots\dots\dots, (n, f(n), \dots\dots)\}$ فاذا كانت المتتابعة منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^{m}$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$ أما اذا كانت المتتابعة غير منتهية يرمز لها بالرمز $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ أو $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$.

ملاحظة : غالبا ما نكتفي عند كتابة المتتابعة بذكر المساقط الثانية فقط (الصور) .

$$\{f(1), f(2), f(3), \dots\dots\dots, f(n), \dots\dots\}$$

ملاحظة : يسمى u_n بالحد العام للمتتابعة $u_n = f(n)$ وتكتب المتتابعة بالصورة :

$$\{u_1, u_2, u_3, \dots\dots\dots, u_i, \dots\dots\}$$

مثال نظم جدولا يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطا؟ هل يمثل متتابعة؟

عدد اللوحات	1	2	3	4	5
عدد الأيام	3	6	9	12	15

الحل :

الأزواج المرتبة $\{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), (5, 15)\}$

نعم يمثل نمطا والعلاقة تمثل ((ثلاثة أمثال)) والعلاقة تمثل متتابعة حدها العام هو

$$u_n = 3n \quad , \quad n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

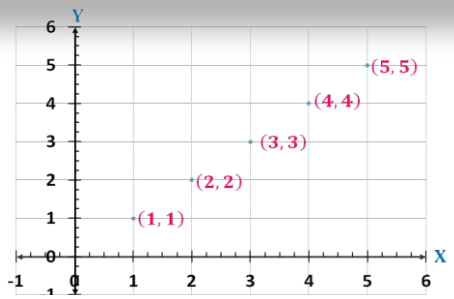
تكتب بالشكل الاتي: $\Longleftarrow \quad \{u_n\} = 3n = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

مثال اكتب الأزواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثلها في المستوي الاحداثي :

1 $u_n = n$

الحل :

$u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$
$u_4 = 4$, $u_5 = 5$

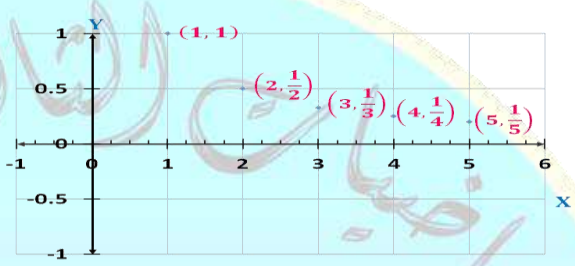


الأزواج المرتبة $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

2 $u_n = \frac{1}{n}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1} = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$,
$u_3 = \frac{1}{3}$
$u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{1}{5}$



الأزواج المرتبة $\left\{(1,1),\left(2,\frac{1}{2}\right),\left(3,\frac{1}{3}\right),\left(4,\frac{1}{4}\right),\left(5,\frac{1}{5}\right)\right\}$

مثال اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

1 $u_n = \{2n - 1\}$

الحل :

$u_1 = 2(1) - 1 = 1$, $u_2 = 2(2) - 1 = 3$
$u_3 = 2(3) - 1 = 5$, $u_4 = 2(4) - 1 = 7$
$u_5 = 2(5) - 1 = 9$

المتتابعة هي : $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

2 $\{u_n\} = (-1)^n$

الحل :

$u_1 = (-1)^1 = -1$, $u_2 = (-1)^2 = 1$
$u_3 = (-1)^3 = -1$, $u_4 = (-1)^4 = 1$
$u_5 = (-1)^5 = -1$

المتتابعة هي: $\{1, 1, -1, 1, -1\}$

3 $\{u_n\} = \frac{n}{3}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{3} = 1$
$u_4 = \frac{4}{3}$, $u_5 = \frac{5}{3}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

4 $\{u_n\} = n^2$

الحل :

$u_1 = (1)^2 = 1$, $u_2 = (2)^2 = 4$
$u_3 = (3)^2 = 9$, $u_4 = (4)^2 = 16$
$u_5 = (5)^2 = 25$

المتتابعة هي : $\{1, 4, 9, 16, 25\}$

5 $\{u_n\} = n^3$

الحل :

$u_1 = (1)^3 = 1$, $u_2 = (2)^3 = 8$, $u_3 = (3)^3 = 27$, $u_4 = (4)^3 = 64$, $u_5 = (5)^3 = 125$

المتتابعة هي : $\{1, 8, 27, 64, 125\}$

المتتابعة الحسابية

المتتابعة الحسابية : هي المتتابعة التي يكون فيا الفرق بين كل حدين متتالين عددا ثابتا ويسمى أساس المتتابعة ويرمز بالرمز d أي أن ((الأساس d = الحد الثاني – الحد الأول)) ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الأول $a = u_1$ وأساسها d . حيث : n تمثل عدد حدود المتتابعة .

قانون الحد العام للمتتابعة الحسابية

$$u_n = a + (n-1)d$$

ملاحظة

لإيجاد المتتابعة الحسابية اذا علم حدها الأول a وأساسها d نستخدم :

$$a = u_1 \overset{+d}{\Longrightarrow} u_2 \overset{+d}{\Longrightarrow} u_3 \overset{+d}{\Longrightarrow} \dots\dots \overset{+d}{\Longrightarrow} u_n$$

مثال اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الآتية :

1) متتابعة حسابية الحد الأول فيها (3) وأساسها (6) .

الحل :

$a = u_1 = 3 \ , \quad d = 6$

$u_2 = u_1 + d = 3 + 6 = 9 \ , \quad u_3 = u_2 + d = 9 + 6 = 15$

$u_4 = u_3 + d = 15 + 6 = 21 \ , \quad u_5 = u_4 + d = 21 + 6 = 27$

المتتابعة هي : $\{3, 9, 15, 21, 27\}$

2) متتابعة حسابية حدها الأول (1) وأساسها (-3) .

الحل :

$a = u_1 = 1 \ , \quad d = -3$

$u_2 = u_1 + d = 1 - 3 = -2 \ , \quad u_3 = u_2 + d = -2 - 3 = -5$

$u_4 = u_3 + d = -5 - 3 = -8 \ , \quad u_5 = u_4 + d = -8 - 3 = -11$

المتتابعة هي : $\{1, -2, -5, -8, -11\}$

3) متتابعة حسابية حدها السابع (36) وأساسها (4) .

الحل :

$u_7 = 36 \ , \ n = 7 \ , \ d = 4 \ , \ a = ?$

$u_n = a + (n-1)d \implies 36 = a + (7-1)(4) \implies 36 = a + 24$

$a = 36 - 24 = 12 \implies a = 12$

المتتابعة هي : $\{12, 16, 20, 24, 28\}$

مثال متتابعة حسابية حدها الثالث (8) و $d = -3$ جد الحدود بين u_7, u_{11}

الحل :

$u_3 = 8 \ , \ n = 3 \ , \quad d = -3 \ , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$8 = a + (3-1)(-3) \implies 8 = a - 6 \implies a = 8 + 6 = 14$

$u_8 = 14 + (8-1)(-3) = 14 - 21 = -7$

$u_9 = 14 + (9-1)(-3) = 14 - 24 = -10$

$u_{10} = 14 + (10-1)(-3) = 14 - 27 = -13$

المتتابعة هي : $\{-7, -10, -13\}$

	المتتابعة الحسابية ثلاثة أنواع هي
1	تكون المتتابعة متزايدة اذا كانت : $d > 0$ (موجبة)
2	تكون المتتابعة متناقصة اذا كانت : $d < 0$ (سالبة)
3	تكون المتتابعة ثابتة اذا كانت : $d = 0$

مثال جد الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots\dots\}$ وحدد ما اذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة ؟

الحل :

$a = 6$, $d = 1 - 6 = -5$, $u_{20} = ?$ $n = 20$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{20} = 6 + (20-1)(-5) = 6 + (19)(-5) = 6 - 95 = -89$

المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

تأكد من فهمك

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى :

1 $u_n = 3n$

الحل :

$u_1 = 3(1) = 3$, $u_2 = 3(2) = 6$

$u_3 = 3(3) = 9$, $u_4 = 3(4) = 12$

لأزواج المرتبة : $\{(1,3), (2,6), (3,9), (4,12)\}$

2 $u_n = n - 4$

الحل :

$u_1 = 1 - 4 = -3$, $u_2 = 2 - 4 = -2$

$u_3 = 3 - 4 = -1$, $u_4 = 4 - 4 = 0$

الأزواج المرتبة : $\{(1,-3), (2,-2), (3,-1), (4,0)\}$

3 $u_n = n^2$

الحل :

$u_1 = (1)^2 = 1$, $u_2 = (2)^2 = 4$

$u_3 = (3)^2 = 9$, $u_4 = (4)^2 = 16$

الأزواج المرتبة : $\{(1,1), (2,4), (3,9), (4,16)\}$

4 $u_n = \frac{1}{2n}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{2(1)} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$

$u_3 = \frac{1}{2(3)} = \frac{1}{6}$, $u_4 = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$

الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1,\frac{1}{2}\right), \left(2,\frac{1}{4}\right), \left(3,\frac{1}{6}\right), \left(4,\frac{1}{8}\right)\right\}$

5 $u_n = 3n - 1$

الحل :

$u_1 = 3(1) - 1 = 2$, $u_2 = 3(2) - 1 = 5$

$u_3 = 3(3) - 1 = 8$, $u_4 = 3(4) - 1 = 11$

الأزواج المرتبة : $\{(1,2), (2,5), (3,8), (4,11)\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

6 متتابعة حسابية الحد الأول فيها (1) وأساسها (5)

الحل :

$a = u_1 = 1 \quad , \quad d = 5$

$u_2 = u_1 + d = 1 + 5 = 6 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = 6 + 5 = 11$

$u_4 = u_3 + d = 11 + 5 = 16 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 16 + 5 = 21$

المتتابعة الحسابية : $\{1, 6, 11, 16, 21\}$

7 متتابعة حسابية الحد الأول فيها (-5) وأساسها (2)

الحل :

$a = u_1 = -5 \quad , \quad d = 2$

$u_2 = u_1 + d = -5 + 2 = -3 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -3 + 2 = -1$

$u_4 = u_3 + d = -1 + 2 = 1 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = 1 + 2 = 3$

المتتابعة الحسابية : $\{-5, -3, -1, 1, 3\}$

8 متتابعة حسابية الحد الأول فيها (-3) وأساسها (-4)

الحل :

$a = u_1 = -3 \quad , \quad d = -4$

$u_2 = u_1 + d = -3 - 4 = -7 \quad , \quad u_3 = u_2 + d = -7 - 4 = -11$

$u_4 = u_3 + d = -11 - 4 = -15 \quad , \quad u_5 = u_4 + d = -15 - 4 = -19$

المتتابعة الحسابية : $\{-3, -7, -11, -15, -19\}$

اكتب حدود المتتابعات الآتية :

9 جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتتابعة حسابية حدها الثالث (9) و $d = -2$

الحل :

$u_3 = 9 \quad , \quad n = 3 \quad , \quad d = -2 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d \quad \Rightarrow \quad 9 = a + (3-1)(-2)$

$9 = a - 4 \quad \Rightarrow \quad a = 9 + 4 = 13$

$u_9 = 13 + (9-1)(-2) = 13 + (8)(-2) = 13 - 16 = -3$

$u_{10} = 13 + (10-1)(-2) = 13 + (9)(-2) = 13 - 18 = -5$

$u_{11} = 13 + (11-1)(-2) = 13 + (10)(-2) = 13 - 20 = -7$

المتتابعة : $\{-3, -5, -7\}$

10 جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتتابعة حسابية حدها السادس (-11) و $d = -3$

الحل :

$u_6 = -11 \quad , \quad n = 6 \quad , \quad d = -3 \quad , \quad a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$-11 = a + (6-1)(-3) \quad \Rightarrow \quad -11 = a - 15 \quad \Rightarrow \quad a = -11 + 15 = 4$

$u_7 = 4 + (7-1)(-3) = 4 + (6)(-3) = 4 - 18 = -14$

$u_8 = 4 + (8-1)(-3) = 4 + (7)(-3) = 4 - 21 = -17$

$u_9 = 4 + (9-1)(-3) = 4 + (8)(-3) = 4 - 24 = -20$

المتتابعة : $\{-14, -17, -20\}$

11 اكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية $\{3, -1, -5, -9, \dots \dots \dots .\}$

الحل :

$u_{23} = ?$, $n = 23$, $a = 3$, $d = -1 - 3 = -4$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_{23} = 3 + (23-1)(-4) = 3 + (22)(-4) = 3 - 88 = -85 \quad \Rightarrow \quad u_{23} = -85$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

12 $\{u_n\} = 4n$

الحل :

$u_1 = 4(1) = 4$, $u_2 = 4(2) = 8$, $u_3 = 4(3) = 12$

$u_4 = 4(4) = 16$, $u_5 = 4(5) = 20 \Rightarrow$

المتتابعة : $\{4, 8, 12, 16, 20\}$

13 $\{u_n\} = 2n - 5$

الحل :

$u_1 = 2(1) - 5 = 2 - 5 = -3$, $u_2 = 2(2) - 5 = 4 - 5 = -1$

$u_3 = 2(3) - 5 = 6 - 5 = 1$, $u_4 = 2(4) - 5 = 8 - 5 = 3$

$u_5 = 2(5) - 5 = 10 - 5 = 5$

المتتابعة : $\{-3, -1, 1, 3, 5\}$

14 $\{u_n\} = \dfrac{1}{n+1}$

الحل :

$u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{1}{2+1} = \dfrac{1}{3}$, $u_3 = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$

$u_4 = \dfrac{1}{4+1} = \dfrac{1}{5}$, $u_5 = \dfrac{1}{5+1} = \dfrac{1}{6}$

المتتابعة : $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$

---

15 $\{u_n\} = 9$

الحل :

$u_1 = 9$, $u_2 = 9$, $u_3 = 9$, $u_4 = 9$, $u_5 = 9$

المتتابعة : $\{9, 9, 9, 9, 9\}$

تدرب وحل التمرينات

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى :

16 $u_n = 10 - 4n$

الحل :

$u_1 = 10 - 4(1) = 10 - 4 = 6$ ، $u_2 = 10 - 4(2) = 10 - 8 = 2$

$u_3 = 10 - 4(3) = 10 - 12 = -2$ ، $u_4 = 10 - 4(4) = 10 - 16 = -6$

الأزواج المرتبة : $\{(1,6),(2,2),(3,-2),(4,-6)\}$

---

17 $u_n = n^2 - 1$

الحل :

$u_1 = (1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0$ ، $u_2 = (2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3$

$u_3 = (3)^2 - 1 = 9 - 1 = 8$ ، $u_4 = (4)^2 - 1 = 16 - 1 = 15$

الأزواج المرتبة : $\{(1,0),(2,3),(3,8),(4,15)\}$

---

18 $u_n = \dfrac{1}{3n+1}$

الحل :

$u_1 = \dfrac{1}{3(1)+1} = \dfrac{1}{3+1} = \dfrac{1}{4}$ ، $u_2 = \dfrac{1}{3(2)+1} = \dfrac{1}{6+1} = \dfrac{1}{7}$

$u_3 = \dfrac{1}{3(3)+1} = \dfrac{1}{9+1} = \dfrac{1}{10}$ ، $u_4 = \dfrac{1}{3(4)+1} = \dfrac{1}{12+1} = \dfrac{1}{13}$

الأزواج المرتبة : $\left\{\left(1,\frac{1}{4}\right),\left(2,\frac{1}{7}\right),\left(3,\frac{1}{10}\right),\left(4,\frac{1}{13}\right)\right\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

19 متتابعة حسابية حدها السابع فيها $\left(\frac{1}{24}\right)$ وأساسها $\left(\frac{1}{3}\right)$

الحل :

$u_7 = \dfrac{1}{24}$ ، $n = 7$ ، $d = \dfrac{1}{3}$ ، $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$\dfrac{1}{24} = a + (7-1)\left(\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{24} = a + 6 \times \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{24} = a + 2$

$a = \dfrac{1}{24} - 2 = \dfrac{1-48}{24} = \dfrac{-47}{24}$

المتتابعة : $\left\{\frac{-47}{24},\frac{-39}{24},\frac{-31}{24},\frac{-23}{24},\frac{-15}{24}\right\}$

المتتابعة : $\{19,16,13,10,7\}$

اكتب الحدود للمتتابعات الأتية :

20 جد الحدود بين u_{10} و u_{13} لمتتابعة حسابية حدها السابع $\left(\frac{13}{2}\right)$ و $d = 1$

الحل :

$$u_7 = \frac{13}{2} \quad , \quad n = 7 \quad , \quad d = 1 \quad , \quad a = ?$$
$$u_n = a + (n-1)d$$
$$\frac{13}{2} = a + (7-1)(1) \quad \Rightarrow \quad \frac{13}{2} = a + 6$$
$$a = \frac{13}{2} - 6 = \frac{13-12}{2} = \frac{1}{2}$$
$$u_{11} = \frac{1}{2} + (11-1)(1) = \frac{1}{2} + 10 = \frac{1+20}{2} = \frac{21}{2}$$
$$u_{12} = \frac{1}{2} + (12-1)(1) = \frac{1}{2} + 11 = \frac{1+22}{2} = \frac{23}{2}$$

المتتابعة : $\left\{\frac{21}{2}, \frac{23}{2}\right\}$

21 جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتتابعة حسابية حدها الثاني (0) و $d = -1$

الحل :

$$u_2 = 0 \quad , \quad n = 2 \quad , \quad d = -1 \quad , \quad a = ?$$
$$u_n = a + (n-1)d$$
$$0 = a + (2-1)(-1) \quad \Rightarrow \quad 0 = a - 1 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$
$$u_{21} = 1 + (21-1)(-1) = 1 + (20)(-1) = 1 - 20 = -19$$
$$u_{22} = 1 + (22-1)(-1) = 1 + (21)(-1) = 1 - 21 = -20 \quad \Rightarrow$$

المتتابعة : $\{-19, -20\}$

حدد نوع المتتابعة (متزايدة , متناقصة , ثابتة) لكل مما يأتي :

22 $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

الحل :

$$u_1 = 3 - 2(1) = 3 - 2 = 1 \quad , \quad u_2 = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$$
$$d = u_2 - u_1 = -1 - 1 = -2$$

المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

23 $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$

الحل :

$$u_1 = (1)^3 - 1 = 1 - 1 = 0 \quad , \quad u_2 = (2)^3 - 1 = 8 - 1 = 7$$
$$d = u_2 - u_1 = 7 - 0 = 7$$

المتتابعة متزايدة لأن : $d < 0$

24 $\{u_n\} = \left\{\frac{1}{n+1}\right\}$

الحل :

$$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \quad , \quad u_2 = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}$$
$$d = u_2 - u_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

المتتابعة متناقصة لأن : $d < 0$

25 $\{u_n\} = \frac{3n}{2}$

الحل :

$u_1 = \frac{3(1)}{2} = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{3(2)}{2} = \frac{6}{2} = 3$, $u_3 = \frac{3(3)}{2} = \frac{9}{2}$

$u_4 = \frac{3(4)}{2} = \frac{12}{2} = 6$, $u_5 = \frac{3(5)}{2} = \frac{15}{2}$

المتتابعة : $\left\{\frac{3}{2}, 3, \frac{9}{2}, 6, \frac{15}{2}\right\}$

---

26 $\{u_n\} = \sqrt{3}$

الحل :

$u_1 = \sqrt{3}$, $u_2 = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{3}$, $u_4 = \sqrt{3}$, $u_5 = \sqrt{3}$

المتتابعة : $\{\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

---

27 $\{u_n\} = \frac{n}{n+1}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $u_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$

$u_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$, $u_5 = \frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$

المتتابعة : $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}\right\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

28 رياضة الجري : في احدى مسابقات الجري سجلت أوقات الفائز الأول وفقا للجدول الآتي :

المسافة بالمتر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول . هل يمثل الجدول نمطا ؟ هل يمثل متتابعة ؟ علل اجابتك .

الحل :

الأزواج المرتبة $\{(1, 3.12), (2, 6.32), (3, 9.52), (4, 12.72), (5, 15.92)\}$

نعم يمثل نمطا لأن كل مسافة ناتجة من مقدار ثابت .

العلاقة تمثل متتابعة حسابية حدها الأول 3.12 وأساسها $d = 6.32 - 3.12 = 3.20$

المتتابعة هي : $\{3.12, 6.32, 9.52, 12.72, 15.92\}$

---

29 رياضة القفز بالزانة : يبين الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة القفز بالزانة.

المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب حدود المتتابعة وأساسها .

الحل : المتتابعة هي : {5.90,5.95,6.00,6.05,6.10}

أساس المتتابعة : $d = 5.90 - 5.95 = -0.5$

زراعة : اشترى حسان مزرعة الأبقار فيها 20 بقرة وبدأت تزداد كل سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عدده الضعف بعد مضي ست سنوات مثل المسألة بجدول واكتب حدود المتتابعة .

الحل:

$a = 20$, $u_6 = 2a = 2(20) = 40$, $n = 6$, $d = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$40 = 20 + (6-1)d \quad \Rightarrow \quad 40 = 20 + 5d$

$5d = 40 - 20 \quad \Rightarrow \quad 5d = 20 \quad , \quad d = \frac{20}{5} = 4$

$u_1 = 20$

$u_2 = u_1 + d = 20 + 4 = 24$, $u_3 = u_2 + d = 24 + 4 = 28$

$u_4 = u_3 + d = 28 + 4 = 32$, $u_5 = u_4 + d = 32 + 4 = 36$

$u_6 = u_5 + d = 36 + 4 = 40$

السنة	1	2	3	4	5	6
عدد الأبقار	20	24	28	32	36	40

المتتابعة هي $\{20, 24, 28, 32, 36, 40\}$

فـــكر

31 تحد : جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعات الحسابية كما يأتي :

i) $\{2x\ ,\ x+1\ ,\ 3x+11, \ldots\ldots\ldots\}$

الحل :

$d = u_2 - u_1 = u_3 - u_2$

$(x+1) - (2x) = (3x+11) - (x+1)$

$x + 1 - 2x = 3x + 11 - x - 1$

$-x + 1 = 2x + 10$

$2x + x = 1 - 10 \quad \Rightarrow \quad 3x = -9 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-9}{3} = -3$

32 أصحح الخطأ : قالت رابحة أن المتتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متتابعة متزايدة لأن $d > 0$ اكتشف خطأ رابحة وصححه .

الحل :

$u_1 = 8 - 2(1) = 8 - 2 = 6 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 8 - 2(2) = 8 - 4 = 4$

$d = u_2 - u_1 = 4 - 6 = -2$

المتتابعة متناقصة لأن $d < 0$

33 حس عددي : ما هو الحد الحادي عشر لمتتابعة حدها الثالث 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$ ؟

الحل :

$u_{11}=?\quad n=11\quad ,\quad u_3=4\quad ,\quad n=3\quad ,\quad d=-\frac{1}{2}\quad ,\quad a=?$

$u_n=a+(n-1)d$

$4=a+(3-1)\left(-\frac{1}{2}\right)\quad\Rightarrow\quad 4=a+(2)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$4=a-1\quad\Rightarrow\quad a=4+1=5$

$u_{11}=5+(11-1)\left(-\frac{1}{2}\right)=5+(10)\left(-\frac{1}{2}\right)=5-5=0$

اكتب الحد الذي ترتيبه 200 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس (−4) وأساسها 12

الحل :

$u_{200}=?\quad ,\quad n=200\quad ,\quad u_5=-4\quad ,\quad n=5\quad ,\quad d=12\quad ,\quad a=?$

$u_n=a+(n-1)d$

$u_5=a+(5-1)(12)\quad\Rightarrow\quad -4=a+(4)(12)$

$-4=a+48\quad\Rightarrow\quad a=-4-48=-52$

$u_{200}=-52+(200-1)(12)=-52+(199)(12)=-52+2388=2336$

المتباينات المركبة

المتباينات المركبة التي تتضمن (و)

المتباينة المركبة التي تحتوي (و) مؤلفة من متباينتين فأنها تكون صحيحة فقط اذا كانت المتباينتان صحيحتين وعليه فأن مجموعة الحل عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين ويمكن ايجاده بطريقتين :

الطريقة الأولى : بيانيا بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع .

الطريقة الثانية : جبريا وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما $(S=S_1\cap S_2)$

ملاحظة : تحتوي المتباينة على الرمز $<,>,\leq,\geq$

لاحظ عزيزي الطالب ان كنت تواجه مشكلة في قراءة رموز المتباينة .

لاحظ > هذه العلامة تقرأ اكبر وممكن قراءتها ازغر من الاتجاه الثاني أي ان ⟵ تقرأ اكبر

اما ⟵ تقرأ ازغر أي عندما تقرأ باتجاه الفكين تقرأ اكبر وعكسها ازغر

طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و)

1) التخلص من الكسور والأقواس أن وجدت .
2) وضع المتغير في الوسط .
3) اذا كان هناك عدد مع المتغير تفصل بينهما عملية الجمع أو الطرح فنقوم بنقل العدد الى طرفي المتباينة مع تغير الإشارة .
4) اذا كان المتغير يحتوي على معامل فنقوم بقسمة اطراف المتباينة على معامل المتغير .
5) نجد مجموعة حل المتباينة المركبة وذلك بطريقتين :

الأولى : بيانيا تتم تجزئة المتباينة الى جزئين ونحل كل جزء على حدة ونستخرج مجموعة الحل ومجموعة حل الجزء الاخر .

6) نجد تقاطع مجموعة الحلين على خط الأعداد حيث أن التقاطع يمثل مجموعة حل المتباينة المركبة .
7) **طريقة الثانية جبريا هو** أن الجزء الأول من المتباينة يرمز له S_1 والجزء الثاني يرمز له S_2 ومنها نجد $S = S_1 \cap S_2$

مثال تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت

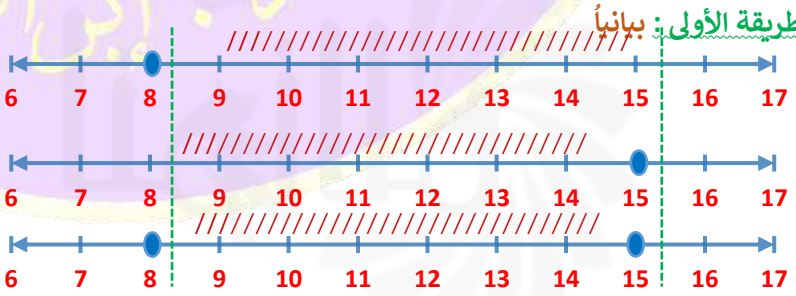
درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول $8°C$ ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى $15°C$. اكتب متباينة

تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها

الحل : درجة الحرارة (الصغرى) لا تقل عن 8° : $(x \geq 8^\circ)$, درجة الحرارة (الكبرى) لا تزيد عن 15° : $(x \leq 15^\circ)$

الطريقة الأولى : بيانياً

$x \geq 8$
$x \leq 15$
$8 \leq x \leq 15$



الطريقة الثانية : جبرياً

$8 \leq x \leq 15 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 8$ و $x \leq 15$
$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 8\} \cap \{x : x \leq 15\}$

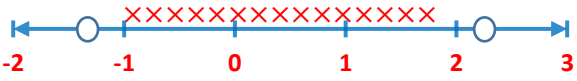
مثال حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) : $-3 \leq 3x + 2 < 9$ جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد .

الحل :

$-3 \leq 3x + 2 < 9 \quad \Rightarrow \quad -3 - 2 \leq 3x < 9 - 2$

$-5 \leq 3x < 7 \quad \} \div 3 \quad \Rightarrow \quad \frac{-5}{3} \leq \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$

$\frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{ x : \frac{-5}{3} \leq x < \frac{7}{3} \right\}$



المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

طريقة حل المتباينة هي نفس طريقة حل المتباينة المركبة التي تتضمن أداة الربط (و) لكن بدل ان نأخذ مجموعة تقاطع الجزئيين نأخذ مجموعة اتحاد الجزئيين $S = S_1 \cup S_2$

مثال حل المتباينة المركبة $x + 3 > 2$ أو $x + 3 \leq -2$ بيانيا وجبريا .

الحل : الطريقة الأولى : بيانياً

$x + 3 > 2 \quad \Rightarrow \quad x > 2 - 3$

$x > -1$

$x + 3 \leq -2 \quad \Rightarrow \quad x \leq -2 - 3$

$x \leq -5$

$x \leq -5 \quad$ أو $\quad x > -1$

الطريقة الثانية : جبرياً

$x + 3 \leq -2 \quad$ أو $\quad x + 3 > 2$

$x \leq -2 - 3 \quad$ أو $\quad x > 2 - 3$

$x \leq -5 \quad$ أو $\quad x > -1 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -1\} \cup \{x : x \leq -5\}$

مثال حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

i) $y - 3 \leq -1$ أو $y + 3 > 6$

SOL : $y \leq -1 + 3 \quad$ أو $\quad y > 6 - 3 \quad \Rightarrow \quad y \leq 2 \quad$ أو $\quad y > 3$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq 2\} \cup \{y : y > 3\}$

ii) $\frac{2v + 1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v + 1}{3} < \frac{1}{3} \quad \} \times 3$

SOL:

$\frac{2v + 1}{3} \times 3 > \frac{5}{3} \times 3$ أو $\frac{2v + 1}{3} \times 3 < \frac{1}{3} \times 3$

$2v + 1 > 5 \quad$ أو $\quad 2v + 1 < 1 \quad \Rightarrow \quad 2v > 5 - 1 \quad$ أو $\quad 2v < 1 - 1$

$2v > 5 - 1 \quad$ أو $\quad 2v < 1 - 1 \quad \Rightarrow \quad 2v > 4 \quad$ أو $\quad 2v < 0$

$\frac{2v}{2} > \frac{4}{2}$ أو $\frac{2v}{2} < \frac{0}{2}$

$v > 2$ أو $v < 0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{v : v > 2\} \cup \{v : v < 0\}$

المتباينة المثلثية

في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث . اذا كانت اطوال اضلاع المثلث (A , B , C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث صحيحة :

$A + B > C$ ، $A + C > B$ ، $B + C > A$

مثال هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها $13cm , 10cm , 2cm$ أن تشكل مثلثا ؟

الحل :

$2 + 10 \not> 13 \Rightarrow 12 \not> 13$ خطأ لأن 12 أصغر من 13

$2 + 13 > 10 \Rightarrow 15 > 10$ صحيحة

$10 + 13 > 2 \Rightarrow 23 > 2$ صحيحة

لا يمكن أن يشكل مثلثا .

مثال اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه $10cm , 8cm$

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $10 , 8 , x$

$10 + 8 > x \Rightarrow 18 > x$ الضلع الثالث أصغر من 18

$10 + x > 8 \Rightarrow x > 8 - 10 \Rightarrow x > -2$ يهمل

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 8 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 18$ أو تكتب : $18 > x > 2$

تأكد من فهمك

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

1 $-4 \leq y - 1 < 3$

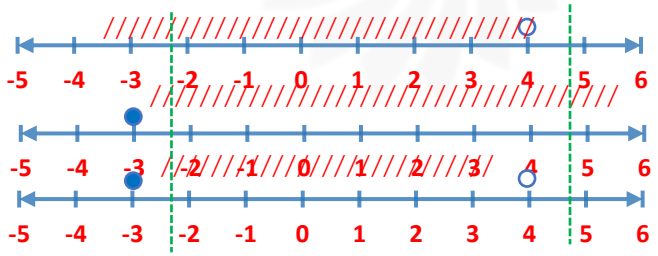
$-4 + 1 \leq y < 3 + 1 \Rightarrow -3 \leq y < 4$

$y < 4$

$y \geq -4$

$-3 \leq y < 4$

الحل :



2 $-4 \leq Z+2 \leq 8$

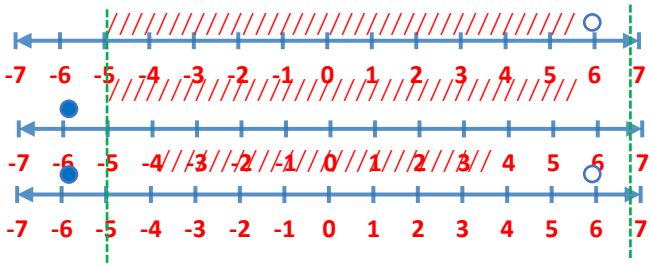
الحل :

$-4-2 \leq Z < 8-2 \Rightarrow -6 \leq Z < 6$

$Z < 6$

$Z \geq -6$

$-6 \leq Z < 6$

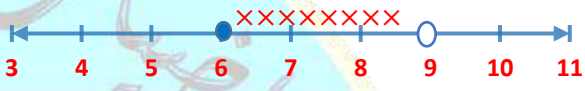


حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

3 $x+6 < 15$ و $x+6 \geq 12$

الحل :

$x < 15-6$ و $x \geq 12-6 \Rightarrow x < 9$ و $x \geq 6$



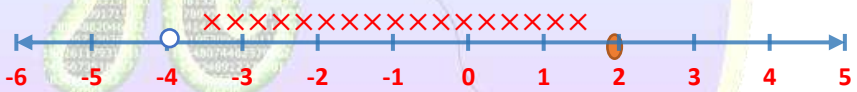
$S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \geq 6\} \cap \{x: x < 9\} = \{x : 6 \leq x < 9\}$

إكتب المعادلة هنا

4 $-9 < 2x-1 \leq 3$

SOL : $-9+1 < 2x \leq 3+1 \Rightarrow -8 < 2x < 4$ $\div 2$

$\frac{-8}{2} < \frac{2x}{2} \leq \frac{4}{2} \Rightarrow -4 < x \leq 2 \Rightarrow S = \{x : -4 < x \leq 2\}$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا

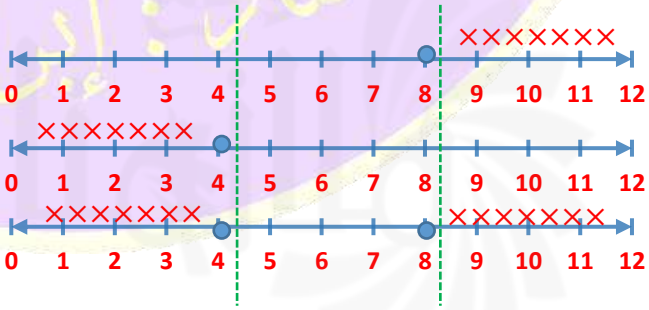
5 $8y \geq 64$ أو $8y \leq 32$ $\div 8$

الحل :

$\frac{8y}{8} \geq \frac{64}{8} \Rightarrow y \geq 8$

$8 \quad \frac{8y}{8} \leq \frac{32}{8} \Rightarrow y \leq 4$

$y \geq 8$ أو $y \leq 4$



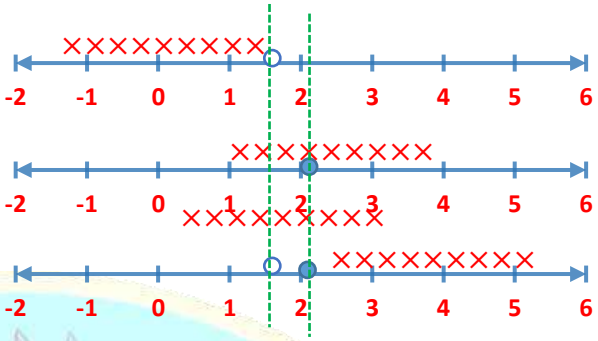
6 $\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9}$

الحل :

$\frac{2Z}{3} < \frac{2}{3} \} \times 3 \Rightarrow 2Z < 2 \} \div 2 \Rightarrow Z < 1$

$\frac{2Z}{3} \geq \frac{8}{9} \} \times 9 \Rightarrow 6Z \geq 8 \} \div 6 \Rightarrow Z \geq \frac{8}{6}$

$Z \geq \frac{4}{3} \Rightarrow Z < 1$ أو $Z \geq \frac{4}{3}$



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

7 $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \leq -9$

الحل :

$3n > -5 + 7$ أو $3n \leq -9 + 7$

$3n > 2$ أو $3n \leq -2 \Rightarrow \frac{3n}{3} > \frac{2}{3}$ أو $\frac{3n}{3} \leq \frac{-2}{3}$

$n > \frac{2}{3}$ أو $n \leq \frac{-2}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{n : n > \frac{2}{3}\right\} \cup \left\{n : n \leq \frac{-2}{3}\right\}$

8 $x + 15 \geq 30$ أو $x + 15 < 22$

الحل :

$x \geq 30 - 15$ أو $x < 22 - 15$

$x \geq 15$ أو $x < 7$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 15\} \cup \{x : x < 7\}$

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي :

9 1 cm ، 2cm ، $\sqrt{3}$ cm

الحل :

$1 + 2 > \sqrt{3} \Rightarrow 3 > \sqrt{3}$ صحيحة

$1 + \sqrt{3} > 2 \Rightarrow 1 + 1.7 > 2 \Rightarrow 2.7 > 2$ صحيحة

$2 + \sqrt{3} > 1 \Rightarrow 2 + 1.7 > 1 \Rightarrow 3.7 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

10 5cm ، 4cm ، 9cm

الحل :

$5 + 4 \not> 9 \Rightarrow 9 \not> 9$ خطأ لأن 9 ليس أكبر من 9

$5 + 9 > 4 \Rightarrow 14 > 4$ صحيحة

$4 + 9 > 5 \Rightarrow 13 > 5$ صحيحة $\Rightarrow$ لا يمكن رسم مثلثاً

لم تحقق شرط المثلث

11 $1cm$ ، $\sqrt{2}cm$ ، $\sqrt{2}cm$

الحل :

$1+\sqrt{2}>\sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2}=1.4$

$\sqrt{2}+\sqrt{2}>1$ صحيحة

$\sqrt{2}+1>\sqrt{2}$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

12 $3cm$ ، $4cm$ ، $\sqrt{3}cm$

الحل :

$3+4>\sqrt{3} \Rightarrow 7>\sqrt{3}$ صحيحة لأن $\sqrt{3}=1.7$

$3+\sqrt{3}>4 \Rightarrow 3+1.7>4 \Rightarrow 4.7>4$ صحيحة

$4+\sqrt{3}>3 \Rightarrow 4+1.7>3 \Rightarrow 5.7>3$ صحيحة $\Rightarrow$ يمكن رسم مثلث

تدرب وحل التمرينات

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانيا :

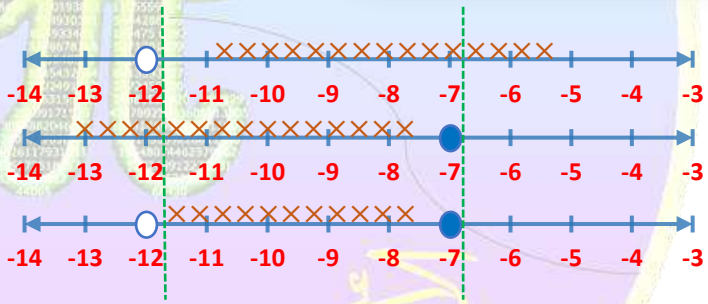
13 $x>-12$ و $x\leq -7$

الحل :

$x>-12$

$x\leq -7$

$x>-12$ و $x\leq -7$



14 $2\leq y+4<6$

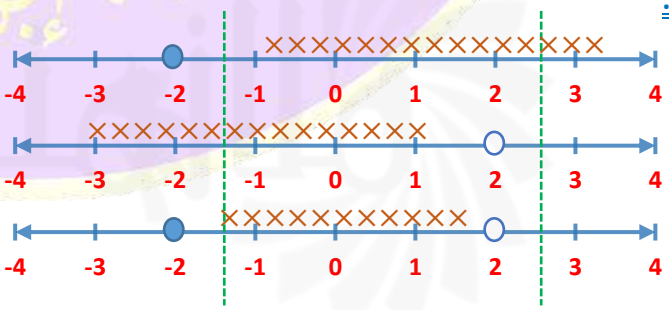
الحل :

$2-4\leq y<6-4 \Rightarrow -2\leq y<2$

$y\geq -2$

$y<2$

$-2\leq y<2$



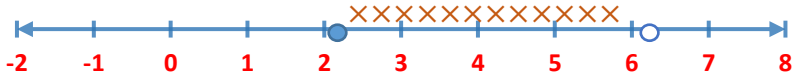
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

15 $14 \leq 3x+7$ و $3x+7<26$

الحل :

$14-7 \leq 3x$ و $3x < 26-7$

$7 \leq 3x$ و $3x<19$ $\} \div 3$



$\frac{7}{3} \leq \frac{3x}{3}$ و $\frac{3x}{3} < \frac{19}{3}$

$\frac{7}{3} \leq x$ و $x < \frac{19}{3}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cap S_2 = \left\{x : \frac{7}{3} \leq x\right\} \cap \left\{x : x < \frac{19}{3}\right\}$

16 $\frac{1}{25} \leq \frac{Z+3}{5} \leq \frac{1}{15}$ $\} \times 75$

الحل :

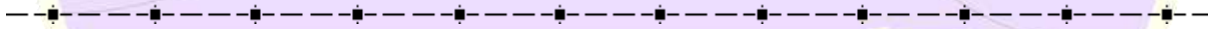
$\frac{1}{15} \times 75 \geq \frac{Z+3}{5} \times 75 \geq \frac{1}{25} \times 75$

$5 \geq 15(Z+3) \geq 3$ $\Rightarrow$ $5 \geq 15Z+45 \geq 3$ $\Rightarrow$ $5-45 \geq 15Z \geq 3-45$

$-40 \geq 15Z \geq -42$ $\} \div 15$ $\Rightarrow$ $\frac{-40}{15} \geq \frac{15Z}{15} \geq \frac{-42}{15}$

$\frac{-8}{3} \geq Z \geq \frac{-14}{5}$ $\Rightarrow$ $S = \left\{Z : \frac{-8}{3} \geq Z \geq \frac{-14}{5}\right\}$

5	15 , 5 , 25
5	3 , 1 , 5
3	3 , 1 , 1
75	1 , 1 , 1



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانيا :

17 $Z-2>4$ أو $Z-2<-7$

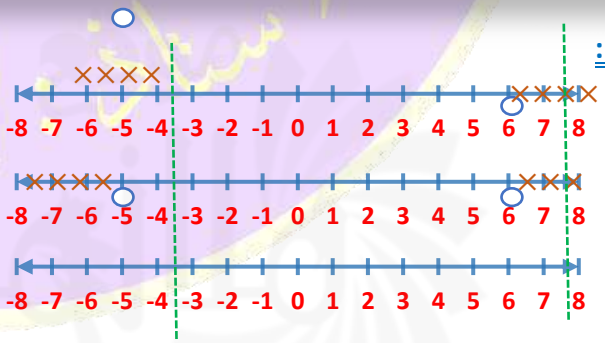
الحل :

$Z > 4+2$ أو $Z < -7+2$ $\Rightarrow$ $Z > 6$ أو $Z < -5$

$Z > 6$

$Z < -5$

$Z > 6$ أو $Z < -5$



18 $x-6\leq -1$ أو $x-6>4$

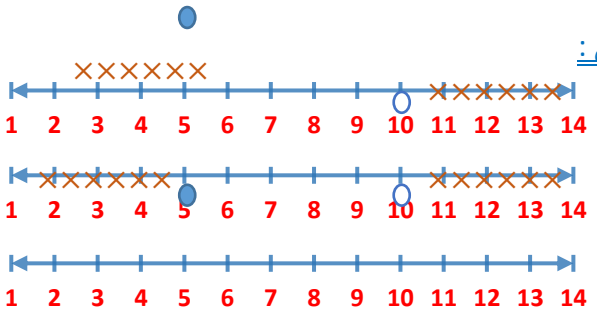
$x\leq -1+6$ أو $x>4+6 \Rightarrow x\leq 5$ أو $x>10$

$x\leq 5$

$x>10$

$x\leq 5$ أو $x>10$

الحل :



حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

19 $x+8<22$ أو $x+10\geq 30$

الحل :

$x<22-8$ أو $x\geq 30-10$

$x<14$ أو $x\geq 20$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x<14\}\cup\{x:x\geq 20\}$

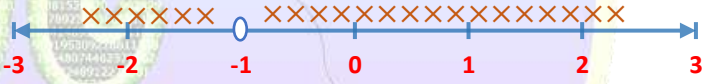
20 $y<-1$ أو $y+3>2$

الحل :

$y<-1$ أو $y>2-3$

$y<-1$ أو $y>-1$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y<-1\}\cup\{y:y>-1\}$



21 $\frac{y}{2}<3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2}>7\frac{1}{2}$

الحل :

$\frac{y}{2}<\frac{7}{2}$ أو $\frac{y}{2}>\frac{15}{2}$ $\}\times 2$

$y<7$ أو $y>15$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y<7\}\cup\{y:y>15\}$

22 $5x\leq -1$ أو $5x\geq 4$ $\}\div 5$

الحل :

$x\leq \frac{-1}{5}$ أو $x\geq \frac{4}{5}$

$S=S_1\cup S_2=\left\{x:x\leq \frac{-1}{5}\right\}\cup\left\{x:x\geq \frac{4}{5}\right\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث اذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين :

23 3cm , 10cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث $3 , 10 , x$

$3 + 10 > x \Rightarrow 13 > x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$10 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 10 \Rightarrow x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$3 + x > 10 \Rightarrow x > 10 - 3 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 13$

---

24 6cm , 4cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث $6 , 4 , x$

$6 + 4 > x \Rightarrow 10 > x$ الضلع الثالث أصغر من 10

$6 + x > 4 \Rightarrow x > 4 - 6 \Rightarrow x > -2$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4 + x > 6 \Rightarrow x > 6 - 4 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 10$

25 1cm , 3cm

الحل :

نفرض طول الضلع الثالث x ⟸ اطوال اضلاع المثلث $1 , 3 , x$

$1 + 3 > x \Rightarrow 4 > x$ الضلع الثالث أصغر من 4

$3 + x > 1 \Rightarrow x > 1 - 3 \Rightarrow x > -2$ لا يعطي معلوات مفيدة

$1 + x > 3 \Rightarrow x > 3 - 1 \Rightarrow x > 2$ الضلع الثالث اكبر من 2

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $2 < x < 4$

تدرب وحل مسائل حياتية

26 صوت : أذن الأنسان يمن أن تسمع الأصوات التي لا يقل ترددها عن 20 هيرتزا ولا يزيد عن 20000 هيرتز اكتب المتباينة المركبة تمثل الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان ومثلها بيانيا .

الحل : نفرض التردد x

الترددات التي تسمعها أذن الأنسان هي أكبر أو يساوي 20 وأصغر أو يساوي 20000 تكتب $20 \leq x \leq 20000$

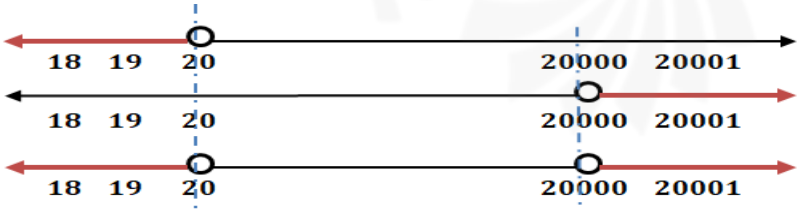
الترددات التي لا تسمعها أذن الأنسان هي أصغر من 20 واكبر من 20000 وتكتب :

$x < 20$ أو $x > 20000$

$x < 20$

$x > 20000$

$x < 20$ أو $x > 20000$



27 اطار السيارات : ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لا يقل عن $36\ pascal$ ولا يزيد على $28\ pascal\ (kg/ing^2)$. اكتب المتباينة المركبة تمثل الضغط ومثلها بيانيا .

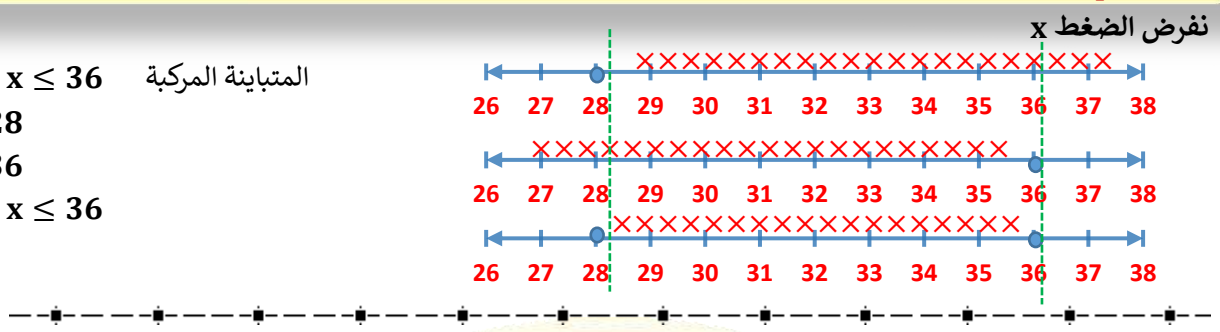
الحل : نفرض الضغط x

المتباينة المركبة $28 \leq x \leq 36$

$x \geq 28$

$x \leq 36$

$28 \leq x \leq 36$



28 قطار المغناطيسي : القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف . وصممت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم اذ أن سرعتها لا تقل عن $300\ k/h$ ولا تزيد على $550\ k/h$ اكتب متباينة تمثل سرعة القطار ومثلها بيانيا .

الحل : نفرض سرعة القطار x

$300 \leq x \leq 550$ المتباينة

$x \geq 300$

$x \leq 550$

$300 \leq x \leq 550$

فكر

29 تحد : اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كل مثلث :

i) $7cm$, $12cm$, xcm

الحل :

$7 + 12 > x \Rightarrow 19 > x$ الضلع الثالث أصغر من 19

$12 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 12 \Rightarrow x > -5$ لا تعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 7 \Rightarrow x > 5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5 < x < 19$

30 أصحح الخطأ : قالت سوسن أن المتباينة المركبة $x + 3 \leq 5$ و $-4 < x + 3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد

الآتية :

بين خطأ سوسن وصححه .

الحل :

$-4 - 3 < x$ و $x \leq 5 - 3$

$-7 < x$ و $x \leq 2$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x > -7\} \cap \{x : x \leq 2\} = \{x : -7 < x \leq 2\}$

31 حس عددي : اذكر ما اذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا ؟ وضح اجابتك .

1 $3.2cm$ ، $5.2cm$ ، $6.2cm$

الحل :

$3.2 + 5.2 > 6.2 \Rightarrow 8.4 > 6.2$ صحيحة

$3.2 + 6.2 > 5.2 \Rightarrow 9.4 > 5.2$ صحيحة

$5.2 + 6.2 > 3.2 \Rightarrow 11.4 > 3.2$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

2 $1cm$ ، $1cm$ ، $\sqrt{2}\,cm$

الحل :

$1 + 1 > \sqrt{2} \Rightarrow 2 > \sqrt{2}$ صحيحة لأن $\sqrt{2} = 1.4$

$1 + \sqrt{2} > 1 \Rightarrow 1 + 1.4 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1$ صحيحة

$\sqrt{2} + 1 > 1 \Rightarrow 1.4 + 1 > 1 \Rightarrow 2.4 > 1$ صحيحة $\Rightarrow$ الأطوال الثلاثة تمثل مثلث

أكتب متباينة مركبة تمثل درجة الحرارة الصغرى $18°$ ودرجة الحرارة العظمى $27°$

الحل : نفرض درجة الحرارة x

$x > 18° \quad$ و $\quad x < 27° \Rightarrow S = \{x : 18° < x < 27°\}$

متباينات القيمة المطلقة

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$ حيث $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و). بصورة عامة :

$$|g(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq g(x) \leq a \quad , \quad a > 0$$
$$|g(x)| < a \Rightarrow -a < g(x) < a \quad , \quad a > 0$$

مثال فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة . درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة . اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثله بيانياً .

الحل : نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية .

$x \geq 25 - 1 \quad$ و $\quad x \leq 25 + 1$

$x - 25 \geq -1$ و $x - 25 \leq 1 \Rightarrow |x - 25| \leq 1$

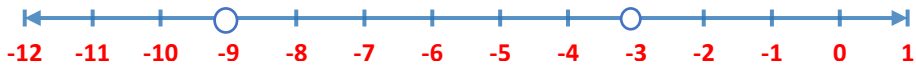
مثال // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1 $|x + 6| < 3$

الحل :

$-3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3 - 6 < x < 3 - 6 \Rightarrow -9 < x < -3$

$S = \{x : -9 < x < -3\}$



2 $|y| - 5 \leq 1$

$|y| \leq 1 + 5 \quad \Rightarrow \quad |y| \leq 6 \quad \Rightarrow \quad -6 \leq y \leq 6$

$S = \{y : -6 \leq y \leq 6\}$

مثال جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية :

1 $|2x - 5| + 3 < 11$

الحل :

$|2x - 5| < 11 - 3 \quad \Rightarrow \quad |2x - 5| < 8 \quad \Rightarrow \quad -8 < 2x - 5 < 8$

$-8 + 5 < 2x < 8 + 5 \quad \Rightarrow \quad -3 < 2x < 13 \; \} \div 2$

$\frac{-3}{2} < \frac{2x}{2} < \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{-3}{2} < x < \frac{13}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{x : \frac{-3}{2} < x < \frac{13}{2}\right\}$

2 $|7 - y| < 8$

الحل :

$-8 < 7 - y < 8 \quad \Rightarrow \quad -8 - 7 < -y < 8 - 7$

$-15 < -y < 1 \;] \times (-1)$

$-1 < y < 15 \quad \Rightarrow \quad S = \{y : -1 < y < 15\}$

متباينات القيمة المطلقة التي على الصورة $|g(x)| > a$, $|g(x)| \geq a$ حيث $a \in R$

متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي متباينة مركبة تتضمن(أو). بصورة عامة :

$|g(x)| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad g(x) \geq a$ أو $g(x) \leq -a \quad , \; a > 0$

$|g(x)| > a \quad \Leftrightarrow \quad g(x) > a$ أو $g(x) < -a \quad , \; a > 0$

مثال حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1 $|x + 4| > 2$

الحل :

$x + 4 > 2$ أو $x + 4 < -2 \quad \Rightarrow \quad x > 2 - 4$ أو $x < -2 - 4$

$x > -2$ أو $x < -6$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > -2\} \cup \{x : x < -6\}$

2 $|5y - 1| \geq 4$

الحل :

$5y - 1 \geq 4$ أو $5y - 1 \leq -4$

$5y \geq 4 + 1$ أو $5y \leq -4 + 1$

$5y \geq 5$ أو $5y \leq -3 \quad \Rightarrow \quad \frac{5y}{5} \geq \frac{5}{5}$ أو $\frac{5y}{5} \leq -\frac{3}{5}$

$y \geq 1$ أو $y \leq -\frac{3}{5}$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \geq 1\} \cup \left\{y : y \leq -\frac{3}{5}\right\}$

مثال جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية :

1) $\left|\frac{5-3v}{2}\right| \geq 6$

الحل :

$\frac{5-3v}{2} \geq 6$ أو $\frac{5-3v}{2} \leq -6$ $\} \times 2$

$5-3v \geq 12$ أو $5-3v \leq -12$

$-3v \geq 12-5$ أو $-3v \leq -12-5$

$-3v \geq 7$ أو $-3v \leq -17$ $\} \div (-3)$

$v \leq -\frac{7}{3}$ أو $v \geq \frac{17}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{v\, v \leq -\frac{7}{3}\right\} \cup \left\{v : v \geq \frac{17}{3}\right\}$

1) $\left|\frac{2t-8}{4}\right| \geq 9$

الحل :

$\frac{2t-8}{4} \geq 9$ أو $\frac{2t-8}{4} \leq -9$ $\} \times 4$

$2t-8 \geq 36$ أو $2t-8 \leq -36$

$2t \geq 36+8$ أو $2t \leq -36+8$

$2t \geq 44$ أو $2t \leq -28$ $\} \div 2$

$t \geq 22$ أو $t \leq -14$

$S = S_1 \cup S_2 = \{t : t \geq 22\} \cup \{t : t \leq -14\}$

مثال في تحليلات دم الأنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو $(3.5 - 5.3)\ mol/L$. اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الأنسان .

الحل :

نفرض البوتاسيوم x

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي : $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واكبر من القيمة العليا للمعدل هي : $x > 5.3$

المتباينة المركبة : $x > 5.3$ أو $x < 3.5$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم

نجد منتصف المسافة بين النقطتين : $\frac{3.5+5.3}{2} = \frac{8.8}{2} = 4.4$

نطرح نصف قطر المسافة من المتباينة :

$x > 5.3$ أو $x < 3.5 \implies x - 4.4 > 5.3 - 4.4$ أو $x - 4.4 < 3.5 - 4.4$

$x - 4.4 > 0.9$ أو $x - 4.4 < -0.9 \implies |x - 4.4| > 0.9$

تأكد من فهمك

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية :

4) تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22° سيليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز 2° سيليزية .

الحل :

نفرض درجة الحرارة x

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x \leq 22+2$ و $x \geq 22-2$

$x - 22 \leq 2$ و $x - 22 \geq -2$

$|x - 22| \leq 2$

2 الزاوية القائمة تتحول الى زاوية حادة أو منفرجة اذا تحرك مؤشر الزاوية الى اليمين أو الى اليسار في الأقل درجة واحدة .

الحل :

نفرض الزاوية x قياس الزاوية القائمة 90

المتباينة المركبة تكون بالصورة :

$x \geq 90 - 1$ و $x \leq 90 + 1$

$x - 90 \geq -1$ و $x - 90 \leq 1$ $\Rightarrow$ $|x - 90| \leq 1$

حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

3 $|x + 1| < 5$

الحل :

$-5 < x + 1 < 5 \Rightarrow -5 - 1 < x < 5 - 1$

$-6 < x < 4 \Rightarrow S = \{x : -6 < x < 4\}$

---

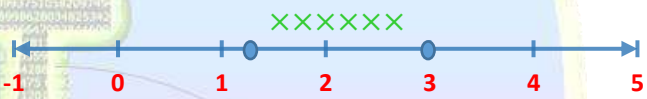
4 $|3Z - 7| \leq 2$

الحل :

$-2 \leq 3Z - 7 \leq 2 \Rightarrow -2 + 7 \leq 3Z \leq 2 + 7$

$5 \leq 3Z \leq 9 \} \div 3 \Rightarrow \frac{5}{3} \leq \frac{3Z}{3} \leq \frac{9}{3}$

$\frac{5}{3} \leq Z \leq 3 \Rightarrow S = \left\{Z : \frac{5}{3} \leq Z \leq 3\right\}$



---

5 $|x| + 8 < 9$

الحل :

$|x| < 9 - 8 \Rightarrow |x| < 1$

$-1 < x < 1 \Rightarrow S = \{x : -1 < x < 1\}$

6 $|5y| - 2 \leq 8$

الحل :

$|5y| \leq 8 + 2 \Rightarrow |5y| \leq 10$

$-10 \leq 5y \leq 10 \} \div 5 \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$

$S = \{y : -2 \leq y \leq 2\}$

7 $|x+4|>6$

الحل :

$x+4>6$ أو $x+4<-6$ $\Rightarrow$ $x>6-4$ أو $x<-6-4$

$x>2$ أو $x<-10$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x>2\}\cup\{x:x<-10\}$

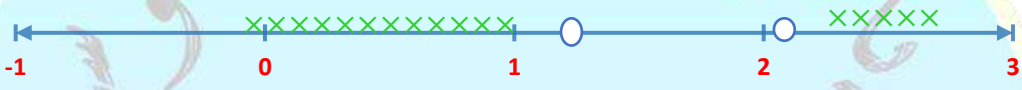
---

8 $|5Z-9|>1$

الحل :

SOL : $5Z-9>1$ أو $5Z-9<-1$ $\Rightarrow$ $5Z>1+9$ أو $5Z<-1+9$

$5Z>10$ أو $5Z<8$ $\}\div 5$ $\Rightarrow$ $Z>2$ أو $Z<\frac{8}{5}$ $\Rightarrow$ $S=S_1\cup S_2=\{Z:Z>2\}\cup\left\{Z:Z<\frac{8}{5}\right\}$



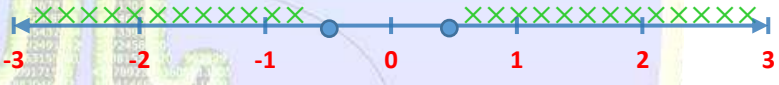
---

9 $|2x|+7\geq 8$

الحل :

$|2x|\geq 8-7$ $\Rightarrow$ $|2x|\geq 1$

$2x\geq 1$ أو $2x\leq -1$ $\}\div 2$



$x\geq\frac{1}{2}$ أو $x\leq-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $S=S_1\cup S_2=\left\{x:x\geq\frac{1}{2}\right\}\cup\left\{x:x\leq-\frac{1}{2}\right\}$

---

10 $|4y|-2>3$

الحل :

$|4y|>3+2$ $\Rightarrow$ $|4y|>5$

$4y>5$ أو $4y<-5$ $\}\div 4$

$y>\frac{5}{4}$ أو $y<\frac{-5}{4}$ $\Rightarrow$ $S=S_1\cup S_2=\left\{y:y>\frac{5}{4}\right\}\cup\left\{y:y<\frac{-5}{4}\right\}$

---

11 $|5-x|<10$

الحل :

$-10<5-x<10$ $\Rightarrow$ $-10-5<-x<10-5$

$-15<-x<5$ $]\times(-1)$

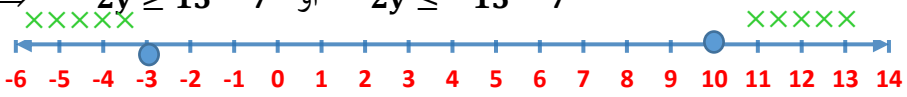
$15>x>-5$ $\Rightarrow$ $S=\{x:15>x>-5\}$

12 $|7-2y| \geq 13$

الحل :

$y-2y \geq 13$ أو $7-2y \leq -13$ $\Rightarrow$ $-2y \geq 13-7$ أو $-2y \leq -13-7$

$-2y \geq 6$ أو $-2y \leq -20$ $\} \div (-2)$



$y \leq -3$ أو $y \geq 10$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 10\}$

13 $|4Z-14| > 2$

الحل :

$4Z-14 > 2$ أو $4Z-14 < -2$ $\Rightarrow$ $4Z > 2+14$ أو $4Z < -2+14$

$4Z > 16$ أو $4Z < 12$ $\} \div 4$

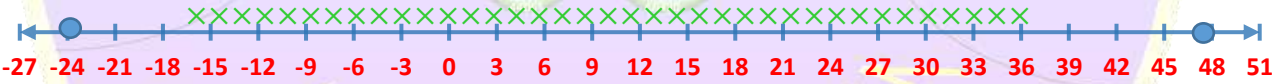
$Z > 4$ or $Z < 3$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z > 4\} \cup \{Z : Z < 3\}$

14 $\left|\frac{x-12}{4}\right| \leq 9$

الحل :

$-9 \leq \frac{x-12}{4} \leq 9$ $\} \times 4$ $\Rightarrow$ $-36 \leq x-12 \leq 36$

$-36+12 \leq x \leq 36+12$ $\Rightarrow$ $-24 \leq x \leq 48$ $\Rightarrow$ $S = \{x : -24 \leq x \leq 48\}$



15 $\left|\frac{6-2y}{4}\right| \geq 9$

الحل :

$\frac{6-2y}{4} \geq 9$ أو $\frac{6-2y}{4} \leq -9$ $\} \times 4$ $\Rightarrow$ $6-2y \geq 36$ أو $6-2y \leq -36$

$-2y \geq 36-6$ أو $-2y \leq -36-6$ $\Rightarrow$ $-2y \geq 30$ أو $-2y \leq -42$ $\} \div (-2)$

$y \leq -15$ أو $y \geq 21$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -15\}$

تدرب وحل التمرينات

كتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية :

16 يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة $8°$ سليزية بزيادة أو نقصان لا يتجاوز $0.5°$ سليزية . اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة .

الحل : نفرض درجة الحرارة المثالية x

$x \geq 8 - 0.5$ و $x \leq 8 + 0.5$

$x - 8 \geq -0.5$ و $x - 8 \leq 0.5$

$0.5 \leq x - 8 \leq 0.5 \quad \Rightarrow \quad |x - 8| \leq 0.5$

17 درجة غليان الماء $100°$ سليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لا يتجاوز $20°$ سليزية . اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء .

الحل : نفرض درجة غليان الماء x

$x \geq 100 - 20$ و $x \leq 100 + 20$

$x - 100 \geq -20$ و $x - 100 \leq 20 \quad \Rightarrow \quad -20 \leq x - 100 \leq 20$

$|x - 100| \leq 20$

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

17 $|x + 3| < 6$

الحل :

$-6 < x + 3 < 6 \quad \Rightarrow \quad -6 - 3 < x < 6 - 3$

$-9 < x < 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -9 < x < 3\}$

18 $|x| - 6 < 5$

الحل :

$|x| < 5 + 6 \quad \Rightarrow \quad |x| < 11$

$-11 < x < 11 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -11 < x < 11\}$

19 $|2Z| - 5 < 2$

الحل :

$|2Z| < 2 + 5 \quad \Rightarrow \quad |2Z| < 7 \quad \Rightarrow \quad -7 < 2Z < 7 \} \div 2$

$\frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{Z : \frac{-7}{2} < Z < \frac{7}{2}\right\}$

https://www.youtube.com/channel/UCBhMweKzALgVz5Eh7ibFzdw?view_as=subscriber

20 $|y-3| \geq \frac{1}{3}$

الحل :

$y-3 \geq \frac{1}{3}$ أو $y-3 \leq -\frac{1}{3}$ $\} \times 3$

$3y-9 \geq 1$ أو $3y-9 \leq -1$

$3y \geq 1+9$ أو $3y \leq -1+9$ $\Rightarrow$ $3y \geq 10$ أو $3y \leq 8$ $\} \div 3$

$y \geq \frac{10}{3}$ أو $y \leq \frac{8}{3}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \geq \frac{10}{3}\right\} \cup \left\{y : y \leq \frac{8}{3}\right\}$

---

21 $2|x|-7 \geq 1$

الحل :

$2|x| \geq 1+7$ $\Rightarrow$ $2|x| \geq 8$ $\} \div 2$

$|x| \geq 4$ $\Rightarrow$ $x \geq 4$ أو $x \leq -4$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \geq 4\} \cup \{x : x \leq -4\}$

---

22 $|9y|-6 > 3$

الحل :

$|9y| > 3+6$ $\Rightarrow$ $|9y| > 9$ $\Rightarrow$ $9y > 9$ أو $9y < -9$ $\} \div 9$

$y > 1$ أو $y < -1$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{y : y > 1\} \cup \{y : y < -1\}$

---

23 $|11Z|-2 \geq 9$

الحل :

$|11Z| \geq 9+2$ $\Rightarrow$ $|11Z| \geq 11$ $\Rightarrow$ $11Z \geq 11$ أو $11Z \leq -11$ $\} \div 11$

$Z \geq 1$ أو $Z \leq -1$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \{Z : Z \geq 1\}$

---

24 $|1-x| < 1$

الحل :

$-1 < 1-x < 1$ $\Rightarrow$ $-1-1 < -x < 1-1$ $\Rightarrow$ $-2 < -x < 0$ $\} \times (-1)$

$0 < x < 2$ $\Rightarrow$ $S = \{x : 0 < x < 2\}$

---

25 $\left|\frac{4}{5}Z-1\right| > \frac{4}{5}$

الحل :

$\frac{4}{5}Z-1 > \frac{4}{5}$ أو $\frac{4}{5}Z-1 < -\frac{4}{5}$ $\} \times 5$

$4Z-5 > 4$ أو $4Z-5 < -4$ $\Rightarrow$ $4Z > 4+5$ أو $4Z < -4+5$

$4Z > 9$ أو $4Z < 1$ $\} \div 4$ $\Rightarrow$ $Z > \frac{9}{4}$ أو $Z < \frac{1}{4}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{Z : Z > \frac{9}{4}\right\} \cup \left\{Z : Z < \frac{1}{4}\right\}$

26 $\left|\frac{Z-1}{7}\right| \leq 2$

الحل :

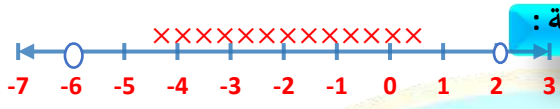
$-2 \leq \frac{Z-1}{7} \leq 2 \quad \} \times 7$

$-14 \leq Z-1 \leq 14 \quad \Rightarrow \quad -14+1 \leq Z \leq 14+1$

$-13 \leq Z \leq 15 \quad \Rightarrow \quad S = \{Z : -13 \leq Z \leq 15\}$

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية :

27



الحل : الرسم البياني يمثل تقاطع (و) والفجوة فارغة .

$-6 < x < 2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-6+2}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ ثم نطرح (-2) من جميع المتباينة :

$-6 < x < 2 \quad \Rightarrow \quad -6-(-2) < x-(-2) < 2-(-2)$

$-4 < x+2 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x+2| < 4$

28

الحل : الرسم البياني يمثل التقاطع (و)

$-4 \leq x \leq 2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ ثم نطرح (-1) من جميع المتباينة :

$-4 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad -4-(-1) \leq x-(-1) \leq 2-(-1)$

$-3 \leq x+1 \leq 3 \quad \Rightarrow \quad |x+1| \leq 3$

29

الحل : الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

$x > -2$ أو $x < 4$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$ ثم نطرح (1) من جميع المتباينة :

$x > -2$ أو $x < 4 \quad \Rightarrow \quad x-1 > -2-1$ أو $x-1 < 4-1$

$x-1 > -3$ أو $x-1 < 3 \quad \Rightarrow \quad |x-1| > 3$

30

الحل : الرسم البياني يمثل اتحاد (أو)

$x \geq -4$ أو $x \leq -2$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3$ ثم نطرح (-3) من جميع المتباينة :

$x \geq -4$ أو $x \leq -2 \quad \Rightarrow \quad x-3 \geq -4-(3)$ أو $x-3 \leq -2-(-3)$

$x-3 \geq -1$ أو $x-3 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad |x-3| \geq 1$

تدرب وحل مسائل حياتية

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي :

31 ا لغرير : حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات ينتمي الى شعبة الحبليات ويمتلك قوائم قصيرة نوعا ما ويعيش في الحفر التي يحفرها في الأرض طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل ما بين $68cm$, $76cm$. اكتب مدى طول الغرير .

الحل : نفرض طول الغرير x

$68 < x < 76$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{68+76}{2} = \frac{144}{2} = 72$ ثم نطرح (72) من جميع المتباينة :

$68 < x < 76 \quad \Rightarrow \quad 68 - 72 < x - 72 < 76 - 72$

$-4 < x - 72 < 4 \quad \Rightarrow \quad |x - 72| < 4$

32 صحة : معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح بين 60 الى 90 نبضة في الدقيقة . اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الانسان .

الحل : نفرض عدد دقات القلب غير الطبيعية x

$x < 60$ أو $x > 90$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{60+90}{2} = \frac{150}{2} = 75$ ثم نطرح (75) من جميع المتباينة :

$x < 60$ أو $x > 90 \quad \Rightarrow \quad x - 75 < 60 - 75$ أو $x - 75 > 90 - 75$

$x < -15$ أو $x > 15 \quad \Rightarrow \quad |x - 75| > 4$

33 مواصلات : تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح ما بين $8km$ الى $10km$ اذ تعد منطقة جوية معتدلة . اكتب مدى منطقة الطيران المدنية .

الحل : نفرض مدى منطقة الطيران x

$8 < x < 10$ المتباينة

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{8+10}{2} = \frac{18}{2} = 9$ ثم نطرح (9) من جميع المتباينة :

$8 < x < 10 \quad \Rightarrow \quad 8 - 9 < x - 9 < 10 - 9$

$-1 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad |x - 9| < 1$

في

34 تحد : حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد :

1 $\left|\frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}}\right| \leq \sqrt{6}$

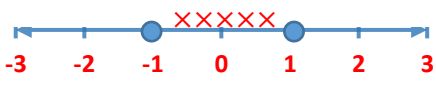
الحل :

$-\sqrt{6} \leq \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{6} \quad \} \times \sqrt{2}$

$-\sqrt{12} \leq \sqrt{3}x + \sqrt{3} \leq \sqrt{12} \quad \Rightarrow \quad -2\sqrt{3} \leq \sqrt{3}x + \sqrt{3} \leq 2\sqrt{3}$

$-2\sqrt{3} - \sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq 2\sqrt{3} - \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{3} \leq \sqrt{3}x \leq \sqrt{3} \quad \} \div \sqrt{3}$

$-1 \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad S = \{x : -1 \leq x \leq 1\}$



2 $\left|\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}}\right| \geq \sqrt{15}$

الحل :

$\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}} \geq \sqrt{15}$ أو $\frac{\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y}{\sqrt{5}} \leq -\sqrt{15}$ $\} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y \geq \sqrt{75}$ أو $\sqrt{12}-\sqrt{3}\,y \leq -\sqrt{75}$

$2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,y \geq 5\sqrt{3}$ أو $2\sqrt{3}-\sqrt{3}\,y \leq -5\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}\,y \geq 5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}\,y \leq -5\sqrt{3}-2\sqrt{3}$

$-\sqrt{3}\,y \geq 3\sqrt{3}$ أو $-\sqrt{3}\,y \leq -7\sqrt{3}$ $\} \div (-\sqrt{3})$

$y \leq -3$ أو $y \geq 7$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -3\} \cup \{y : y \geq 7\}$

35 أصحح الخطأ : قالت خلود أن متباينة القيمة المطلقة $|6-3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة الحل لها : $\left\{y : -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\right\}$. بين خطأ خلود وصححه .

الحل : المتباينة تمثل متباينة مركبة بعلاقة (أو)

$6-3y \geq 7$ أو $6-3y \leq -7$ $\Rightarrow$ $-3y \geq 7-6$ أو $-3y \leq -7-6$

$-3y \geq 1$ أو $-3y \leq -13$ $\} \div (-3)$

$y \leq \frac{-1}{3}$ أو $y \geq \frac{13}{3}$ $\Rightarrow$ $S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq -\frac{1}{3}\right\} \cup \left\{y : y \geq \frac{13}{3}\right\}$

36 حس عددي : اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية :

i) $|Z|-1<0$

الحل :

$|Z|<1$ $\Rightarrow$ $-1<Z<1$

$S = \{Z : -1<Z<1\}$

ii) $|y|>0$

الحل :

$y>0$ أو $y<0$

$S = S_1 \cup S_2 = \{y : y>0\} \cup \{y : y<0\}$

iii) $|x-1|>0$

الحل :

$x-1>0$ أو $x-1<0$ $\Rightarrow$ $x>1$ أو $x<1$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x>1\} \cup \{x : x<1\}$

أكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل موقفاً من واقع الحياة ومثل الحل على مستقيم الأعداد .

الحل : مسألة : الضغط الدم الطبيعي لدى الأنسان يتراوح بين 120 الى 180 . أحسب مدى ضغط الدم غير الطبيعي .

نفرض مدى ضغط الدم هو x

المتباينة التي تمثل ضغط الدم غير الطبيعي هي :

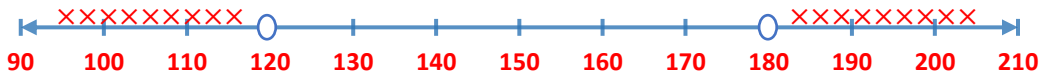
$x>180$ أو $x<120$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{120+180}{2} = \frac{300}{2} = 150$ ثم نطرح (150) من جميع المتباينة :

$x-150>180-150$ أو $x-150<120-150$

$x-150>30$ أو $x-150<-30$

$|x-150|>30$



خطة حل المسألة (أفهم المسألة)

تعلم أظهرت دراسة مسحية أن 62% من الشباب يمارسون رياضة كرة القدم فاذا كان هامش الخطأ هو 4 نقاط . فجد مدى النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

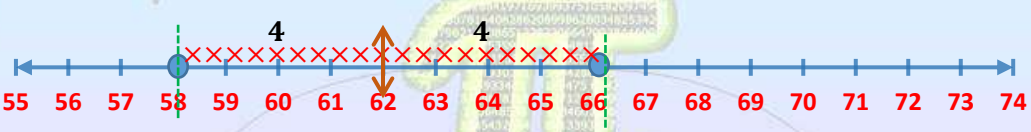
أفهم : ما المعطيات في المسألة ؟ 62% من السباب يمارسون رياضة كرة القدم , هامش الخطأ هو 4 نقاط .
ما المطلوب من المسألة ؟ إيجاد مدى النسبة المئوية التي تمثل الشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

خطط :
كيف تحل المسألة ؟ بما أن النسبة المئوية للشباب الذين يمارسون كرة القدم هي 62% والنسبة الواردة في الدراسة أقل من أو يساوي 4% لذا : $|x-62| \leq 4$ اذ x تمثل النسبة الفعلية للشباب الذين يمارسون رياضة كرة القدم .

حل : نجد مجموعة الحل لمتباينة القيمة المطلقة :

$$|x-62| \leq 4 \implies -4 \leq x-62 \leq 4$$
$$-4+62 \leq x \leq 4+62 \implies 58 \leq x \leq 66 \implies S=\{x:\ 58 \leq x \leq 66\}$$

تحقق : استعمل مستقيم الأعداد للتحقق من صحة الحل :



مسائل

1) **سمك السلمون :** متوسط عمر سمك السلمون من سنتين الى ثماني سنوات كما أنه يكون مهددا بالخطر عند ارتفاع درجة حرارة المياه فهو يعيش في درجة حرارة تتراوح بين 20 درجة سيليزية الى 23 درجة . اكتب متباينة تمثل درجة المياه التي لا يعيش فيها سمك السلمون .

الحل : نفرض درجة حرارة المياه هي x
المتباينة التي تمثل درجة المياه التي لا يعيش فيه سمك السلمون هي :

$x < 20$ أو $x > 23$
$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x < 20\} \cup \{x : x > 23\}$

2) **دب الباندا :** الباندا العملاقة هو نوع مختلف عن باقي الدببة فهي تمتلك فروا يختلف لونه في بعض المناطق فجسمها كله أبيض عدا الأذنين والعينين والساقين والذراعين والكتفين فهي أسود وتلد الأنثى صغيرا واحدا أو اثنين ويحتاج الصغير الى حليب أمه لأكثر من (6 الى 14) مرة في اليوم صغار الباندا العملاقة تزن بين 40kg الى 60kg في عام واحد ويعيشون مع أمهاتهم حتى سنتين من العمر . اكتب متباينة تمثل وزن صغير الباندا عندما يكون عمره سنة واحدة .

الحل : نفرض وزن صغير الباندا هو x

$40 < x < 60 \implies S = \{x : 40 < x < 60\}$

3 خلية النحل : لاحظ أنور من خلال دراسة مسحية على خلية نحل أن 88% من ذكور النحل يطردون من لخلية في نهاية الصيف فاذا كان هامش الخطأ 3 نقاط مئوية . جد مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية .

الحل : نفرض مدى النسبة المئوية لذكور النحل الذين يطردون من الخلية هو x

$|x-88| \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad -3 \leq x-88 \leq 3 \quad \Longrightarrow \quad -3+88 \leq x \leq 3+88$

$85 \leq x \leq 91 \quad \Longrightarrow \quad S = \{x : 85 \leq x \leq 91\}$

4 التلفريك : التلفريك أو المعبر الهوائي وهو من أرخص وأبسط وسائل النقل يعمل بالكهرباء ويعد واسطة نقل في الدول التي تكثر فيها الجبال والأسطح الوعرة وتلجأ اليها بعض الدول أيضا كوسيلة للترفيه ومشاهدة المناظر كما في شمال العراق . أقل سرعة لعربات التلفريك 20 km/h وأكبر سرعة 40 km/h . اكتب متباينة القيمة المطلقة تبين مدى سرعة عربات التلفريك .

الحل : نفرض سرعة عربات التلفريك هو x

$x \leq 40$ و $x \geq 20$

نجد معدل القيمتين أي أن : $\frac{20+40}{2} = \frac{60}{2} = 30$ ثم نطرح (30) من جميع المتباينة :

$x-30 \leq 40-30$ و $x-30 \geq 20-30$

$x-30 \leq 10$ و $x-30 \geq -10$

متباينة القيمة المطلقة هي : $|x-30| \leq 10$

مراجعة

الدرس [1 – 1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

مثال 1 بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$(-8)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{18}\right) = \sqrt[3]{-8}\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\times 3\sqrt{2}\right) = -2\left(\frac{1}{4}\sqrt{2}-\sqrt{2}\right) = -2\times\frac{1}{4}\sqrt{2}+2\sqrt{2} = \frac{-1}{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2} = \frac{3}{2}\times 1.41 = \frac{4.23}{2} \approx 2.11 = 2.1$$

تدريب 1 بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عشر :

$$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{2}+\sqrt{2}\times\sqrt{5}+\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{5+\sqrt{10}+\sqrt{10}+2}{5-2}$$

$$= \frac{7+2\sqrt{10}}{3} = \frac{7+2(3.16)}{3} = \frac{7+6.32}{3} = \frac{13.32}{3} = 4.44 \approx 4.4$$

مثال 2 استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

$$0.016\times 10^4 + 1.957\times 10^3 = 0.16\times 10^3 + 1.957\times 10^3 = (0.16+1.957)\times 10^3 = 2.117\times 10^3$$
$$\approx 2.12\times 10^3$$

تدريب 2 استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

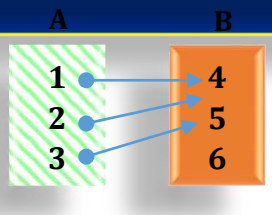
$$6.25\times 10^3 \div 0.05\times 10^6 = (6.25\div 0.05)\times 10^{3-6} = 125\times 10^{-3} = 0.125\times 10^{12} \approx 0.13\times 10^{12}$$

التطبيقات

الدرس [1 – 2]

مثال

إذا كان التطبيق $R : A \to B$ معطى كما يأتي : $R = \{(1,4),(2,4),(3,5)\}$ حيث : $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5,6\}$
مثل التطبيق بمخطط سهمي وحدد المجال والمدى للتطبيق .



الحل :

المجال $= \{1,2,3\}$

المدى $= \{4,5\}$

تدريب

إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ وكان التطبيقان $f : A \to A$ و $g : A \to A$ معرفين كما يأتي :
$f = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$, $g = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ فجد تركيب الدالتين : ii) $g \circ f$ i) $f \circ g$

الحل :

i) $f \circ g(x) = f[g(x)]$

$f \circ g(1) = f[g(1)] = f(2) = 3$

$f \circ g(2) = f[g(2)] = f(3) = 3$

$f \circ g(3) = f[g(3)] = f(1) = 3$

ii) $g \circ f(x) = g[f(x)]$

$g \circ f(1) = g[f(1)] = g(3) = 1$

$g \circ f(2) = g[f(2)] = g(3) = 1$

$g \circ f(3) = g[f(3)] = g(3) = 1$

الدرس [1 – 3] المتتابعات

مثال 1

أكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$

1) $u_n = \frac{1}{n}$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1} = 1$, $u_2 = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{1}{3}$, $u_4 = \frac{1}{4}$, $u_5 = \frac{1}{5}$

$\left\{\frac{1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}\right\}$

2) $u_n = \frac{2n-1}{n}$

الحل :

$u_1 = \frac{2(1)-1}{1} = 1$, $u_2 = \frac{2(2)-1}{2} = \frac{3}{2}$, $u_3 = \frac{2(3)-1}{3} = \frac{5}{3}$, $u_4 = \frac{2(4)-1}{4} = \frac{7}{4}$

$u_5 = \frac{2(5)-1}{5} = \frac{9}{5} \Rightarrow \left\{\frac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}\right\}$

تدريب 1 اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

1) $\{u_n\} = 3n - 2$

الحل :

$u_1 = 3(1) - 2 = 1$, $u_2 = 3(2) - 2 = 4$
$u_3 = 3(3) - 2 = 7$, $u_4 = 3(4) - 2 = 10$
$u_5 = 3(5) - 2 = 13$

المتتابعة هي : $\{1, 4, 7, 10, 13\}$

2) $\{u_n\} = (-2)^n$

الحل :

$u_1 = (-2)^1 = -2$, $u_2 = (-2)^2 = 4$
$u_3 = (-2)^3 = -8$, $u_4 = (-2)^4 = 16$
$u_5 = (-2)^5 = -32$

المتتابعة هي : $\{-2, 4, -8, 16, -32\}$

مثال 2 أكتب الحدود الخمسة أولى لمتتابعة حسابية حدها السابع 6 وأساسها 3

الحل :

$u_7 = 6$, $n = 7$, $d = 3$, $a = ?$
$u_n = a + (n-1)d$
$6 = a + (7-1)(3)$
$6 = a + 18 \implies a = 6 - 18 = -12$

المتتابعة : $\{-12, -9, -6, -3, 0\}$

تدريب 2 اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية : $\{12, 6, 0, -6, -12, \cdots\cdots\}$

الحل :

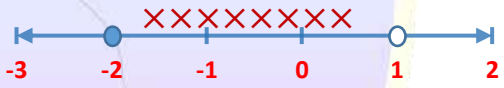
$u_{20} = ?$, $n = 20$, $a = 12$, $d = 6 - 12 = -6$
$u_n = a + (n-1)d$
$u_{20} = 12 + (20-1)(-6) = 12 + (19)(-6)$
$= 12 - 114 = -102$

الدرس [1 – 4] المتباينات المركبة

مثال 1 // حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $2x - 2 < 0$ و $2x - 2 \geq -6$

الحل :

$2x \geq -6 + 2$ و $2x < 0 + 2 \implies 2x \geq -4$ و $2x \leq 2$ $\} \div 2$
$x \geq -2$ و $x < 1$
$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq -2\} \cap \{x : x < 1\}$



تدريب 1 // حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $-9 < 2x - 1 \leq 3$

الحل :

$-9 + 1 < 2x \leq 3 + 1 \implies -8 < 2x \leq 4$ $\} \div 2$
$-4 < x \leq 2 \implies S = \{x : -4 < x \leq 2\}$

مثال 2 // حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $x + 1 < -4$ أو $x + 1 > 3$

الحل :

$x > 3 - 1$ أو $x \leq -4 - 1$
$x > 2$ أو $x \leq -5$
$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x > 2\} \cup \{x : x \leq -5\}$

تدريب 2 // حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبريا ومثّل الحل على مستقيم الأعداد : $2y-6\leq -7$ أو $2y-6>-3$

الحل :

$2y\leq -7+6$ أو $2y>-3+6$

$2y\leq -1$ أو $2y>3$ $\}\div 2$

$y\leq \frac{-1}{2}$ أو $y>\frac{3}{2}$

$S=S_1\cup S_2=\left\{y:y\leq \frac{-1}{2}\right\}\cup\left\{y:y>\frac{3}{2}\right\}$

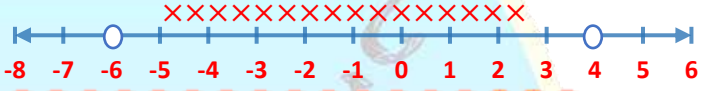
الدرس [1 – 5] متباينات القيمة المطلقة

مثال 1 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $|x+1|<5$

الحل :

$-5<x+1<5 \Rightarrow -5-1<x<5-1$

$-6<x<4 \Rightarrow S=\{x:-6<x<4\}$



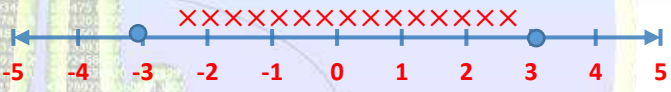
تدريب 1 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $|3y|-1\leq 8$

الحل :

$|3y|\leq 8+1 \Rightarrow |3y|\leq 9$

$-9\leq 3y\leq 9$ $\}\div 3$

$-3\leq y\leq 3 \Rightarrow S=\{y:-3\leq y\leq 3\}$



مثال 2 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $\left|\frac{3z-9}{6}\right|\geq 1$

الحل :

$\frac{3Z-9}{6}\leq -1$ أو $\frac{3Z-9}{6}\geq 1$ $\}\times 6$

$3Z-9\leq -6$ أو $3Z-9\geq 6 \Rightarrow 3Z\leq -6+9$ أو $3Z\geq 6+9$

$3Z\leq 3$ أو $3Z\geq 15$ $\}\div 3 \Rightarrow Z\leq 1$ أو $Z\geq 5$

$S=S_1\cup S_2=\{Z:Z\leq 1\}\cup\{Z:Z\geq 5\}$

تدريب 2 // حل متباينات القيمة المطلقة ومثل الحل على مستقيم الأعداد : $\left|\frac{6-2x}{8}\right| \geq 3$

الحل :

$\frac{6-2x}{8} \geq 3$ أو $\frac{6-2x}{8} \leq -3 \} \times 8$

$6-2x \geq 24$ أو $6-2x \leq -24 \implies -2x \geq 24-6$ أو $-2x \leq -24-6$

$-2x \geq 18$ أو $-2x \leq -30 \} \div (-2)$

$x \leq -9$ أو $x \geq 15$

$S = S_1 \cup S_2 = \{x : x \leq -9\} \cup \{x : x \geq 15\}$

Chapter Test اختبار

بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية :

1 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{3}+\sqrt{5}) = \sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3}\times\sqrt{5}+\sqrt{5}\times\sqrt{3}+\sqrt{5}\times\sqrt{5} = 3+\sqrt{15}+\sqrt{15}+5$

$= 8+2\sqrt{15}$

2 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{3}-\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}\times\sqrt{2}-5\times\sqrt{2}}{3\sqrt{2}\times\sqrt{2}}$

$= \frac{3-\sqrt{18}}{3} - \frac{\sqrt{16}-5\sqrt{2}}{6} = \frac{3-3\sqrt{2}}{3} - \frac{4-5\sqrt{2}}{6}$

$= \frac{6-6\sqrt{2}-4+5\sqrt{2}}{6} = \frac{2-\sqrt{2}}{6}$

استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب كل مما يلي مقرباً لأقرب عشر :

3 $\left(\frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{0} + (121)^{\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{125}} - 1 + \sqrt{121}\times\frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{5} - 1 + \frac{11}{3}$

$= 0.2 - 1 + 3.66 \approx 2.86 \approx 2.9$

4 **إذا كانت $f : Z \to R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططا سهميا للدالة وبين هل أن الدالة متباينة أو شاملة أو تقابل ؟**

الحل :

$f(x) = x^2$, $X = Z = \{-2,-1,0,1,2\}$

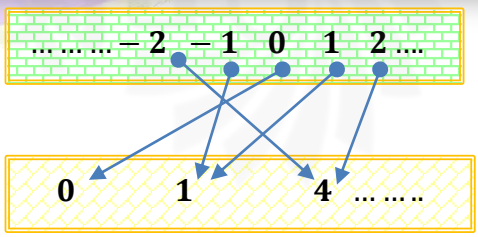
$f(-2) = (-2)^2 = 4$

$f(-1) = (-1)^2 = 1$

$f(0) = (0)^2 = 0$

$f(1) = (1)^2 = 1$

$f(2) = (2)^2 = 4$



المدى $= \{4,1,0\}$. التطبيق غير شامل لأن المدى $\neq$ المجال القابل R

التطبيق ليس متباين لأن $f(1) = f(-1)$ بينما $1 \neq -1$ (النواتج متشابهة) . التطبيق ليس تقابل .

5 اذا كانت الدالة $f : N \to N$ اذ أن $f(x) = 3x + 1$ و $g : N \to N$ اذ أن $g(x) = x^2$ جد :
$(g \circ f)(5)$, $(f \circ g)(5)$, $(g \circ f)(2)$, $(f \circ g)(2)$

الحل :

$$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5) + 1] = g(16) = (16)^2 = 256$$

$$f \circ g(5) = f[g(5)] = f[(5)^2] = f(25) = 3(25) + 1 = 75 + 1 = 76$$

$$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2) + 1] = g(7) = (7)^2 = 49$$

$$f \circ g(2) = f[g(2)] = f[(2)^2] = f(4) == 3(4) + 1 = 12 + 1 = 13$$

6 اذا كانت الدالة $f : R \to R$ حيث $f(x) = 3x + 1$ والدالة $g : R \to R$ حيث $g(x) = 2x + 5$ هل أن $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$ ثم جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 28$

الحل :

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g(3x + 1) = 2(3x + 1) - 5 = 6x + 2 - 5 = 6x - 3$$
$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x + 5) = 3(2x + 5) + 1 = 6x + 15 + 1 = 6x + 16$$
$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$$
$$(f \circ g)(x) = 28$$
$$f[g(x)] = 28$$
$$f(2x + 5) = 28 \implies 3(2x + 5) + 1 = 28 \implies 6x + 15 + 1 = 25$$
$$16x + 16 = 28 \implies 6x = 28 - 16 \implies 6x = 12 \implies x = \frac{12}{2} = 2$$

اكتب حدود للمتتابعات الآتية :

7 جد الحدود بين u_3 و u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$

الحل :

$$u_2 = \frac{-3}{2} \quad , \quad n = 2 \quad , \quad d = 2 \quad a = ?$$
$$u_n = a + (n - 1)d$$
$$u_2 = a + (2 - 1)(2) \implies \frac{-3}{2} = a + 2 \implies a = \frac{-3}{2} - 2 = \frac{-3 - 4}{2} = \frac{-7}{2}$$
$$u_4 = \frac{-7}{2} + (4 - 1)(2) = \frac{-7}{2} + 6 = \frac{-7 + 12}{2} = \frac{5}{2}$$
$$u_5 = \frac{-7}{2} + (5 - 1)(2) = \frac{-7}{2} + 8 = \frac{-7 + 16}{2} = \frac{9}{2}$$
$$u_6 = \frac{-7}{2} + (6 - 1)(2) = \frac{-7}{2} + 10 = \frac{-7 + 20}{2} = \frac{13}{2}$$
$$u_7 = \frac{-7}{2} + (7 - 1)(2) = \frac{-7}{2} + 12 = \frac{-7 + 24}{2} = \frac{17}{2} \implies \text{المتتابعة} : \left\{\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \frac{13}{2}, \frac{17}{2}\right\}$$

8 جد الحدود بين u_4 و u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d=-\frac{5}{2}$

الحل :

$u_3=6\ ,\ n=3\ ,\ d=-\frac{5}{2}\ ,\ a=?$

$u_n=a+(n-1)d$

$u_3=a+(3-1)\left(-\frac{5}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad 6=a+(2)\left(-\frac{5}{2}\right)$

$6=a-5 \quad \Rightarrow \quad a=6+5=11$

$u_5=11+(5-1)\left(-\frac{5}{2}\right)=11+(4)\left(-\frac{5}{2}\right)=11-10=1$

$u_6=11+(6-1)\left(-\frac{5}{2}\right)=11+(5)\left(-\frac{5}{2}\right)=11-\frac{25}{2}=\frac{22-25}{2}=-\frac{3}{2}$

$u_7=11+(7-1)\left(-\frac{5}{2}\right)=11+(6)\left(-\frac{5}{2}\right)=11-15=-4$

$u_8=11+(8-1)\left(-\frac{5}{2}\right)=11+(7)\left(-\frac{5}{2}\right)=11-\frac{35}{2}=\frac{22-35}{2}=-\frac{13}{2}$

المتتابعة $\left\{1,-\frac{3}{2},-4,-\frac{13}{2}\right\}$

حدد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي :

9 $u_n=9-3n$

الحل :

$u_1=9-3(1)=9-3=6\ ,\quad u_2=9-3(2)=9-6=3$

$d=u_2-u_1=3-6=-3 \Rightarrow d<0$ المتتابعة متناقصة لأن

10 $u_n=n^2-2$

الحل :

$u_1=(1)^2-2=-1\ ,\ ,\quad u_2=(2)^2-2=2$

$=u_2-u_1=2-(-1)=2+1=3$

$d>0$ المتتابعة متزايدة لأن

11 $u_n=\frac{1}{3n+1}$

الحل :

$u_1=\frac{1}{3(1)+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}\ ,\quad u_2=\frac{1}{3(2)+1}=\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$

$d=u_2-u_1=\frac{1}{7}-\frac{1}{4}=\frac{4-7}{28}=-\frac{3}{28} \Rightarrow d<0$ المتتابعة متناقصة لأن

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية :

12 $\left\{\frac{n}{n+2}\right\} = \cdots\cdots$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$, $u_2 = \frac{2}{2+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $u_3 = \frac{3}{3+2} = \frac{3}{5}$

$u_4 = \frac{4}{4+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, $u_5 = \frac{5}{5+2} = \frac{5}{7}$ $\Rightarrow$ المتتابعة : $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}\right\}$

13 $\{4\sqrt{2}\} = \cdots\cdots$

الحل :

$u_1 = 4\sqrt{2}$, $u_2 = 4\sqrt{2}$, $u_3 = 4\sqrt{2}$, $u_4 = 4\sqrt{2}$, $u_5 = 4\sqrt{2}$

المتتابعة : $\{4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$

14 $\left\{\frac{n}{n+5}\right\} = \cdots\cdots$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$, $u_2 = \frac{2}{2+5} = \frac{2}{7}$, $u_3 = \frac{3}{3+5} = \frac{3}{8}$

$u_4 = \frac{4}{4+5} = \frac{4}{9}$, $u_5 = \frac{5}{5+5} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

المتتابعة : $\left\{\frac{1}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{8}, \frac{4}{9}, \frac{1}{2}\right\}$

حل المتباينات المركبة ومثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

15 $x + 6 < 20$ و $x + 6 \geq 12$

الحل :

$x < 20 - 6$ و $x \geq 12 - 6$

$x < 14$ و $x \geq 6$

$S = S_1 \cap S_2 = \{x : x \geq 6\} \cap \{x : x < 14\}$

16 $\frac{1}{16} < \frac{Z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$ $\times 16$

الحل :

$1 < 8(Z+2) \leq 2 \Rightarrow 1 < 8Z + 16 \leq 2$

$1 - 16 < 8Z \leq 2 - 16 \Rightarrow -15 < 8Z \leq -14$

$\frac{-15}{8} < \frac{8Z}{8} \leq \frac{-14}{8} \Rightarrow \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4} \Rightarrow S = \left\{Z : \frac{-15}{8} < Z \leq \frac{-7}{4}\right\}$

17 $x-3\leq -5$ أو $x-3>5$

الحل :

$x\leq -5+3$ أو $x>5+3$

$x\leq -2$ أو $x>8$

$S=S_1\cup S_2=\{x:x\leq -2\}\cup\{x:x>8\}$

18 $7t-5>-1$ أو $7t-5\leq -14$

الحل :

$7t>-1+5$ أو $7t\leq -14+5$

$7t>4$ أو $7t\leq -9$ $\}\div 7$

$t>\frac{4}{7}$ أو $t\leq\frac{-9}{7}$ $\Rightarrow$ $S=S_1\cup S_2=\left\{t:t>\frac{4}{7}\right\}\cup\left\{t:t\leq\frac{-9}{7}\right\}$

19 $y\leq 0$ أو $y+7\geq 16$

الحل :

$y\leq 0$ أو $y\geq 16-7$

$y\leq 0$ أو $y\geq 9$ $\Rightarrow$ $S=S_1\cup S_2=\{y:y\leq 0\}\cup\{y:y\geq 9\}$

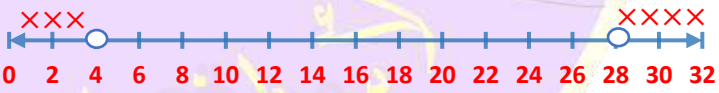
20 $\frac{y}{3}<1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3}>9\frac{1}{3}$

الحل :

$\frac{y}{3}<\frac{4}{3}$ أو $\frac{y}{3}>\frac{28}{3}$ $\Big]\times 3$

$y<4$ أو $y>28$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y<4\}$
$\cup\{y:y>28\}$



اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا ضلعي مثلث معلومين :

21 4cm , 9cm

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث 4, 9 , x

$4+9>x$ $\Rightarrow$ $13>x$ الضلع الثالث أصغر من 13

$9+x>4$ $\Rightarrow$ $x>4-9$ $\Rightarrow$ $x>-5$ لا يعطي معلومات مفيدة

$4+x>9$ $\Rightarrow$ $x>9-4$ $\Rightarrow$ $x>5$ الضلع الثالث اكبر من 5

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $5<x<13$

22 $5cm$ ، $12cm$

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $5, 12, x$

$5 + 12 > x \Rightarrow 17 > x$ الضلع الثالث أصغر من 17

$12 + x > 5 \Rightarrow x > 5 - 12 \Rightarrow x > -7$ لا يعطي معلومات مفيدة

$5 + x > 12 \Rightarrow x > 12 - 5 \Rightarrow x > 7$ الضلع الثالث اكبر من 7

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $7 < x < 17$

23 $7cm$ ، $15cm$

الحل : نفرض طول الضلع الثالث x $\Leftarrow$ اطوال اضلاع المثلث $7, 15, x$

$7 + 15 > x \Rightarrow 22 > x$ الضلع الثالث أصغر من 22

$15 + x > 7 \Rightarrow x > 7 - 15 \Rightarrow x > -8$ لا يعطي معلومات مفيدة

$7 + x > 15 \Rightarrow x > 15 - 57 \Rightarrow x > 8$ الضلع الثالث اكبر من 8

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي : $8 < x < 22$

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

24 $|x - 6| \leq 3$

الحل :

$-3 \leq x - 6 \leq 3 \Rightarrow -3 + 6 \leq x \leq 3 + 6$

$3 \leq x \leq 9 \Rightarrow S = \{x : 3 \leq x \leq 9\}$

25 $|3Z| - 5 < 4$

الحل :

$|3Z| < 4 + 5 \Rightarrow |3Z| < 9$

$-9 < 3Z < 9 \} \div 3$

$-3 < Z < 3 \Rightarrow S = \{Z : -3 < Z < 3\}$

27 $6|x| - 8 \geq 3$

الحل :

$6|x| \geq 3 + 8 \Rightarrow 6|x| \geq 11 \} \div 6$

$|x| \geq \frac{11}{6} \Rightarrow x \geq \frac{11}{6}$ أو $x \leq \frac{-11}{6}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x \geq \frac{11}{6}\right\} \cup \left\{x : x \leq \frac{-11}{6}\right\}$

26 $|x + 1| > \frac{1}{2}$

الحل :

$x + 1 > \frac{1}{2}$ أو $x + 1 < -\frac{1}{2} \} \times 2$

$2x + 2 > 1$ أو $2x + 2 < -1$

$2x > 1 - 2$ أو $2x < -1 - 2$

$2x > -1$ أو $2x < -3 \} \div 2$

$x > -\frac{1}{2}$ أو $x < -\frac{3}{2}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{x : x > -\frac{1}{2}\right\} \cup \left\{x : x < -\frac{3}{2}\right\}$

28 $|3y| - 2 > 9$

الحل :

$|3y| > 9 + 2 \Rightarrow |3y| > 11$

$3y > 11$ أو $3y < -11 \} \div 3$

$y > \frac{11}{3}$ أو $y < -\frac{11}{3}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y > \frac{11}{3}\right\} \cup \left\{y : y < -\frac{11}{3}\right\}$

29 $|8Z| - 1 \geq 8$

الحل :

$|8Z| \geq 8 + 1 \quad \Rightarrow \quad |8Z| \geq 9$

$8Z \geq 9$ أو $8Z \leq -9 \ \} \div 8$

$Z \geq \frac{9}{8}$ أو $Z \leq -\frac{9}{8}$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{Z : Z \geq \frac{9}{8}\right\} \cup \left\{Z : Z \leq -\frac{9}{8}\right\}$

30 $|4 - 3y| \geq 14$

الحل :

$4 - 3y \geq 14$ أو $4 - 3y \leq -14$

$-3y \geq 14 - 4$ أو $-3y \leq -14 - 4$

$-3y \geq 10$ أو $-3y \leq -18 \ \} \div (-3)$

$y \leq -\frac{10}{3}$ أو $y \geq 6$

$S = S_1 \cup S_2 = \left\{y : y \leq -\frac{10}{3}\right\} \cup \{y : y \geq 6\}$

31 $\left|\frac{6 - 3y}{9}\right| \geq 5$

الحل :

$\frac{6 - 3y}{9} \geq 5$ أو $\frac{6 - 3y}{9} \leq -5 \ \} \times 9$

$6 - 3y \geq 45$ أو $6 - 3y \leq -45 \quad \Rightarrow \quad -3y \geq 45 - 6$ أو $-3y \leq -45 - 6$

$-3y \geq 39$ أو $-3y \leq -51 \ \} \div (-3)$

$y \leq -13$ أو $y \geq 17 \quad \Rightarrow \quad S = S_1 \cup S_2 = \{y : y \leq -13\} \cup \{y : y \geq 17\}$

الفصل الثاني المقادير الجبرية

2

الدرس [1 – 2] ضرب المقادير الجبرية

[2 – 1 – 1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

ملاحظة

[1] اذا كان المقدار يتكون من قوسين مختلفين فنقوم بتوزيع القوس الأول على القوس الثاني ومن ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

[2] اذا كان المقدار بالصورة $(a+b)^2$ أو $(a-b)^2$ فإن تبسيطه حسب قانون المربع الكامل :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad , \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

[3] اذا كان المقدار بالصورة $(a-b)(a+b)$ فإن القوسان يمثلان تحليل فرق بين مربعين يمكن حلها بالطريقة : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

مثال جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2 $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

3 $(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$

4 $(x+3)(x+5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

5 $(x+2)(x-6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$

6 $(x-1)(x-4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$

مثال //2

1) $(3y+1)(y+2) = 3y^2 + 6y + y + 2 = 3y^2 + 7y + 2$

[2] $(n-\sqrt{3})(5n-\sqrt{3}) = 5n^2 - \sqrt{3}\,n - 5\sqrt{3}n + 3 = 5n^2 - 6\sqrt{3}\,n + 3$

[3] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[8] $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

[5] $(Z+3)^2 = Z^2 + 6Z + 9$

[6] $(h-5)^2 = h^2 - 10h + 25$

[7] $(2x-7)(2x+7) = (2x)^2 - (7)^2 = 4x^2 - 49$

[8] $(v+\sqrt{2})(v-\sqrt{2}) = v^2 - (\sqrt{2})^2 = v^2 - 2$

[2 – 1 – 2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

ملاحظة

[1] اذا كان المقدار يتكون من قوسين احدهما من حدين والآخر من ثلاثة حدود هنالك طريقتين :

a) نضرب القوس الأول في القوس الثاني ثم نطرح الحدود المتشابهة .

b) اذا كان المقدار بالصورة :

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$
$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$$

[2] اذا كان المقدر بالشك : $(a+b)^3\,,(a-b)^3$

$1=1^3\,,8=2^3$
$27=3^3$
$64=4^3$
$125=5^3$
$216=6^3$

مثال جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

1) $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8=x^3+8$ الطريقة الأولى

$(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+2^3=x^3+8$ الطريقة الثانية

2) $(y-3)(y^2+3y+9)=y^3-3^3=y^3-27$

3) $(2v+5)(4v^2-10v+25)=(2v)^3+5^3=8v^3+125$

4) $\left(\frac{1}{3}-Z\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}Z+Z^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-Z^3=\frac{1}{27}-Z^3$

5) $\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}+v\right)\left(\sqrt[3]{\frac{9}{25}}-\sqrt[3]{\frac{3}{5}}v+v^2\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\right)^3-v^3=\frac{3}{5}+v^3$

6) $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})=x^3-\left(\sqrt[3]{2}\right)^3=x^3-2$

7) $(y+2)^3=(y+2)(y+2)^2=(y+2)(y^2+4y+4)=y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8$
$=y^3+6y^2+12y+8$

8) $(Z-3)^3=(Z-3)(Z-3)^2=(Z-3)(Z^2-6Z+9)=$
$=Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27=Z^3-9Z^2+27Z-27$

9) $\left(x+\frac{1}{2}\right)^3=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)$
$=x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

10) $(y-5)^3=(y-5)(y-5)^2=(y-5)(y^2-10y+25)$
$=y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125=y^3-15y^2+75y-125$

تأكد من فهمك

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

2 $(\sqrt{7}-h)^2 = 7 - 2\sqrt{7}\,h + h^2$

3 $(Z+\sqrt{5})(Z-\sqrt{5}) = Z^2 - (\sqrt{5})^2 = Z^2 - 5$

4 $(v+5)(v+1) = v^2 + v + 5v + 5$
$= v^2 + 6v + 5$

5 $(x-3)(x-2) = x^2 - 2x - 3x + 6$
$= x^2 - 5x + 6$

6 $(3x-4)(x+5) = 3x^2 + 15x - 4x - 20$
$= 3x^2 + 11x - 20$

7 $\left(\frac{1}{3}y+3\right)\left(\frac{1}{3}y+3\right) = \frac{1}{9}y^2 + y + y + 9$
$= \frac{1}{9}y^2 + 2y + 9$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

8 $(y+2)(y^2-2y+4) = y^3 + 2^3 = y^3 + 8$

9 $(2Z+4)(4Z^2-8Z+16) = (2Z)^3 + 4^3 = 8Z^3 + 64$

10 $(v-\sqrt[3]{3})(v^2+\sqrt[3]{3}\,v+\sqrt[3]{9}) = v^3 - (\sqrt[3]{3})^3 = v^3 - 3$

11 $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}+m\right)\left(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\,m + m^2\right) = \left(\sqrt[3]{\frac{2}{7}}\right)^3 + m^3 = \frac{2}{7} + m^3$

12 $(x+5)^3 = (x+5)(x+5)^2 = (x+5)(x^2+10x+25)$
$= x^3 + 10x^2 + 25x + 5x^2 + 50x + 125 = x^3 + 15x^2 + 75x + 125$

13 $(y-4)^3 = (y-4)(y-4)^2 = (y-4)(y^2-8y+16)$
$= y^3 - 8y^2 + 16y - 4y^2 + 32y - 64 = y^3 - 12y^2 + 48y - 64$

تدرب وحل التمرينات

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

14 $(n-6)^2 = n^2 - 12n + 36$

15 $(y+5)(y-5) = y^2 - 5^2 = y^2 - 25$

16 $(x+\sqrt{8})^2 = x^2 + 2\sqrt{8}\,x + 8$

17 $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6}) = y^2 - (\sqrt{6})^2$
$= y^2 - 6$

18 $(8+h)(3+h) = 24 + 8h + 3h + h^2$
$= 24 + 11h + h^2$

19 $(4-y)(5-y) = 20 - 4y - 5y + y^2$
$= 20 - 9y + y^2$

20 $(2x-3)(x+9) = 3x^2 + 27x - 3x - 27$
$= 3x^2 - 24x - 27$

21 $(Z-2\sqrt{7})(2Z-\sqrt{7})$
$= 2Z^2 - \sqrt{7}\,Z - 4\sqrt{7}\,Z + 14$
$= 2Z^2 - 5\sqrt{7}\,Z + 14$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

22 $(x+6)(x^2-6x+36)=x^3+6^3=x^3+216$

23 $(y-1)(y^2+y+1)=y^3-1^3=y^3-1$

24 $(Z-3)^3=(Z-3)(Z-3)^2=(Z-3)(Z^2-6Z+9)$

$=Z^3-6Z^2+9Z-3Z^2+18Z-27=Z^3-9Z^2+27Z-27$

25 $\left(\frac{2}{3}-r\right)\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}r+r^2\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-r^3=\frac{8}{27}-r^3$

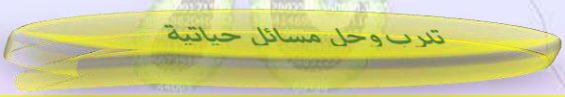
26 $(x-\sqrt[3]{4})(x^2+\sqrt[3]{4}\,x+\sqrt[3]{16})=x^3-(\sqrt[3]{4})^3=x^3-4$

27 $(Z-\sqrt{5})^3=(Z-\sqrt{5})(Z-\sqrt{5})^2=(Z-\sqrt{5})(Z^2-2\sqrt{5}\,Z+5)$

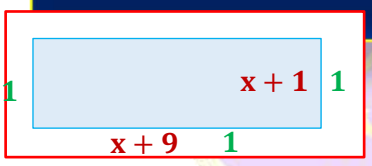
$=Z^3-2\sqrt{5}\,Z^2+5Z-\sqrt{5}\,Z^2+10Z-5\sqrt{5}=Z^3-3\sqrt{5}\,Z^2+15Z-5\sqrt{5}$

28 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}+n\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{25}}+\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\,n+n^2\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{5}}\right)^3+n^3=\frac{1}{5}+n^3$

29 $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}+\frac{1}{h}\right)\left(\sqrt[3]{\frac{1}{81}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\,\frac{1}{h}+\frac{1}{h^2}\right)=\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)^3+\left(\frac{1}{h}\right)^3=\frac{1}{9}+\frac{1}{h^2}$



30 مسبح : يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد يبلغ طول المسبح فيه $(x+9)$ امتار وعرضه $(x+1)$ متر ومحاط بممر عرضه 1 متر . اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة .



الحل :

الطول $x+9+1+1=x+11$, العرض $x+1+1+1=x+3$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$A=(x+11)(x+3)=x^2+3x+11x+33=x^2+14x+33$

31 تأريخ : تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريبا . وقد بنوا سنة

575 م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل . رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y-7)$, $(y-4)$ سنتمترات . اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة .

الحل :

مساحة اللوحة = الطول × العرض

$A=(y-4)(y-7)=y^2-7y-4y+28=y^2-11y+2$

32 أسماك زينة : حوض سمك زينة مكعب الشكل طول ضلعه $(v+3)$ سنتمتر . اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة .

الحل :

$$V = L^3 = (v+3)^3 = (v+3)(v+3)^2 = (v+3)(v^2+6v+9)$$
$$= v^3 + 6v^2 + 9v + 3v^2 + 18v + 27 = v^3 + 9v^2 27v + 27$$

33 تحد :جد ناتج كل مما يلي بأبسط صورة :

i) $(x+1)^2 - (x-2)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4) = x^2 + 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 6x - 3$

ii) $(3y+2)(y-5) - (3y^2 - 10) = 3y^2 - 15y + 2y - 10 - 3y^2 + 10 = -13y$

34 أصحح الخطأ : كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي : $(\sqrt{5}h - 4)(h-6) = 5h^2 + 10h - 24$ حدد خطأ نسرين وصححه .

الحل :

$$(\sqrt{5}\,h - 4)(h-6) = \sqrt{5}\,h^2 - 6\sqrt{5}\,h - 4h + 24 = \sqrt{5}\,h^2 - (6\sqrt{6} + 4)h + 24$$

35 حس عددي : أي العددين أكبر ؟ العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$. وضح اجابتك

الحل :

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6} \quad , \quad (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

العدد $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ أكبر من العدد $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$

أكتب ناتج ضرب المقدارين الجبريين : $\left(2Z + \frac{1}{2}\right)\left(2Z - \frac{1}{2}\right)$

الحل :

$$\left(2Z + \frac{1}{2}\right)\left(2Z - \frac{1}{2}\right) = (2Z)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4Z^2 - \frac{1}{4}$$

[2 − 2 − 1]	تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

لإيجاد العامل المشترك نتبع ما يأتي :

1) نستخرج العامل المشترك للاعداد حيث يمثل أصغر عدد في المقدار الجبري ويمكن قسمة المقدار الجبري عليه .

2) نستخرج العامل المشترك للمتغيرات بأصغر أس .

3) نفتح قوس ونقوم بقسمة كل حد في المقدار الجبري على العامل المشترك وناتج القسمة يكتب داخل القوس .

ملاحظة : التحقق من صحة الحل : نقوم بتوزيع العامل المشترك على داخل القوس فاذا حصلنا على المقدار الجبري فأن التحليل

مثال حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

1 $6x^3+9x^2-18x=3x(2x^2+3x-6)$

التحقق : $3x(2x^2+3x-6)=3x(2x^2)+3x(3x)-3x(6)=6x^3+9x^2-18x$

2 $\sqrt{12}\,y^2Z+\sqrt{2}(\sqrt{6}\,yZ^2-\sqrt{24}\,yZ)=2\sqrt{3}\,y^2Z+\sqrt{12}\,yZ^2-\sqrt{48}\,yZ$
$=2\sqrt{3}\,y^2Z+2\sqrt{3}\,yZ^2-4\sqrt{3}\,yZ=2\sqrt{3}\,yZ(y+Z-2)$

التحقق : $2\sqrt{3}\,yZ(y+Z-2)=2\sqrt{3}\,y^2Z+2\sqrt{3}\,yZ^2-4\sqrt{3}\,yZ$

مثال حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

1 $5x(x+3)-7(x+3)=(x+3)(5x-7)$

2 $\frac{1}{2}(y-1)+\frac{1}{3}y^2(y-1)=(y-1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}y^2\right)$

3 $\sqrt{3}\,v^2(Z+2)-\sqrt{5}\,v(Z+2)=v(Z+2)(\sqrt{3}\,v-\sqrt{5})$

[2 – 2 – 2]	تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع

تستعمل خاصية التجميع في التحليل اذا كان المقدار الجبري يتكون من أربعة حدود .

* نضع كل حدين بين قوسين ثم نستخرج العامل المشترك من كل قوس .
* نستخدم خاصية ثنائية الحد كعامل مشترك

مثال حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

1 $4x^3-8x^2+5x-10=(4x^3-8x^2)+(5x-10)=4x^2(x-2)+5(x-2)$
$=(x-2)(4x^2+5)$

التحقق : $(x-2)(4x^2+5)=4x^3+5x-8x^2-10=4x^3-8x^2+5x-10$

2 $\sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{8}\,h^2v-\sqrt{12}\,v^2t=(\sqrt{2}\,h^2t-\sqrt{8}\,h^2v)+(\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{12}\,v^2t)$
$=(\sqrt{2}\,h^2t-2\sqrt{2}\,h^2v)+(\sqrt{3}\,t^2v-2\sqrt{3}\,v^2t)$
$=\sqrt{2}\,h^2(t-2v)+\sqrt{3}\,tv(t-2v)$
$=(t-2v)(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)$

التحقق : $(t-2v)(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)=t(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)-2v(\sqrt{2}\,h^2+\sqrt{3}\,tv)$
$=\sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-2\sqrt{2}h^2v+2\sqrt{3}\,v^2t$
$=\sqrt{2}\,h^2t+\sqrt{3}\,t^2v-\sqrt{8}h^2v+\sqrt{12}\,v^2t$

حلل المقدار باستعمال التجميع مع المعكوس :

$14x^3-7x^2+3-6x=(14x^3-7x^2)+(3-6x)=7x^2(2x-1)+3(1-2x)$
$=7x^2(2x-1)+3(-1)(2x-1)=7x^2(2x-1)-3(2x-1)$
$=(2x-1)(7x^2-3)$

تأكد من فهمك

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

1 $9x^2 - 21x = 3x(3x - 7)$

التحقق : $3x(3x - 7) = 9x^2 - 21x$

2 $10 - 15y + 5y^2 = 5(2 - 3y + y^2)$

التحقق : $5(2 - 3y + y^2) = 10 - 15y + 5y^2$

3 $14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3 = 7Z^2(2Z^2 - 3 - Z)$

التحقق : $7Z^2(2Z^2 - 3 - Z) = 14Z^4 - 21Z^2 - 7Z^3$

4 $\sqrt{8}\,t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr)$
$= 2\sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}\,tr^2 - \sqrt{2}\sqrt{3}\,tr$
$= \sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$

التحقق : $\sqrt{2}\,tr(2t + r - \sqrt{3})$
$= 2\sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}\,tr^2 - \sqrt{2}\,tr(\sqrt{3})$
$= \sqrt{2}\,t^2r + \sqrt{2}(tr^2 - \sqrt{3}\,tr)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

5 $3y(y - 4) - 5(y - 4) = (y - 4)(3y - 5)$

6 $\frac{1}{4}(t + 5) + \frac{1}{3}t^2(t + 5) = (t + 5)\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}t^2\right)$

7 $\sqrt{2}\,n(x + 1) - \sqrt{3}\,m(x + 1) = (x + 1)(\sqrt{2}\,n - \sqrt{3}\,m)$

8 $2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(2x - 7)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

9 $3y^3 - 6y^2 + 7y - 14 = (3y^3 - 6y^2) + (7y - 14) = 3y^2(y - 2) + 7(y - 2)$
$= (y - 2)(3y^2 + 7)$

التحقق : $(y - 2)(3y^2 + 7) = 3y^3 + 7y - 6y^2 - 14 = 3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$

10 $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3 = (21 - 3x) + (35x^2 - 5x^3) = 3(7 - x) + 5x^2(7 - x)$
$= (7 - x)(3 + 5x^2)$

التحقق : $(7 - x)(3 + 5x^2) = 21 + 35x^2 - 3x - 5x^3 = 21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$

11 $2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k = (2r^2k - 4r^2v) + (3k^2v - 6v^2k)$
$= 2r^2(k - 2v) + 3kv(k - 2v) = (k - 2v)(2r^2 + 3kv)$

التحقق : $(k - 2v)(2r^2 + 3kv) = 2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k$

12 $3Z^3 - \sqrt{18}\,Z^2 + Z - \sqrt{2} = (3Z^3 + Z) + (-\sqrt{18}\,Z^2 - \sqrt{2})$
$= (3Z^3 + Z) + (-3\sqrt{2}\,Z^2 - \sqrt{2})$
$= Z(3Z^2 + 1) - \sqrt{2}(3Z^2 + 1) = (3Z^2 + 1)(Z - \sqrt{2})$

التحقق : $(3Z^2 + 1)(Z - \sqrt{2}) = 3Z^3 - 3\sqrt{2}Z^2 + Z - \sqrt{2}$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس

13 $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y = (21y^3 - 7y^2) + (3 - 9y) = 7y^2(3y - 1) + 3(1 - 3y)$
$= 7y^2(3y - 1) + 3(-1)(3y - 1) = 7y^2(3y - 1) - 3(3y - 1)$
$= (3y - 1)(7y^2 - 3)$

14 $\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3+5-10x=\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{4}x^3\right)+(5-10x)=\frac{1}{2}x^3\left(x-\frac{1}{2}\right)+5(1-2x)$
$=\frac{1}{4}x^3(2x-1)+5(1-2x)=\frac{1}{4}x^3(2x-1)-5(2x-1)$
$=(2x-1)\left(\frac{1}{4}x^3-5\right)$

15 $6Z^3-9Z^2+12-8Z=(6Z^3-9Z^2)+(12-8Z)=3Z^2(2Z-3)+4(3-2Z)$
$=3Z^2(2Z-3)+4(-1)(2Z-3)$
$=3Z^2(2Z-3)-4(2Z-3)=(2Z-3)(3Z^2-4)$

16 $5t^3-15t^2-2t+6=(5t^3-15t^2)+(-2t+6)=5t^2(t-3)+2(-t+3)$
$=5t^2(t-3)+2(-1)(t-3)=5t^2(t-3)-2(t-3)=(t-3)(5t^2-2)$

تدرب وحل التمرينات

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

17 $12y^3-21y^2=3y^2(4y-7)$
التحقق : $3y^2(4y-7)=12y^3-21y^2$

18 $5t^3+10t^2-15t=5t(t^2+2t-3)$
التحقق : $5t(t^2+2t-3)=5t^3+10t^2-15t$

19 $6v^2(3v-6)+18v=18v^3-36v^2+18v$
$=18v(v^2-2v+1)$
التحقق : $18v(v^2-2v+1)=18v^3-36v^2+18v$
$=6v^2(3v-6)+18v$

20 $\sqrt{12}\,n^3r+\sqrt{3}\,(nr^3-\sqrt{2}\,nr)$
$=2\sqrt{3}\,n^3r+\sqrt{3}\,nr^3-\sqrt{3}\sqrt{2}\,nr$
$=\sqrt{3}\,nr(2n^2+r^2-\sqrt{2})$
التحقق : $\sqrt{3}\,nr(2n^2+r^2-\sqrt{2})$
$=2\sqrt{3}\,n^3r+\sqrt{3}\,nr^3-\sqrt{3}\sqrt{2}\,nr$
$=\sqrt{12}\,n^3r+\sqrt{3}\,(nr^3-\sqrt{2}\,nr)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

21 $\frac{1}{7}(y+1)+\frac{1}{3}y^2(y+1)=(y+1)\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3}y^2\right)$

22 $\sqrt{3}\,k(x^2+1)-\sqrt{5}\,v(x^2+1)=(x^2+1)(\sqrt{3}\,k-\sqrt{5}\,v)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل :

23 $5x^3-10x^2+10x-20=(5x^3-10x^2)+(10x-20)$
$=5x^2(x-2)+10(x-2)=(x-2)(5x^2+10)$
التحقق : $(x-2)(5x^2+10)=5x^3+10x-10x^2-20=5x^3-10x^2+10x-20$

24 $49-7Z+35Z^2-5Z^3=(49-7Z)+(35Z^2-5Z^3)$
$=7(7-Z)+5Z^2(7-Z)=(7-Z)(7+5Z^2)$
التحقق : $(7-Z)(7+5Z^2)=49+35Z^2-7Z-5Z^3=49-7Z+35Z^2-5Z^3$

25 $3t^3k+9k^2s-6t^3s-18s^2k=(3t^3k+9k^2s)+(-6t^3s-18s^2k)$
$=3k(t^3+3ks)-6s(t^3-3ks)=(t^3+3ks)(3k-6s)$

التحقق : $(t^3+3ks)(3k-6s)=3t^3k-6t^3s+9k^2s-18s^2k=3t^3k+9k^2s-6t^3s-18s^2k$

26 $2y^4-\sqrt{12}\,y^3+\sqrt{2}\,y-\sqrt{6}=(2y^4-\sqrt{12}\,y^3)+(\sqrt{2}\,y-\sqrt{6})$
$=(2y^4-2\sqrt{3}\,y^3)+(\sqrt{2}\,y-\sqrt{2}\sqrt{3})$
$=2y^3(y-\sqrt{3})+\sqrt{2}(y-\sqrt{3})=(y-\sqrt{3})(2y^3-\sqrt{2})$

التحقق : $(y-\sqrt{3})(2y^3-\sqrt{2})=2y^4-\sqrt{2}y-2\sqrt{3}y^3-\sqrt{6}=2y^4-2\sqrt{3}\,y^3+\sqrt{2}\,y-\sqrt{6}$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

27 $12x^3-4x^2+3-9x=(12x^3-4x^2)+(3-9x)=4x^2(3x-1)+3(1-3x)$
$=4x^2(3x-1)+3(-1)(3x-1)=4x^2(3x-1)-3(3x-1)$
$=(3x-1)(4x^2-3)$

28 $4r^3-15r^2-3r+12=(4r^3-16r^2)+(-3r+12)=4r^2(r-4)+3(-r+4)$
$=4r^2(r-4)+3(-1)(r-4)=4r^2(r-4)-3(r-4)$
$=(r-4)(4r^2-3)$

تدرب وحل مسائل حياتية

30 الطاقة الشمسية : الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السليكون تمتص الضوء من الشمس . ما أبعاد اللوح الشمسي اذا كانت مساحة $3x(x-4)-22(x-4)$ أمتار مربعة ؟

الحل :

$A=3x(x-4)-22(x-4)=(x-4)(3x-22)$

ابعاد اللوح الشمسي هي : $(x-4)\,,(3x-22)$

31 طائر الفلامنكو : طائر الفلامنكو , من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مرورا بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على غذاء من المسطحات المائية . اذا كانت مساحة المسطح
المائي الذي غطته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2+14y+7(2y+7)$ أمتار مربعة . فما شكل المسطح وما أبعاده ؟

الحل :

$A=4y^2+14y+7(2y+7)=2y(2y+7)+7(2y+7)=(2y+7)(2y+7)=(2y+7)^2$

شكل المسطح هو مربع . أبعاد المسطح هو : $(2y+7)\,,(2y+7)$

32 ساعة بغداد : ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد
وأنشئت في سنة 1994 م . ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة اذا علمت أن مساحتها $Z^2\pi-3Z\pi-\pi(3Z-9)$ ؟

الحل :

$A=Z^2\pi-3Z\pi-\pi(3Z-9)=Z\pi(Z-3)-3\pi(Z-3)=(Z-3)(Z\pi-3\pi)$

$A=(Z-3)\pi(Z-3)\quad\Rightarrow\quad A=\pi(Z-3)^2\quad,\quad A=r^2\pi$

$r^2\pi=\pi(Z-3)^2\quad\}\div\pi$

$\frac{r^2\pi}{\pi}=\frac{\pi(Z-3)^2}{\pi}\quad\Rightarrow\quad r^2=(Z-3)^2\quad\Rightarrow\quad r=(Z-3)$ نصف القطر

فـــــكر

32 تحد : حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صور :

i) $5x^5y + 7y^3Z - 10x^5Z - 14Z^2y^2 = (5x^5y - 10x^5Z) + (7y^3Z - 14Z^2y^2)$
$= 5x^5(y - 2Z) + 7y^2Z(y - 2z) = (y - 2Z)(5x^5 + 7y^2Z)$

---

33 أصحح الخطأ : كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي :

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}\,t^2 - t)$

اكتشف خطأ ابتسام وصححه .

الحل :

$\sqrt{2}t^4 - \sqrt{24}\,t^3 + t^2 - \sqrt{12}\,t = (\sqrt{2}t^4 - 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\,t^3) + (t^2 - 2\sqrt{3}\,t)$
$= \sqrt{2}\,t^3(t - 2\sqrt{3}) + t(t - 2\sqrt{3}) = (\sqrt{2}\,t^3 + t)(t - 2\sqrt{3})$

---

34 حس عددي : ما العدد المجهول في المقدار : $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \square)$

الحل :

$x^2 + 3x + 5x + 15 = (x^2 + 3x) + (5x + 15) = x(x + 3) + 5(x + 3) = (x + 3)(x + 5)$

العدد المجهول هو : 5

اكتب ناتج طرح المقدار : $(x + y)(x - y)$ من المقدار : $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة

الحل :

$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = x^2 + xy + yx + y^2 - (x^2 - y^2)$
$= x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + y^2$
$= 2xy + 2y^2 = 2y(x + y)$

الطريقة الثانية :

$(x + y)(x + y) - (x + y)(x - y) = (x + y)[x + y - (x - y)]$
$= (x + y)(x + y - x + y) = (x + y)2y$

الدرس [2 – 3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

[2 – 3 – 1] تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين

تتكون طريقة الفرق بين مربعين من قوسين أحدهما موجب والأخر سالب . أي أن :

القوس الأول = الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني
القوس الثاني = الجذر التربيعي للحد الأول – الجذر التربيعي للحد الثاني
أي أن تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين :

$(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$

ملاحظة : اذا كان المقدار بالصورة $x^2 + y^2$ فأنه لا يتحلل .
ملاحظة : نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

مثال // جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع .

الحل :

$$x^2 - 400 = x^2 - (20)^2 = (x + 20)(x - 20)$$

طول ساحة كرة القدم : $(x + 20)$ متراً وعرضها : $(x - 20)$ متراً .

مثال // حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين :

1 $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

2 $36y^2 - Z^2 = (6y + Z)(6y - Z)$

3 $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

4 $h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}\,h + \sqrt{7}\,v)(\sqrt{5}\,h - \sqrt{7}\,v)$

5 $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$
$= 2xy(2x + y)(2x - y)$

6 $2x^2 - Z^2 = (\sqrt{2}\,x + Z)(\sqrt{2}\,x - Z)$

7 $12 - t^2 = (\sqrt{12} + t)(\sqrt{12} - t)$
$= (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

8 $\frac{1}{16}Z^4 - \frac{1}{81} = (\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{4}Z^2 - \frac{1}{9})$
$= (\frac{1}{4}Z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{2}Z + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}Z - \frac{1}{3})$

تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل [2 – 3 – 2]

هي تحليل مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل .

$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$, $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$

يكون المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ مربعا كاملا اذا تحققت الشروط التالية :

1) يجب أن يكون أشارة الحد الأول والحد الأخير موجبة ومربع كامل (له جذر تربيعي) .

2) نطبق قانون الحد الوسط (الثاني) : $bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

3) اذا كان المقدار مربعا كاملا فأن تحليله يكون : $ax^2 \pm bx + c = (\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c})^2$

$\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني) .

حيث ax^2 الحد الأول , bx : الحد الوسط (الثاني) , c : الحد الأخير (الثالث)

مثال // حلل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل :

[1] $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ [2] $y^2 - 4y + 4 = (y - 2)^2$ [3] $16Z^2 - 8Z + 1 = (4Z - 2)^2$

مثال // حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

[1] $x^2 + 10x + 25$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(25)}$
$= 2(x)(5) = 10x$ المقدار كامل
$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$

[2] $y^2 + 14y + 36$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y \neq 14y$
المقدار ليس مربع كامل

[3] $4 - 37v + 9v^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bv = 2\sqrt{(9v^2)(4)} = 2(3v)(2) = 12y \neq 37y$
المقدار ليس مربع كامل

[4] $9h^2 - 6h + 3$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bh = 2\sqrt{(9h^2)(3)} = 2(3h)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,h$
$\neq 6h$
المقدار ليس مربع كامل

ملاحظة

لإيجاد الحد المفقود في المقدار الجبري : ax^2+bx+c ليصبح مربعا كاملا نطبق قانون الحد الوسط :

$$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$$

مثال / اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : ax^2+bx+c ليصبح مربعا كاملا وحلله

[1] $25x^2 - \dots\dots + 49$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} = 2(5x)(7) = 70x$

$25x^2 - 70x + 49 = (5x-7)^2$

[2] $\dots\dots + 8x + 16$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)}$ بتربيع الطرفين

$64x^2 = 4(ax^2)(16) \implies 64x^2 = 64(ax^2)$

$ax^2 = \frac{64x^2}{64} = x^2 \implies x^2 + 8x + 16$

$= (x+4)^2$

[3] $y^2 + 14y + \dots\dots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$14y = 2\sqrt{(y^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$196y^2 = 4y^2(c) \implies c = \frac{196y^2}{4y^2} = 49$

$y^2 + 14y + 49 = (y+7)^2$

تأكد من فهمك

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين :

1 $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

2 $36 - 4x^2 = (6+2x)(6-2x)$

3 $h^2 - v^2 = (h+v)(h-v)$

4 $9m^2 - 4n^2 = (3m+2n)(3m-2n)$

5 $27x^3Z - 3xZ^3 = 3xZ(9x^2 - Z^2)$
$= 3xZ(3x+Z)(3x-Z)$

6 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{4}\right)$

حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل :

7 $y^2 - 8y + 16 = (y-4)^2$

8 $9Z^2 - 6Z + 1 = (3Z-1)^2$

9 $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3 = \left(v + \sqrt{3}\right)^2$

10 $4h^2 - 20h + 25 = (2h-5)^2$

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

11 $x^2 + 18x + 81$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(x^2)(81)}$

$= 2(x)(9) = 18x$ المقدار مربع كامل

$x^2 + 18x + 81 = (x + 9)^2$

12 $16 - 14v + v^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(v^2)(16)}$

$= 2(v)(4) = 8v \neq 14v$ المقدار ليس مربع كامل

13 $64h^2 - 48h - 9$

الحل :

المقدار ليس مربع كامل لأن إشارة الحد الأخير سالبة

14 $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4t^2)(3)}$

$= 2(2t)(\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}\,t$ المقدار مربع كامل

$3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2 = (\sqrt{3} - 2t)^2$

كتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

15 $\cdots\cdots + 14y + 49$

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$14y = 2\sqrt{(ay^2)(49)}$ بتربيع الطرفين

$196y^2 = 4(ay^2)(49) \Rightarrow 196y^2 = 196(ay^2)$

$ay^2 = \frac{196y^2}{196} = y^2 \Rightarrow y^2 + 14y + 49$

$= (y + 7)^2$

16 $Z^2 + 4Z + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$4Z = 2\sqrt{(Z^2)(C)}$ بتربيع الطرفين

$16Z^2 = 4Z^2(C) \Rightarrow C = \frac{16Z^2}{4Z^2} = 4$

$Z^2 + 4Z + 4 = (Z + 2)^2$

17 $3 - \cdots\cdots + 9x^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(9x^2)(3)} = 2(3x)(\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}\,x$

$3 - 6\sqrt{3}\,x + 9x^2 = (\sqrt{3} - 3x)^2$

18 $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$2\sqrt{5}\,x = 2\sqrt{(4x^2)(C)}$ بتربيع الطرفين

$20x^2 = 4(4x^2)(C) \Rightarrow 20x^2 = 16x^2(C)$

$C = \frac{20x^2}{16x^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + \frac{5}{4}$

$= \left(2x + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

تدرب وحل التمرينات

حل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

19 $25 - 4x^2 = (5 + 2x)(5 - 2x)$

20 $y^2 - 121 = (y + 11)(y - 11)$

21 $x^2 - 16Z^2 = (x + 4Z)(x - 4Z)$

22 $12 - 3t^2 = 3(4 - t^2) = 3(2 + t)(2 - t)$

23 $8y^3x - 2x^3y = 2xy(4y^2 - x^2)$

$= 2xy(2y + x)(2y - x)$

24 $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}(2y^2 - 1) = \frac{1}{8}(\sqrt{2}y + 1)\left(\sqrt{2}\,y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

25 $\frac{1}{3}Z^5 - \frac{1}{12}Z = \frac{1}{12}Z(4Z^4 - 1)$

$= \frac{1}{12}Z(2Z^2 + 1)(\sqrt{2}Z + 1)(\sqrt{2}Z - 1)$

26 $4x^2 + 20x + 25 = (2x + 5)^2$

27 $3Z^2 - 6Z + 3 = 3(Z^2 - 2Z + 1)$

$= 3(Z - 1)^2$

28 $16n^2 + 8\sqrt{3}\,n + 3 = (4n + \sqrt{3})^2$

29 $4t^3 - 12t^2 + 9t = t(4t^2 - 12t + 9)$
$= t(2t - 3)^2$

30 $1 - 4m + 4m^2 = (1 - 2m)^2$

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعا كاملا وحلله :

31 $4x^2 + 18x + 16$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} = 2\sqrt{(4x^2)(16)}$
$= 2(2x)(4) = 16x \neq 18x$
المقدار ليس مربع كامل

32 $y^2 + 10y + 25$

SOL :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} =$
$by = 2\sqrt{(y^2)(25)} = 2(y)(5) = 10y$ مربع كامل
$y^2 + 10y + 25 = (y + 5)^2$

33 $49 - 7v + v^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bv = 2\sqrt{(v^2)(49)} = 2(v)(7) = 14v \neq 7v$
المقدار ليس مربع كامل

34 $2h^2 - 12h - 18$

الحل :

المقدار ليس مربع كامل لأن اشرة الحد الأخير سالبة

35 $4v^2 + 4v + 4$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bv = 2\sqrt{(4v^2)(4)} = 2(2v)(2) = 8v \neq 4v$
المقدار ليس مربع كامل

36 $3 - 2\sqrt{3}\,Z + Z^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bZ = 2\sqrt{(Z^2)(3)} = 2(Z)(\sqrt{3})$
$= 2\sqrt{3}\,Z$ المقدار مربع كامل
$3 - 2\sqrt{3}\,Z + Z^2 = (\sqrt{3} - Z)^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا وحلله :

37 $y^2 + \cdots\cdots + 36$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$by = 2\sqrt{(y^2)(36)} = 2(y)(6) = 12y$
$y^2 + 12y + 36 = (y + 6)^2$

38 $25 - 20x + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$20x = 2\sqrt{(ax^2)(25)}$ بتربيع الطرفين
$400x^2 = 4(ax^2)(25) \implies 400x^2 = 100(ax^2)$
$ax^2 = \frac{400x^2}{100} = 4x^2 \implies 25 - 20x + 4x^2$
$= (5 - 2x)^2$

39 $4v^2 + 8v + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$8v = 2\sqrt{(4v^2)(c)}$ بتربيع الطرفين
$64v^2 = 4(4v^2)(c) \implies 64v^2 = 16v^2(c)$
$c = \frac{64v^2}{16v^2} = 4 \implies 4v^2 + 8v + 4 = (2v + 2)^2$

40 $5 - \cdots\cdots + 16x^2$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$
$bx = 2\sqrt{(16x^2)(5)} = 2(4x)(\sqrt{5}) = 8\sqrt{5}\,x$
$5 - 8\sqrt{5}\,x + 16x^2 = (\sqrt{5} - 4x)^2$

41 $81 + 18Z + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$18Z = 2\sqrt{(aZ^2)(81)}$ بتربيع الطرفين

$324Z^2 = 4(aZ^2)(81) \implies 324Z^2 = 324(aZ^2)$

$aZ^2 = \dfrac{324Z^2}{324} = Z^2 \implies 81 + 18Z + Z^2$

$= (9 + Z)^2$

42 $9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + \cdots\cdots$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$6\sqrt{2}\,h = 2\sqrt{(9h^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$72h^2 = 4(9h^2)(c) \implies 72h^2 = 36h^2(c)$

$c = \dfrac{72h^2}{36h^2} = 2 \implies 9h^2 + 6\sqrt{2}\,h + 2 = (3h + \sqrt{2})^2$

تدرب وحل مسائل حياتية

[43] مئذنة الملوية : وتقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية وتعد احدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد فهي إحدى اثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 + 8x + 16$: مترا مربعا . ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟

الحل :

$A = x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$ طول ضلع القاعدة

---

[44] مزرعة أبقار : لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر وسعها لتصبح مستطيلة الشكل الضلع الآخر فأصبحت مساحة المزرعة $x^2 - 81$ مترا مربعا . ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟

الحل :

$A = x^2 - 81 = (x + 9)(x - 9)$

طول المزرعة $(x + 9)$, عرضها $(x - 9)$

---

[43] لوحة فنية : رسم بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية . أيمثل مقدار مساحة اللوحة الفنية مربعا كاملا أم لا ؟

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(4x^2)(9)} = 2(2x)(3) = 12x$ لا يمثل مربعا كاملا

فـــكر

[46] تحد : هل المقدار الاتي يمثل مربعا كاملا ام لا ؟ علل اجابتك :

i) $\dfrac{1}{9}x^2 - \dfrac{1}{6}x + \dfrac{1}{16}$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{\left(\dfrac{1}{9}x^2\right)\left(\dfrac{1}{16}\right)} = 2\left(\dfrac{1}{3}x\right)\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{1}{6}x$

المقدار مربع كامل

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{4}\right)^2$$

[47] أصحح الخطأ : قالت منتهى أن المقدار : $(2x-1)(2x+1)$ هو تحليل للمربع الكامل : $4x^2-4x+1$ حدد خطأ منتهي وصححه .

الحل :

المقدار : $(2x-1)(2x+1)$ هو ليس تحليل للمربع الكامل

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2$$

[48] حس عددي : أيمثل المقدار : $9x^2+12x-4$ مربعا كاملا أم لا ؟ وضح اجابتك .

الحل : المقدار لا يمثل مربعا كاملا لأن إشارة الحد الأخير (الثالث) سالبة .

أكتب // تحليل للمقدار : $4x^2-8x+4$

الحل :

$$4x^2-8x+4=(2x)^2-2(x\times 4)+(2)^2=(2x-2)^2$$

[2 − 4]	تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

[2 − 4 − 1]	تحليل المقدار الجبري : x^2+bx+c

طريقة حل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة :

1) تتكون من قوسين صغيرين نضع إشارة الحد الثاني في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في

القوس الثاني .

2) نحلل الحد الأول الى حاصل ضرب حدين متشابهين ووضع كل حد في بداية كل قوس .

3) نحلل الحد الأخير (الثالث) الى حاصل ضرب عددين حيث اذا كانت الإشارات متشابهة نجمع أما اذا كانت الاشارات مختلفة

نطرح .

4) للتأكد من صحة الحل يجب ان يكون حاصل ضرب الوسطين $\pm$ حاصل ضرب الطرفين = الحد الوسط

مثال // ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنح التي مساحتها $x^2+10x+21$ سنتمترا مربعا ؟

الحل :

الحد لوسط : $+10x=+7x+3x$

$$x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$$

مثال // حلل المقادير الآتية الى أبسط صورة :

$y^2 + y - 12 = (y+4)(y-3)$ [1] الحد الوسط : $-3y + 4y = +y$

$x^2 - 9x + 18 = (x-3)(x-6)$ [2] الحد الوسط : $-6x - 3x = -9x$

$y^2 + 6y - 27 = (y+9)(y-3)$ [3] الحد الوسط : $-3y + 9y = +6y$

$x^2 - xy - 20y^2 = (x-5y)(x+4y)$ [4] الحد الوسط : $+4xy - 5xy = -xy$

$15 - 8Z + Z^2 = (5-Z)(3-Z)$ [5] الحد الوسط : $-5Z - 3Z = -8Z$

تحليل المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ [2 − 4 − 2]

مثال // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

$6x^2 + 17x + 7 = (2x+1)(3x+7)$ [1] الحد الوسط : $+14x + 3x = +17x$

$7y^2 - 26y - 8 = (y-4)(7y+2)$ [2] الحد الوسط : $+2y - 28y = -26y$

$3Z^2 - 17Z + 10 = (3Z-2)(Z-5)$ [3] $-15Z$

الحد الوسط : $2Z = -17Z$

$4v^2 - v - 3 = (v-1)(4v+3)$ [4] الحد الوسط : $+3V - 4V = -V$

$15 + 11h + 2h^2 = (5+2h)(3+h)$ [5] الحد اوسط : $+5h + 6h = +11h$

$3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x-y)(x-3y)$ [6] الحد الوسط : $-9xy - xy = -10xy$

$6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x-7)(2x-3)$ [7] : $-3x - 14x = -17x$

الحد الوسط

تأكد من فهمك

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

1. $x^2 + 6x + 8 = (x+2)(x+4)$
2. $1 - 2Z + Z^2 = (1-Z)(1-Z)$
3. $x^2 - 13x + 12 = (x-1)(x-12)$
4. $3 + 2Z - Z^2 = (1+Z)(3-Z)$
5. $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1)$
6. $15 - 8Z + Z^2 = (5-Z)(3-Z)$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

7. $2x^2 + 5x + 3 = (2x+3)(x+1)$
8. $3y^2 - 14y + 8 = (3y-2)(y-4)$
9. $3x^2 - 10x + 8 = (3x-4)(x-2)$
10. $8 - 25Z + 3Z^2 = (8-Z)(1-3Z)$
11. $5y^2 - y - 6 = (5y-6)(y+1)$
12. $6 + 29Z - 5Z^2 = (1+5Z)(6-Z)$
13. $x^2 - 9xy + 20y^2 = (x-4y)(x-5y)$
14. $3y^2 - 19yx - 14x^2 = (y-7x)(3y+2x)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

15. $x^2 + 9x + 20 = (x+5)(x+4)$
16. $y^2 - 12y + 20 = (y-2)(y-10)$
17. $6x^2 - 7x + 2 = (2x-1)(3x-2)$
18. $20 - 7y - 3y^2 = (5-3y)(4+y)$

تدرب وحل التمرينات

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية بأبسط صورة :

19 $x^2+9x+14=(x+7)(x+2)$

20 $y^2-5y+6=(y-3)(y-2)$

21 $24-2Z-Z^2=(4-Z)(6+Z)$

22 $3+2Z-Z^2=(1+Z)(3-Z)$

23 $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$

24 $36-15Z+Z^2=(12-Z)(3-Z)$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

25 $2x^2+12x-14=2(x^2+6x-7)$
$=2(x+7)(x-1)$

26 $4y^2-6y+2=2(2y^2-3y+1)$
$=2(2y-1)(y-1)$

27 $10+9Z-9Z^2=(2+3Z)(5-3Z)$

28 $2x^2+3x+1=(2x+1)(x+1)$

29 $13y^2-11y-2=(y-1)(13y+2)$

30 $50-20Z+2Z^2=2(25-10Z+Z^2)$
$=2(5-Z)(5-Z)$

31 $30x^2-xy-y^2=(5x-y)(6x+y)$

32 $16y^2-2yx-3x^2=(2y-x)(8y+3x)$

33 $6Z^2-2Zx-4x^2=2(3Z^2-Zx-2x^2)$
$=2(Z-x)(3Z+2x)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :

34 $x^2+x-20=(x-4)(x+5)$

35 $x^2-x-56=(x+7)(x-8)$

36 $35+3y-2y^2=(5-y)(7+2y)$

37 $3x^2-5x+2=(x-1)(3x-2)$

تدرب وحل مسائل حياتية

[38] قلعة الأخيضر : قلعة الأخيضر هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمة الى يومنا هذا الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل . ما أبعاد هذا السور الذي يحيط بالقلعة
التي مساحتها $6x^2-39x+60$ مترا مربعا ؟

الحل :

$6x^2-39x+60=3(2x^2-13x+20)=3(2x-5)(x-4)$

أبعاد السور هو : $(x-4)$, $(2x-5)$

---

[39] العاب ترفيهية : تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب ويمثل المقدار $5t^2+5t-3$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب اذ t يمثل زمن الحركة . وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتها في المرة
الأولى . حلل المقدار .

الحل :

$5t^2+5t-30=5(t^2+t-6)=5(t+6)(t-5)$

[40] مترو الأنفاق : يعد مترو الأنفاق نظام سكك حديد تحت الأرض تسير القطارات وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة
وذات الكثافة السكانية العالية ويتألف كل قطار من عدة عربات فإذا كان المقدار : $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع فما أبعادها ؟

الحل :

$14y^2 - 23y + 3 = (7y - 1)(2y - 3)$

أبعاد العربة هي : $(7y - 1)$, $(2y - 3)$

فـــــكر

[41] تحد : حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى أبسط صورة :

i) $4x^3 + 4x^2 - 9x - 9 = (4x^3 + 4x^2) + (-9x - 9) = 4x^2(x + 1) - 9(x + 1)$
$= (x + 1)(4x^2 - 9) = (x + 1)(2x + 3)(2x - 3)$

[42] أصحح الخطأ : حلل سعد المقدار : $6Z^2 - 16Z - 6$ كما يأتي : $6Z^2 - 16Z - 6 = (3Z - 1)(2Z + 6)$ اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل :

خطأ الحد الوسط $-16Z \neq +16Z = -2Z + 18Z$

الحد الوسط : $-16Z = -18Z + 2Z$ $\quad 6Z^2 - 16Z - 6 = (2Z - 6)(3Z + 1)$

[61] حس عددي : أيمكن تحديد ما اذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار : $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار ؟ وضح اجابتك .

الحل :

تكون إشارة القوسين متشابهة (سالبة) حيث نضع إشارة الحد الثاني $(-)$ في القوس الأول ونضرب إشارة الحد الثاني في إشارة الحد الثالث ونضعها في القوس الثالث $(-)$

أكتب // الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا :
$6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z \cdots 8)(2Z \cdots 7)$

الحل :

الحد الوسط : $+5Z = -16Z + 21Z$ $\quad 6Z^2 + 5Z - 56 = (3Z - 8)(2Z + 7)$

الدرس [5 – 2] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين

[2 – 5 – 1] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, $216 = 6^3$

مثال // ما مجموع حجمي مكعبي روبك الأول طول ضلعه 3cm والثاني طول ضلعه 4cm

الحل :

حجم المكعب $V = L^3$

$$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3 = (3+4)(3^2 - 3\times 4 + 4^2)$$
$$= (7)(9 - 12 + 16) = (7)(13) = 91\ cm^3$$

مثال // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

[1] $x^3 + 5^3 = (x+5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x+5)(x^2 - 5x + 25)$

[2] $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$

[3] $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3 = (2Z+3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

[4] $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

[5] $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{5}\right)\left(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25}\right)$

[6] $\frac{1}{2}y^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t+2)(t^2 - 2t + 4)$

[7] $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

[2 – 5 – 2] تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين

هو تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين :

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$1 = 1^3$, $8 = 2^3$, $27 = 3^3$, $64 = 4^3$, $125 = 5^3$, $216 = 6^3$

مثال // حوض مكعب الشكل طول ضلعه 1m مملوء بالماء أفرغ الماء منه في حوض اخر اكبر منه مكعب الشكل طول ضلعه 1.1m ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج اليها ليمتلئ الحوض الكبير ؟

الحل :

كمية الماء الإضافية اللازمة = حجم المكعب الكبير – حجم المكعب الصغير

$$v_1 - v_2 = (1.1)^3 - 1^3 = (1.1-1)[(1.1)^2 - 1.1\times 1 + 1^2]$$
$$= (0.1)(1.21 + 1.1 + 1) = (0.1)(3.31) = 0.331 m^3$$

مثال // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

[1] $x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

[2] $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y-4)(y^2 + 4y + 16)$

[3] $27Z^3 - 8 = 3^3Z^3 - 2^3 = (3Z-2)(9Z^2 + 6Z + 4)$

[4] $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25}\right)$

[5] $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t-3)(t^2 + 3t + 9)$

[6] $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)(0.36 + 0.6n + n^2)$

[7] $1 - 0.125Z^3 = 1^3 - (0.5)^3Z^3 = (1 - 0.5Z)(1 + 0.5Z + 0.25Z^2)$

[8] $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)(16 + 4m + m^2)$

تأكد من فهمك

حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

1 $y^3 + 216 = y^3 + 6^3 = (y + 6)(y^2 - 6y + 36)$

2 $x^3 + Z^3 = (x + Z)(x^2 - xZ + Z^2)$

3 $125 + 8Z^3 = 5^3 + 2^3Z^3 = (5 + 2Z)(25 - 10Z + 4Z^2)$

4 $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8} = \frac{1}{3^3}x^3 + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right)$

5 $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16}\right)$

6 $\frac{1}{3}t^3 + 9 = \frac{1}{3}(y^3 + 27) = \frac{1}{3}(t^3 + 3^3) = \frac{1}{3}(t + 3)(t^2 - 3t + 9)$

7 $0.125 + v^3 = (0.5)^3 + v^3 = (0.5 + v)(0.25 - 0.5v + v^2)$

8 $1 + 0.008Z^3 = 1^3 + (0.2)^3Z^3 = (1 + 0.2Z)(1 - 0.2Z + 0.04Z^2)$

حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

9 $a^3 - 8^3 = (a - 8)(a^2 + 8a + 64)$

10 $8y^3 - 64 = 8(y^3 - 8) = 8(y^3 - 2^3) = 8(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$

11 $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8} = \frac{1}{c^3} - \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{4}\right)$

12 $\frac{1}{2}v^3 - 4 = \frac{1}{2}(v^3 - 8) = \frac{1}{2}(v^3 - 2^3) = \frac{1}{2}(v - 2)(v^2 + 2v + 4)$

13 $0.125 - m^3 = (0.5)^3 - m^3 = (0.5 - m)(0.25 + 0.5m + m^2)$

14 $25 - \frac{1}{5}n^3 = \frac{1}{5}(125 - n^3) = \frac{1}{5}(5^3 - n^3) = \frac{1}{5}(5 - n)(25 + 5n + n^2)$

15 $3b^3 - 81 = 3(b^3 - 27) = 3(b^3 - 3^3) = 3(b - 3)(b^2 + 3b + 9)$

16 $0.216v^3 - 0.008t^3 = (0.6)^3v^3 - (0.2)^3t^3 = (0.6v - 0.2t)(0.36v^2 + 0.12vt + 0.04t^2)$

تدرب وحل التمرينات

حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

17 $6^3 + x^3 = (6 + x)(6 - 6x + x^2)$

18 $27 + 64x^3 = 3^3 + 4^3x^3 = (3 + 4x)(9 - 12x + 16x^2)$

19 $125y^3 + 1 = 5^3y^3 + 1^3 = (5y + 1)(25y^2 - 5y + 1)$

20 $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3 = \frac{1}{4^3} + \frac{2^3}{5^3}y^3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}y\right)\left(\frac{1}{16} - \frac{2}{20}y + \frac{4}{25}y^2\right)$

21 $\frac{1}{b^3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{b^3} + \frac{1}{2^3} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{2b} + \frac{1}{4}\right)$

22 $\frac{1}{5}v^3 + 25 = \frac{1}{5}(v^3 + 125) = \frac{1}{5}(v^3 + 5^3) = \frac{1}{5}(v + 5)(v^2 - 5v + 25)$

23 $0.027 + 27n^3 = (0.3)^3 + 3^3n^3 = (0.3 + 3n)(0.09 + 0.9n + 9n^2)$

24 $0.125x^3 + 0.008y^3 = (0.5)^3x^3 + (0.2)^3y^3 = (0.5x + 0.2y)(0.25x^2 - 0.1xy + 0.04y^2)$

حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

25 $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)(y^2 + 4y + 16)$

26 $27y^3 - 8 = 3^3y^3 - 2^3 = (3y - 2)(9y^2 + 6y + 4)$

27 $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8} = \frac{1}{x^3} - \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{1}{x} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2x} + \frac{9}{4}\right)$

28 $9 - \frac{1}{3}n^3 = \frac{1}{3}(27 - n^3) = \frac{1}{3}(3^3 - n^3) = \frac{1}{3}(3 - n)(9 + 3n + n^2)$

29 $0.001 - v^3 = (0.1)^3 - v^3 = (0.1 - v)(0.01 + 0.1v + v^2)$

30 $4 - \frac{1}{2}t^3 = \frac{1}{2}(8 - t^3) = \frac{1}{2}(2^3 - t^3) = \frac{1}{2}(2 - t)(4 + 2t + t^2)$

31 $25c^3 - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(125c^3 - 1) = \frac{1}{5}(5^3c^3 - 1^3) = \frac{1}{5}(5c - 1)(25c^2 + 5c + 1)$

32 $0.001x^3 - 0.008y^3 = (0.1)^3x^3 - (0.2)^3y^3$
$= (0.1x - 0.2y)(0.01x^2 + 0.02xy + 0.04y^2)$

تدرب وحل مسائل حياتية

[33] مكتبة : مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في المانيا كما أنها من أكثر المكتبات تماشيا مع متطلبات التعليم الحديثة . بناية المكتبة على شكل مكعب طول ضلعه $\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2}$ متر . حلل المقدار الذي يمثل طول الضلع .

الحل :

$\frac{1}{2}y^3 - 13\frac{1}{2} = \frac{1}{2}y^3 - \frac{27}{2} = \frac{1}{2}(y^3 - 27) = \frac{1}{2}(y^3 - 3^3) = \frac{1}{2}(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$

[34] حوض سمك : حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ مترا مكعبا وضع في داخل حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب ملئ بالماء كاملا . اكتب مقدار حجم الماء ثم حلله .

الحل :

$$25x^3+\frac{1}{5}=\frac{1}{5}(125x^3+1)=\frac{1}{5}(5^3x^3+1^3)=\frac{1}{5}(5x+1)(25x^2-5x+1)$$

[35] سكن : بدأت المنازل تأخذ أشكالا مختلفة في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصممت هذه المنازل عل شكل مكعبات . فاذاكان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب . اكتب حجم المنزلين معا ثم حلل المقدار .

الحل :

$$v_1+v_2=\frac{8}{a^3}+\frac{27}{b^2}=\frac{2^3}{a^3}+\frac{3^3}{b^3}=\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)\left(\frac{4}{a^2}-\frac{6}{ab}+\frac{9}{b^3}\right)$$

فـــكر

[36] تحد : حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $0.002Z^3-0.016y^3=0.002(Z^3-8y^3)=0.002(Z^3-(2)^3y^3)$

$=0.002(Z-2y)(Z^2+2Zy+4y^2)$

[37] صحح الخطأ : حللت بشرى المقدار : $8v^3-0.001$ كما يأتي : $8v^3-0.001=(2v+0.1)(4v^2-0.4v+0.01)$

اكتشف خطأ بشرى وصححه .

الحل :

$$8v^3-0.001=2^3v^3-(0.1)^3=(2v-0.1)(4v^2+0.2v+0.01)$$

[38] حس عددي : هل يمكن جمع العددين 8, 27 بطريقة تحليل مجموع مكعبين ؟ وضح اجابتك

الحل : نعم

$$8+27=2^3+3^3=(2+3)(4-6+9)=(5)(7)=35$$

اكتب // الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحا : $125-x^3=(5\cdots x)(25\cdots 5x\cdots x^2)$

الحل :

$$125-x^3=(5-x)(25+5x+x^2)$$

الدرس [6 – 2] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

[2 – 6 – 1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها

ملاحظـــة :

1) نحلل كل حدودية بطرق التحليل السابقة للبسط والمقام .
2) اذا وجدت علامة القسمة (÷) نبدل القسمة الى ضرب (×)وقلب الحد ما بعد القسمة .
3) نختصر الحدود المتشابهة بين البسط والمقام .
4) نضرب البسط في البسط والمقام في المقام .

مثال // اشترى حسن مجموعة من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار فكانت كلفة باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار .
اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة الى الثمن الكلي لباقات الزهور وبأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x-6}{x^2-x-6} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

مثال // أكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\dfrac{y^2-4}{y^2-4y+4} = \dfrac{(y+2)(y-2)}{(y-2)(y-2)} = \dfrac{y+2}{y-2}$

[2] $\dfrac{5Z+10}{Z-3} \times \dfrac{Z^3-27}{Z^2+6Z+8} = \dfrac{5(Z+2)}{Z-3} \times \dfrac{(Z-3)(Z^2+2Z+9)}{(Z+2)(Z+4)} = \dfrac{5(Z^2+3Z+9)}{Z+4}$

[3] $\dfrac{16-x^2}{3x+5} \times \dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+3x-4} = \dfrac{(4+x)(4-x)}{3x+5} \times \dfrac{(3x+5)(x-1)}{(x+4)(x-1)} = 4 - x$

[4] $\dfrac{8+t^3}{4-2t+t^2} \div \dfrac{(2+t)^3}{t^2+9t+14} = \dfrac{8+t^3}{4-2t+t^2} \times \dfrac{t^2+9t+14}{(2+t)^3}$

$$= \frac{(2+t)(4-2t+t^2)}{4-2t+t^2} \times \frac{(t+2)(t+7)}{(2+t)^2(2+t)} = \frac{t+7}{2+t} = \frac{t+7}{t+2}$$

[2 – 6 – 2] تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها .

خطوات الحل :

1) نحلل البسط والمقام بأحدي طرق التحليل السابقة ونختصر العوامل المتشابهة بين بسط ومقام نفس الحدودية .
2) نلاحظ المقامات اذا كانت متشابهة نجري عملية الجمع أو الطرح للبسط وبأخذ احدى المقامات .
3) اذا كانت المقامات مختلفة (غير متشابهة) نوحدها ذلك بأخذ المضاعف المشترك الأصغر للمقامات وبدون تكرار واستخراج البسط الجديد .

مثال // اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\dfrac{y^2}{y+2} - \dfrac{4}{y+2} = \dfrac{y^2-4}{y+2} = \dfrac{(y+2)(y-2)}{y+2} = y - 2$

[2] $\dfrac{7x-14}{x^2-4} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{7}{x+2} + \dfrac{5}{x+2} = \dfrac{7+5}{x+2} = \dfrac{12}{x+2}$

[3] $\frac{4Z}{2Z-5}-\frac{Z}{Z+3}=\frac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

$=\frac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}=\frac{Z(2Z+17)}{(2Z-5)(Z+3)}$

[4] $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8}+\frac{12}{3t-6}=\frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)}+\frac{12}{3(t-2)}=\frac{1}{t-2}+\frac{4}{t-2}=\frac{5}{t-2}$

[5] $\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{v^2-16}=\frac{8}{v+4}+\frac{2}{v-4}-\frac{1}{(v+4)(v-4)}=\frac{8(v-4)+2(v+4)-1}{(v+4)(v-4)}$

$=\frac{8v-32+2v+8-1}{(v+4)(v-4)}=\frac{10v-25}{(v+4)(v-4)}=\frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$

تأكد من فهمك

اكتب كل مقدار من المقادير التلية بأسط صورة :

[1] $\frac{2Z^2-4Z+2}{Z^2-7Z+6}=\frac{2(Z^2-2Z+1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)(Z-1)}{(Z-6)(Z-1)}=\frac{2(Z-1)}{(Z-6)}$

[2] $\frac{y^3+27}{y^3-3y^2+9y}=\frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y(y^2-3y+9)}=\frac{y+3}{y}$

[3] $\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{x^2+5x+6}{25x^2-9}=\frac{5x+3}{x+3}\times\frac{(x+3)(x+2)}{(5x+3)(5x-3)}=\frac{x+2}{5x-3}$

[4] $\frac{Z^2+7Z-8}{Z-1}\times\frac{Z^2-4}{Z^2+6Z-16}=\frac{(Z+8)(Z-1)}{Z-1}\times\frac{(Z+2)(Z-2)}{(Z+8)(Z-2)}=Z+2$

[5] $\frac{x^2-9}{x^2-4x+4}\times\frac{x^2-4}{x^2-x-6}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-2)}\times\frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x+2)}=\frac{x+3}{x-2}$

[8] $\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\div\frac{y^2+y-2}{y^2+2y-3}=\frac{2y^2-2y}{y^2-9}\times\frac{y^2+2y-3}{y^2+y-2}=\frac{2y(y-1)}{(y+3)(y-3)}\times\frac{(y+3)(y-1)}{(y+2)(y-1)}=\frac{2y(y-1)}{(y-3)(y-2)}$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صوره

7 $\frac{2}{x^2-9}+\frac{3}{x^2-4x+3}=\frac{2}{(x+3)(x-3)}+\frac{3}{(x-3)(x-1)}=\frac{2(x-1)+3(x+3)}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

$=\frac{2x-2+3x+9}{(x+3)(x-3)(x-1)}=\frac{5x+7}{(x+3)(x-3)(x-1)}$

8 $\frac{2y^3-128}{y^3+4y^2+16y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y^3-64)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}=\frac{2(y-4)(y^2+4y+16)}{y(y^2+4y+16)}-\frac{y-1}{y}$

$=\frac{2(y-4)}{y}-\frac{y-1}{y}=\frac{2y-8-y+1}{y}=\frac{y-7}{y}$

9 $\frac{Z^2+Z+1}{Z^4-Z}-\frac{Z+3}{Z^2+2Z-3}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z^3-1)}-\frac{Z+3}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{Z^2+Z+1}{Z(Z-1)(Z^2+Z+1)}-\frac{1}{(Z-1)}$

$=\frac{1}{Z(Z-1)}-\frac{1}{(Z-1)}=\frac{1-Z}{Z(Z-1)}=\frac{-(Z-1)}{Z(Z-1)}=\frac{-1}{Z}$

10 $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}-1=\frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}-1=\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}=\frac{x+1-x+1}{x-1}=\frac{2}{x-1}$

11 $\frac{5y}{y^2-1}-\frac{6}{y^2-1}+\frac{y}{y^2-1}=\frac{5y-6+y}{y^2-1}=\frac{6y-6}{(y+1)(y-1)}=\frac{6(y-1)}{(y+1)(y-1)}=\frac{6}{y+1}$

12 $\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{Z^2+2Z-3}=\frac{3}{Z-1}+\frac{2}{Z+3}+\frac{8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{3(Z+3)+2(Z-1)+8}{(Z+3)(Z-1)}$

$=\frac{3Z+9+2Z-2+8}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5Z+15}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5(Z+3)}{(Z+3)(Z-1)}=\frac{5}{Z-1}$

تدرب وحل التمرينات

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة :

13 $\frac{x+5}{12x}\times\frac{6x-30}{x^2-25}=\frac{x+5}{12x}\times\frac{6(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{1}{2x}$

14 $\frac{y+3}{2y^2+6y+18}\times\frac{y^3-27}{y^2-9}=\frac{y+3}{2(y^2+3y+9)}\times\frac{(y-3)(y^2+3y+9)}{(y+3)(y-3)}=\frac{1}{2}$

15 $\frac{3-x}{4-2x}\times\frac{x^2+x-6}{9-x^2}=\frac{3-x}{2(2-x)}\times\frac{(x+3)(x-2)}{(3+x)(3-x)}=\frac{x-2}{-2(x-2)}=\frac{-1}{2}$

16 $\frac{Z^2-Z-12}{9+3Z}\times\frac{3}{Z^2-16}=\frac{(Z-4)(Z+3)}{3(3+Z)}\times\frac{3}{(Z+4)(Z-4)}=\frac{1}{(Z+4)}$

17 $\frac{y^2-7y}{y^3-27}\div\frac{y^2-49}{y^2+3y+9}=\frac{y^2-7y}{y^3-27}\times\frac{y^2+3y+9}{y^2-49}=\frac{y(y-7)}{(y-3)(y^2+3y+9)}\times\frac{y^2+3y+9}{(y+7)(y-7)}$

$=\frac{y}{(y-3)(y+7)}$

18 $\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\div\frac{(4-Z)^2}{16-Z^2}=\frac{64-Z^3}{32+8Z+2Z^2}\times\frac{16-Z^2}{(4-Z)^2}$

$=\frac{(4-Z)(16+4Z+Z^2)}{2(16+4Z+Z^2)}\times\frac{(4+Z)(4-Z)}{(4-Z)(4-Z)}=\frac{4+Z}{2}$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة :

19 $\frac{5}{x^2-36}-\frac{2}{x^2-12x+36}=\frac{5}{(x+6)(x-6)}-\frac{2}{(x-6)^2}=\frac{5(x-6)-2(x+6)}{(x+6)(x-6)^2}$

$=\frac{5x-30-2x-12}{(x+6)(x-6)^2}=\frac{3x-42}{(x+6)(x-6)^2}$

20 $\frac{y^2-y}{y^3-1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y}{y^2+y+1}-\frac{1}{y^2+y+1}=\frac{y-1}{y^2+y+1}$

21 $\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{x^3-8}=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{4+2x+x^2}{(x-2)(x^2+2x+4)}$

$=\frac{3}{x-2}-\frac{2}{x-2}+\frac{1}{x-2}=\frac{3-2+1}{x-2}=\frac{2}{x-2}$

22 $\frac{y-5}{y+1}+\frac{y-1}{y+5}-\frac{25}{y^2+6y+5}=\frac{y-5}{y+1}+\frac{y-1}{y+5}-\frac{25}{(y+5)(y+1)}$

$=\frac{y-5+y-1-25}{(y+5)(y+1)}=\frac{2y-31}{(y+5)(y+1)}$

تدرب وحل مسائل حياتية

[23] مكتبة : اذا كان المقدار الجبري x^2-4 يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة والمقدار الجبري x^2+x-6 يمثل عدد الكتب الأدبية فيها . اكتب نسبة الكتب العلمية الى الكتب الأدبية بأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{\text{عدد الكتب العلمية}}{\text{عدد الكتب الأدبية}}=\frac{x^2-4}{x^2+x-6}=\frac{(x+2)(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x+2}{x+3}$$

[24] هندسة : مستطيل أبعاده 3 , 5 أمتار وسع الى مستطيل أكبر وذلك بأحاطته بممر عرضه x متر . اكتب المقدار الجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع الى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض لمستطيل قبل التوسيع الى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة .

الحل :

طول المستطيل قبل التوسيع $=3$, طول المستطيل بعد التوسيع $=x+3$

عرض المستطيل قبل التوسيع $=5$, عرض المستطيل بعد التوسيع $=x+5$

$$\frac{\text{طول المستطيل قبل التوسيع}}{\text{طول المستطيل بعد التوسيع}}+\frac{\text{عرض المستطيل قبل التوسيع}}{\text{عرض المستطيل بعد التوسيع}}=\frac{3}{x+3}+\frac{5}{x+5}=\frac{3(x+5)+5(x+3)}{(x+3)(x+5)}$$

$$=\frac{3x+15+5x+15}{(x+3)(x+5)}=\frac{8x+30}{(x+3)(x+5)}$$

[25] العاب نارية : المقدار الجبري $20+15t-5t^2$ يمثل ارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 20 مترا اذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني الى الهدف . والمقدار الجبري $4+19t-5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أطلقت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار . اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى الى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة .

الحل :

$$\frac{\text{ارتفاع القذيفة الأولى}}{\text{ارتفاع القذيفة الثانية}}=\frac{20+15t-5t^2}{4+19-5t^2}=\frac{5(4+3t-t^2)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)(4-t)}{(1+5t)(4-t)}=\frac{5(1+t)}{1+5t}$$

فـــكر

[26] تحد : بسط كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية :

i) $\dfrac{y^2-5}{2y^3-16}\div\dfrac{y-\sqrt{5}}{2y^2+4y+8}=\dfrac{y^2-5}{2y^3-16}\times\dfrac{2y^2+4y+8}{y-\sqrt{5}}=\dfrac{(y+\sqrt{5})(y-\sqrt{5})}{2(y^3-8)}\times\dfrac{2(y^2+2y+4)}{y-\sqrt{5}}$

$$=\frac{y+\sqrt{5}}{(y-2)(y^2+2y+4)}\times\frac{y^2+2y+4}{1}=\frac{y+\sqrt{5}}{y-2}$$

[27] أصحح الخطأ : بسط سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي :

$$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z}\times\frac{2Z+12}{Z^2-36}=1$$

اكتشف خطأ سماح وصححه .

الحل :

$$\frac{Z^2-Z-30}{5+Z}\times\frac{2Z+12}{Z^2-36}=\frac{(Z-6)(Z+5)}{5+Z}\times\frac{2(Z+6)}{(Z+6)(Z-6)}=2$$

[28] حس عددي : ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم ؟ وضح ذلك .

$$\frac{5}{x^2-49}+\frac{-4}{(x-7)(x+7)}$$

الحل :

$$\frac{5}{x^2-49}+\frac{-4}{(x-7)(x+7)}=\frac{5}{(x+7)(x-7)}+\frac{-4}{(x-7)(x+7)}=\frac{5-4}{(x+7)(x-7)}=\frac{1}{(x+7)(x-7)}$$

أكتب // قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة : $\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12}\div\frac{Z^2-16}{2Z+8}$

الحل :

$$\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12}\div\frac{Z^2-16}{2Z+8}=\frac{Z^2+Z-6}{2Z^2+2Z-12}\times\frac{2Z+8}{Z^2-16}=\frac{Z^2+Z-6}{2(Z^2+Z-6)}\times\frac{2(Z+4)}{(Z+4)(Z-4)}=\frac{1}{Z-4}$$

خطة حل المسألة (خطوات الأربع)

تعلم // تخذ المباني الحديثة أشكالا هندسية مختلفة , فندق على شكل أسطوانة دائرية قائمة مغلفة من جوانبها بالزجاج . اذا كان نصف قطر قاعدة المبنى $x-8$ أمتار وارتفاعه $x+12$ مترا . ما المساحة الجانبية للفندق .

أفهم :

ما المعطيات في المسألة؟ مبنى الفندق على شكل أسطوانة، نصف قطر قاعدته x - 8أمتار، وارتفاعه x + 12مترا

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد المساحة الجانبية للفندق

خطط :

كيف تحل المسألة؟ بما أن بناية الفندق مشابهة للشكل الأسطواني الدائري القائم، لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة

لذا نطبق قانون المساحة الجانبية للأسطوانة القائمة وهي :

المساحة الجانبية $=2\times$ النسبة الثابتة $\times$ نصف قطر القاعدة $\times$ الارتفاع $\Longleftarrow (LA=2\pi rh)$

حل :

$r=x-8$ نصف قطر القاعدة , $h=x+12$ الارتفاع

$LA=2\pi rh$

$LA=2\pi(x-8)(x+12)=2\pi(x^2+12x-8x-96)$

$LA=2\pi(x^2+4x-96)=2\pi x^2+8\pi x-192\pi$

تحقق : استعمل تحليل المقادير الجبرية للتحقق من صحة الحل :

$2\pi x^2+8\pi x-192\pi=2\pi(x^2+4x-96)$ اخراج عامل مشترك

$=2\pi(x-8)(x+12)$ تحليل المقدار الجبري بالتجربة

أي أن : $r=x-8$, $h=x+12$ اذا فإن الحل صحيح .

مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (الخطوات الأربع)

[1] مدينة الألعاب : بعض الألعاب في مدينة الألعاب تشغل مساحة أكبر من المساحة التي تشغلها وهي متوقفة . فلعبة الأرجوحة تشغل مساحة دائرية قطرها x متر عند الدوران وعند توقفها فأن قطر المساحة التي تشغلها يقل بمقدار 8 أمتار . اكتب مقدار الفرق بين مساحتي التوقف والدوران للأرجوحة ثم حلله .

الحل :

نصف القطر عند الدوران $r=\frac{x}{2}$ $\Longrightarrow$ قطر عند الدوران $2r=x$

نصف القطر عند التوقف $r=\frac{x-8}{2}$ $\Longrightarrow$ القطر عند التوقف $2r=x-8$

$A = r^2\pi$ مساحة الدائرة

$$A_1 - A_2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2\pi - \left(\frac{x-8}{2}\right)^2\pi = \frac{x^2\pi}{4} - \frac{(x-8)^2\pi}{4} = \frac{x^2\pi - (x^2 - 16x + 64)\pi}{4}$$
$$= \frac{x^2\pi - x^2\pi + 16\pi x - 64\pi}{4} = \frac{16\pi x - 64\pi}{4} = 4\pi x - 16\pi$$

[2] دب الباندا : موطن دب الباندا الطبيعي هو سلسلة جبال وسط الصين ويحتاج الباندا الى منطقة واسعة في حديقة الحيوانات حتى يتكيف للعيش . وسعت المنطقة المخصصة للباندا في أحدى حدائق الحيوان بمقدار 6 أمتار الى كل من طول وعرض المنطقة فأصبح طول المنطقة $x + 8$ أمتار والعرض $x + 4$ مترا . ما مساحة المنطقة المخصصة للباندا قبل التوسعة ؟

الحل :

$x + 4 - 6 = x - 2$ العرض قبل التوسعة , $x + 8 - 6 = x + 2$ الطول قبل التوسعة

المساحة المخصصة = الطول × العرض

$$A = (x + 2)(x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$$

[3] كرة الثلج : كرة الثلج هي كرة شفافة تصنع من الزجاج تنطوي على منظر طبيعي وتحتوي على الماء ويستفاد من الماء بوصفه وسطا لسقوط الثلج . اذا كان نصف قطر كرة الثلج $y - 3$ سنتمتر . فما حجم الكرة ؟

الحل :

$r = y - 3$ نصف قطر , $V = \frac{4}{3}r^3\pi$ حجم الكرة

$$V = \frac{4}{3}\pi(y-3)^3 = \frac{4}{3}\pi(y-3)(y-3)^2$$
$$= \frac{4}{3}\pi(y-3)(y^2 - 6y + 9) = \frac{4}{3}\pi(y^3 - 6y^2 + 9y - 3y^2 + 18y - 27)$$
$$= \frac{4}{3}\pi(y^3 - 9y^2 + 27y - 27) = \frac{4}{3}\pi y^3 - \frac{4}{3}\pi \times 9y^2 + \frac{4}{3}\pi \times 27y - \frac{4}{3}\pi \times 27$$
$$= \frac{4}{3}\pi y^3 - 12\pi y^2 + 36\pi y - 36\pi$$

[4] هندسة : صندوق مكعب الشكل طول ضلعه x سنتمتر وضع داخله مكعب أصغر منه طول ضلعه 3 سنتمتر . حلل المقدار الجبري الذي يمثل الفرق بين حجمي المكعبين .

الحل :

$V = L^3 \implies V_1 + V_2 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

مراجعة الفصل

[2 – 1] ضرب المقادير الجبرية

مثال 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية :

i) $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ii) $(2y-5)(2y+5) = 4y^2 - 25$

iii) $(\sqrt{2}+Z)(\sqrt{2}-Z) = 2 - Z^2$

تدريب 1 // جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية

i) $(Z+6)^2 = Z^2 + 12Z + 36$ ii) $(4x-3)(4x+3) = (4x)^2 - 3^2 = 16x^2 - 9$

iii) $(5+Z)(25-5Z+Z^2) = 5^3 + Z^3 = 125 + Z^3$

[2 – 2] تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر

مثال 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$4x^2 + 14x - 30 = 2(2x^2 + 7x - 15) = 2(2x-3)(x+5)$

التحقق :

$2(2x-3)(x+5) = 2(2x^2 + 10x - 3x - 15) = 2(2x^2 + 7x - 15) = 4x^2 + 14x - 30$

تدريب 1 // حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر وتحقق من صحة الحل :

$\sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\left(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ\right) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}\,xZ == 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,x\,Z^2 - 6xZ$

$= xZ\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6\right)$

التحقق :

$xZ\left(2\sqrt{2}\,x + 3\sqrt{2}\,Z - 6\right) = 2\sqrt{2}\,x^2Z + 3\sqrt{2}\,xZ^2 - 6xZ = \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{18}\,xZ^2 - \sqrt{36}xZ$

$= \sqrt{8}\,x^2Z + \sqrt{3}\left(\sqrt{6}\,xZ^2 - \sqrt{12}\,xZ\right)$

[2 – 3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

مثال 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$ ii) $25y^2 - 49 = (5y+7)(5y-7)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كفرق بين مربعين :

i) $4x^2 - 49 = (2x+7)(2x-7)$ ii) $3x^2 - y^2 = \left(\sqrt{3}\,x + y\right)\left(\sqrt{3}\,x - y\right)$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية كمربع كامل :

i) $x^2 - 12x + 36 = (x-6)^2$

تدريب 2 // حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية كمربع كامل :

$81Z^2 - 18Z + 1 = (9Z-1)^2$

[2 – 4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^2 - x - 12 = (x-4)(x+3)$: الحد الوسط $-4x + 3x = -x$

ii) $y^2 - 8y + 15 = (y-5)(y-3)$: الحد الوسط $-5y - 3y = -8y$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $y^2 - y - 20 = (y-5)(y+4)$: الحد الوسط $+4y - 5y = -y$

ii) $x^2 - 17x + 30 = (x-15)(x-2)$: الحد الوسط $-2x - 15x = -17x$

مثال 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $5x^2 + 13x - 6 = (x+3)(5x-2)$: الحد الوسط $-2x + 15x = +13x$

تدريب 2 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $7 - 23Z + 6Z^2 = (7-2Z)(1-3Z)$: الحد الوسط $-21Z - 2Z = -23Z$

[2 – 5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

مثال 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3 + 5^3 = (x+5)(x^2 - 5x + 25)$

ii) $8Z^3 + 27 = 2^3Z^3 + 3^3 = (2Z+3)(4Z^2 - 6Z + 9)$

iii) $\frac{1}{Z^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{4^3} = \left(\frac{1}{Z} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2} - \frac{1}{4Z} + \frac{1}{16}\right)$

تدريب 1 // حلل كل مقدار من المقادير الآتية الى أبسط صورة :

i) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3)(x^2 - 3x + 9)$

ii) $8Z^3 + 125 = 2^3Z^3 + 5^3 = (2Z+5)(4Z^2 - 10Z + 25)$

ii) $x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x-4)(x^2 + 4x + 16)$

iv) $\frac{1}{Z^3} - \frac{1}{27} = \frac{1}{Z^3} - \frac{1}{3^3} = \left(\frac{1}{Z} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{3Z} + \frac{1}{9}\right)$

[2 – 6] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

مثال 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\frac{x+3}{2x-6} \times \frac{x^3-27}{x^2+3x+9} = \frac{x+3}{2(x-3)} \times \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x^2+3x+9} = \frac{x+3}{2}$

ii) $\frac{125+y^3}{25-5y+y^2} \div \frac{(5+y)^3}{y^2+10y+25} = \frac{125+y^3}{25-5y+y^2} \times \frac{y^2+10y+25}{(5+y)^3}$

$= \frac{(5+y)(25-5y+y^2)}{25-5y+y^2} \times \frac{(y+5)(y+5)}{(5+y)^3} = 1$

iii) $\dfrac{3x-15}{x^2-25}+\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{3(x-5)}{(x+5)(x-5)}+\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{3}{x+5}+\dfrac{2}{x+5}=\dfrac{5}{x+5}$

تدريب 1 // اكتب كل مقدار بأبسط صورة :

i) $\dfrac{Z^2-4}{Z+2}\times\dfrac{Z^2+9Z+20}{Z^2+2Z-8}=\dfrac{\cancel{(Z+2)}(Z-2)}{\cancel{Z+2}}\times\dfrac{(Z+5)\cancel{(Z+4)}}{\cancel{(Z+4)}(Z-2)}=Z+5$

ii) $\dfrac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\div\dfrac{(3-x)^2}{x^2-x-6}=\dfrac{27-x^3}{2x^2+6x+18}\times\dfrac{x^2-x-6}{(3-x)^2}=\dfrac{(3-x)\cancel{(9+3x+x^2)}}{2\cancel{(x^2+3x+9)}}\times\dfrac{(x-3)(x-2)}{(3-x)^2}$

$=\dfrac{\cancel{3-x}}{2}\times\dfrac{-\cancel{(3-x)}(x-2)}{\cancel{(3-x)^2}}=\dfrac{-(x-2)}{2}$

iii) $\dfrac{4Z}{2Z-5}-\dfrac{Z}{Z+3}=\dfrac{4Z(Z+3)-Z(2Z-5)}{(2Z-5)(Z+3)}=\dfrac{4Z^2+12Z-2Z^2+5Z}{(2Z-5)(Z+3)}=\dfrac{2Z^2+17Z}{(2Z-5)(Z+3)}$

اختبار الفصل

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين :

1 $(x+5)^2=x^2+10x+25$

2 $(v-\sqrt{2})(v+\sqrt{2})=v^2-(\sqrt{2})^2=v^2-2$

3 $(2-x)(5-x)=10-2x-5x+x^2$
$=10-7x+x^2$

4 $(2y-3)(y+9)=3y^2+27y-3y-27$
$=3y^2+24y-27$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود :

5 $(x+11)(x^2-11x+121)=x^3+11^3=x^3-1331$

6 $\left(\dfrac{1}{3}-y\right)\left(\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{3}y+y^2\right)=\left(\dfrac{1}{3}\right)^3-y^3=\dfrac{1}{27}-y^3$

7 $(y-1)^3=(y-1)(y-1)^2=(y-1)(y^2-2y+1)$
$=y^3-2y^2+y-y^2+2y-1=y^3-3y^2+3y-1$

8 $\left(Z+\dfrac{1}{4}\right)^3=\left(Z+\dfrac{1}{4}\right)\left(Z+\dfrac{1}{4}\right)^2=\left(Z+\dfrac{1}{4}\right)\left(Z^2+\dfrac{1}{2}Z+\dfrac{1}{16}\right)$
$=Z^3+\dfrac{1}{2}Z^2+\dfrac{1}{16}Z+\dfrac{1}{4}Z^2+\dfrac{1}{8}Z+\dfrac{1}{64}=Z^3+\dfrac{3}{4}Z^2+\dfrac{3}{16}Z+\dfrac{1}{64}$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الاكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل :

9 $8x^2-12x=4x(2x-3)$

التحقق :

$4x(2x-3)=8x^2-12x$

10 $7y^3+14y^2-21y=7y(y^2+2y-3)$

التحقق :

$7y(y^2+2y-3)=7y^3+14y^2-21y$

11 $\sqrt{18}\,Z^3r+\sqrt{2}\,(Zr^2-Zr)$
$=3\sqrt{2}\,Z^3r+\sqrt{2}\,Zr^2-\sqrt{2}\,Zr$
$=\sqrt{2}\,Zr(3Z^2+r-1)$

التحقق :

$\sqrt{2}\,Zr(3Z^2+r-1)$
$=3\sqrt{2}\,Z^3r+\sqrt{2}\,Zr^2-\sqrt{2}\,Zr$
$=\sqrt{18}\,Z^3r+\sqrt{2}\,(Zr^2-Zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

12 $\frac{2}{3}(y+5)+\frac{1}{3}y(y+5)=(y+5)\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}y\right)$

13 $\sqrt{5}\,Z(Z^2-1)-\sqrt{2}\,Z^2(Z^2-1)=(Z^2-1)(\sqrt{5}\,Z-\sqrt{2}\,Z^2)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع :

14 $6x^4-18x^3+10x-30=(6x^4-18x^3)+(10x-30)$
$=6x^3(x-3)+10(x-3)=(x-3)(6x^3+10)$

15 $56-8y+14y^2-2y^3=(56-8y)+(14y^2-2y^3)$
$=8(7-y)+2y^2(7-y)=(7-y)(8+2y^2)$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس :

16 $9x^3-6x^2+8-12x=(9x^3-6x^2)+(8-12x)=3x^2(3x-2)+4(2-3x)$
$=3x^2(3x-2)+4(-1)(3x-2)=3x^2(3x-2)-4(3x-2)$
$=(3x-2)(3x^2-4)$

17 $\sqrt{11}\,Z^3-\sqrt{44}\,Z^2+5(2-Z)=(\sqrt{11}\,Z^3-2\sqrt{11}\,Z^2)+5(2-Z)$
$=\sqrt{11}\,Z^2(Z-1)+5(-1)(Z-2)=\sqrt{11}\,Z^2(Z-1)-5(Z-2)$
$=(Z-2)(\sqrt{11}Z^2-5)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

18 $16-x^2=(4+x)(4-x)$

19 $\frac{1}{3}Z^2-\frac{1}{27}=\frac{1}{3}\left(Z^2-\frac{1}{9}\right)=\frac{1}{3}\left(Z+\frac{1}{3}\right)\left(Z-\frac{1}{3}\right)$

20 $\frac{1}{16}v-\frac{1}{2}v^4=\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{8}-v^3\right)=\frac{1}{2}v\left(\frac{1}{2}-v\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}v+v^2\right)$

21 $8x^3-\frac{1}{125}=\left(2x-\frac{1}{5}\right)\left(4x^2+\frac{2}{5}x+\frac{1}{25}\right)$

22 $81-18y+y^2=(9-y)^2$

23 $7Z^2-36Z+5=(7Z-1)(Z-5)$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية تمثل مربعا كاملا وحلله :

24 $25x^2+30x+9$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}=2\sqrt{(25x^2)(9)}$
$=30x$ مربع كامل
$25x^2+30x+9=(5x+3)^2$

25 $49-4y+y^2$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}=2\sqrt{(y^2)(49)}=2(y)(7)$
$=14y\neq 4y$ ليس مربع كامل

26 $4v^2+4\sqrt{5}\,v+5$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}=2(2v)(\sqrt{5})$
$=4\sqrt{5}\,v$ مربع كامل
$4v^2+4\sqrt{5}\,v+5=(2v+\sqrt{5})^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : ax^2+bx+c ليصبح مربعا كاملا وحلله :

27 $x^2+\cdots\cdots+81$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx=2\sqrt{(x^2)(81)}=2(x)(9)=18x$

$x^2+18x+81=(x+9)^2$

28 $36-12y+\cdots\cdots$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$12y=2\sqrt{(ay^2)(36)}$ بتربيع الطرفين

$144y^2=4(ay^2)(36) \Rightarrow 144y^2=144(ay^2)$

$ay^2=\dfrac{144y^2}{144}=y^2 \Rightarrow 36-12y+y^2=(6-y)^2$

29 $7-\cdots\cdots+4Z^2$

الحل :

$bx=2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bZ=2\sqrt{(4Z^2)(7)}=2(2Z)(\sqrt{7})=4\sqrt{7}\,Z$

$7-4\sqrt{7}\,Z+4Z^2=(\sqrt{7}-2Z)^2$

حلل كل مقدار من المقادير الآتية :

30 $x^2+7x+10=(x+5)(x+2)$

31 $x^2-5\sqrt{3}x+12=(x-4\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

32 $2v^2+9v+7=(2v+7)(v+1)$

33 $32-16x+2x^2=2(16-8x+x^2)$
$=2(4-x)(4-x)$

34 $\dfrac{1}{4}y^2-2y+3=\dfrac{1}{4}(y^2-8y+12)$
$=\dfrac{1}{4}(y-2)(y-6)$

35 $12-7\sqrt{2}v+2v^2$
$=(3\sqrt{2}-v)(4\sqrt{2}-2v)$

36 $8+27x^3=2^3+3^3x^3$
$=(2+3x)(4-6x+9x^2)$

37 $125y^3-1=5^3y^3-1^3$
$=(5y-1)(25y^2+5y+1)$

38 $\dfrac{1}{v^3}-\dfrac{8}{27}=\dfrac{1^3}{v^3}-\dfrac{2^3}{3^3}$
$=\left(\dfrac{1}{v}-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{v^2}+\dfrac{2}{3v}+\dfrac{4}{9}\right)$

39 $1+0.125y^3=1^3+(0.5)^3y^3$
$=(1+0.5y)(1-0.5y+0.25y^2)$

40 $Z^3-0.027=Z^3-(0.3)^3$
$=(Z-0.3)(Z^2+0.3Z+0.09)$

41 $3-\dfrac{1}{9}v^3=\dfrac{1}{9}(27-v^3)=\dfrac{1}{9}(3^3-v^3)$
$=\dfrac{1}{9}(3-v)(9+3v+v^2)$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة

42 $\dfrac{27-8Z^3}{4Z^2-9}\div\dfrac{9+6Z+4Z^2}{9+6Z}=\dfrac{27-8Z^3}{4Z^2-9}\times\dfrac{9+6Z}{9+6Z+4Z^2}$

$=\dfrac{(3-2Z)(9+6Z+4Z^2)}{(2Z+3)(2Z-3)}\times\dfrac{3(3+2Z)}{9+6Z+4Z^2}=\dfrac{-3(2Z-3)}{(2Z-3)}=-3$

43 $\frac{7}{x^2-25}-\frac{6}{x^2+10x+25}=\frac{7}{(x+5)(x-5)}-\frac{6}{(x+5)^2}=\frac{7(x+5)-6(x-5)}{(x-5)(x+5)^2}$

$=\frac{7x+35-6x+30}{(x-5)(x+5)^2}=\frac{x+65}{(x-5)(x+5)^2}$

44 $\frac{y^2-1}{1-y^3}+\frac{1+y}{1+2y+y^2}=\frac{(y+1)(y-1)}{(1-y)(1+y+y^2)}+\frac{1+y}{(1+y)(1+y)}$

$=\frac{(y+1)(y-1)}{-(y-1)(1+y+y^2)}+\frac{1}{1+y}=\frac{-(y+1)}{1+y+y^2}+\frac{1}{1+y}$

$=\frac{-(y+1)(1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}=\frac{-(y+y^2+1+y)+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}$

$=\frac{-2y-y^2-1+1+y+y^2}{(1+y+y^2)(1+y)}=\frac{-y}{(1+y+y^2)(1+y)}$

45 $\frac{Z+3}{Z+5}-\frac{Z-5}{Z-3}+\frac{1}{Z^2+2Z-15}=\frac{Z+3}{Z+5}-\frac{Z-5}{Z-3}+\frac{1}{(Z+5)(Z-3)}$

$=\frac{(Z+3)(Z-3)-(Z-5)(Z+5)+1}{(Z+5)(Z-3)}$

$=\frac{Z^2-9-(Z^2-25)+1}{(Z+5)(Z-3)}$

$=\frac{Z^2-9-Z^2+25+1}{(Z+5)(Z-5)}=\frac{17}{(Z+5)(Z-3)}$

الفصل 3 المعادلات

الدرس [3 – 1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

[3 – 1 – 1] حل نظام من معادلتين خطيتين بيانيا

ليكن $L_1 : a_1x+b_1y=c_1$, $L_2 : a_2x+b_2y=c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى بمتغيرين x , y لحل هذا النظام بيانيا نتبع ما يأتي :

[1] تمثيل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي .

[2] لإيجاد احداثي نقطة تقاطع المستقيمين يرسم عمودان من النقطة على المحور الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل .

مثال // جد مجموعة حل النظام بيانيا في R

$$x - y = 1 \quad ----(1)$$
$$x + y = 2 \quad ----(2)$$

الحل :

رمز للمعادلة (1) : $x - y = 1$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−1	(0, −1)
1	0	(1, 0)

$0 - y = 1 \Rightarrow -y = 1 \Rightarrow y = -1$

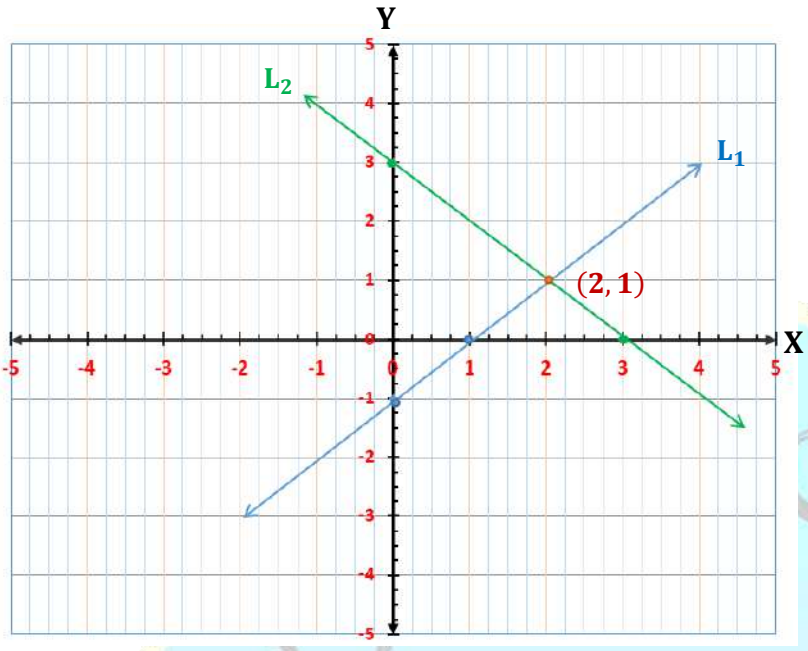
$x - 0 = 1 \Rightarrow x = 1$

نرمز للمعادلة (2) : $x + y = 3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$0 + y = 3 \Rightarrow y = 3$

$x - 0 = 3 \Rightarrow x = 3$



مجموعة الحل هي : $S = [(2, 1)]$

[3 − 1 − 2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين بتحويل أحدى المعادلتين الى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين X, Y من أحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى

مثال // جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال التعويض :

$$y = 4x \quad ----(1)$$
$$y = x + 6 \quad ----(2)$$

الحل : نعوض معادلة (1) في معادلة (2)

$4x = x + 6 \Rightarrow 4x - x = 6$

$x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

$y = 2 + 6 = 8$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 8)\}$

مثال // جد مجموعة الحل للنظام في R باستعمال التعويض :

$$x + 8y = 10 \quad ----(1)$$
$$x - 4y = 2 \quad ----(2)$$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$x = 2 + 4y \quad ----(3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 10 - 2$

$12y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

نعوض عن قيمة $y = \frac{2}{3}$ في معادلة (3)

$x = 2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) = 2 + \frac{8}{3} = \frac{6+8}{3} = \frac{14}{3}$

مجموعة حل النظام : $S = \left\{\left(\frac{14}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\}$

[3 – 1 – 2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف

تتلخص هذه الطريقة لحل النظام من معادلتين بحذف أحد المتغيرين وذلك بجعل معامل أحدهما متساويا بالقيمة ومختلفا بالإشارة في كلا المعادلتين .

مثال // جد مجموعة حل للنظام في R باستعمال الحذف .

$$x + 2y = 5 \quad ---(1)$$
$$3x - y = 1 \quad ---(2) \quad \} \times 2$$

الحل : نضرب معادلة (2) في العدد 2

$$x + 2y = 5 \quad ---(1)$$
$$6x - 2y = 2 \quad ---(2) \quad \text{بالجمع}$$
$$7x = 7 \implies x = \frac{7}{7} = 1$$

نعوض قيمة $x = 1$ في معادلة (1)

$$1 + 2y = 5 \implies 2y = 5 - 1 \implies 2y = 4 \implies y = \frac{4}{2} = 2$$

مجموعة حل النظام : $S = \{(1, 2)\}$

مثال // جد مجموعة حل للنظام في R باستعمال الحذف :

$$3x + 4y = 10 \quad ---(1) \quad \} \times 3$$
$$2x + 3y = 7 \quad ---(2) \quad \} \times 4$$

الحل : نضرب معادلة (1) في العدد 3 ونضرب معادلة (2) في العدد 4

$$9x + 12y = 30 \quad ---(1)$$
$$\mp 8x \mp 12y = \mp 28 \quad ---(2) \quad \implies \text{بالطرح}$$
$$x = 2$$

نعوض قيمة $x = 2$ في معادلة (2)

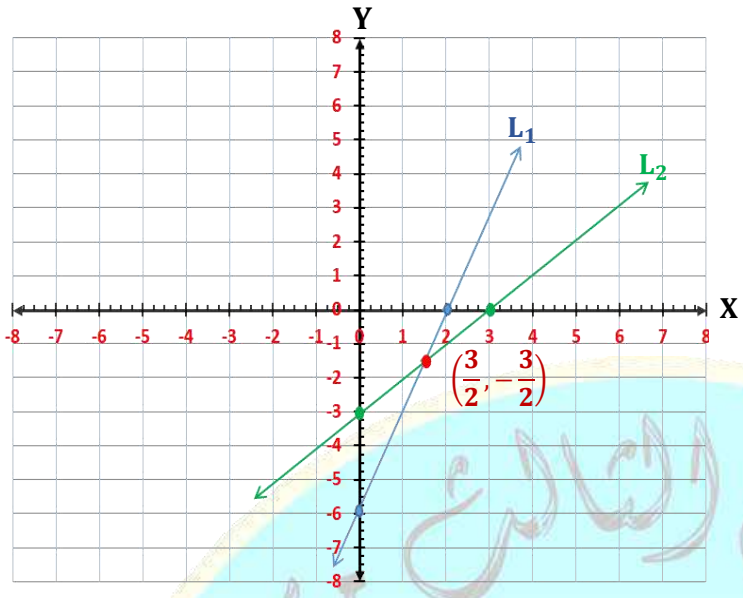
$$2(2) + 3y = 7 \implies 4 + 3y = 7 \implies 3y = 7 - 4 \implies 3y = 3 \implies y = \frac{3}{3} = 1$$

مجموعة حل النظام : $S = \{(2, 1)\}$

تأكد من فهمك

جد مجموعة حل للنظام في R بيانياً :

1 $3x - y = 6 \quad ---(1)$
$x - y = 3 \quad ---(2)$



الحل : نرمز للمعادلة (1) : $3x-y=3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
2	0	(2, 0)

$3(0)-y=6 \Rightarrow -y=6 \Rightarrow y=-6$

$3x-0=6 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{3}=2$

نرمز للمعادلة (2) $x-y=3$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	−3	(0, −3)
3	0	(3, 0)

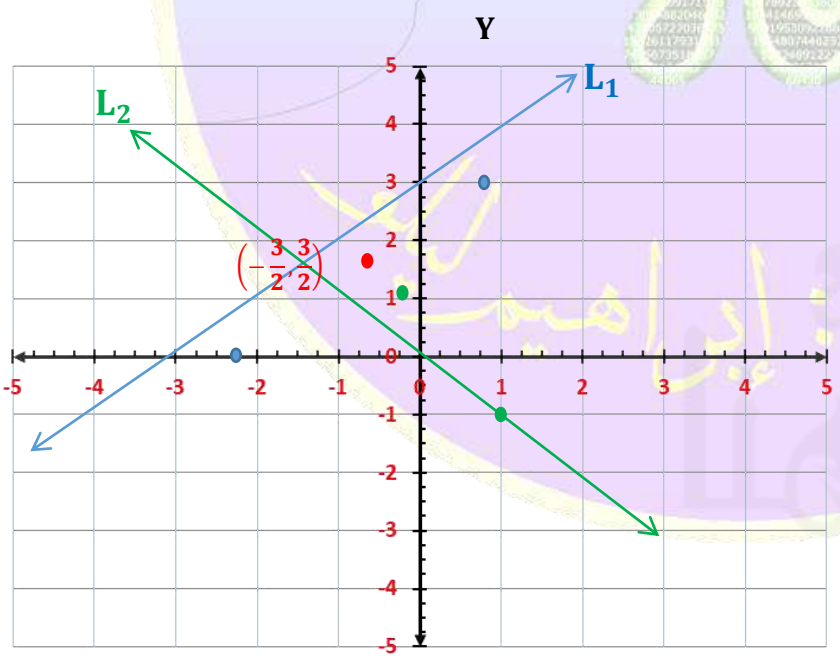
$0-y=3 \Rightarrow -y=3 \Rightarrow y=-3$

$x-0=3 \Rightarrow x=3$

مجموعة حل النظام : $S=\left\{\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)\right\}$

2 $y-x=3$ ——— (1)

$y+x=0$ ——— (2)



الحل : نرمز للمعادلة (1) : $y-x=3$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
−3	0	(−3, 0)

$y-0=3 \Rightarrow y=3$

$0-x=3 \Rightarrow -x=3 \Rightarrow x=-3$

نرمز للمعادلة (2) : $y+x=3$ بالرمز L_2

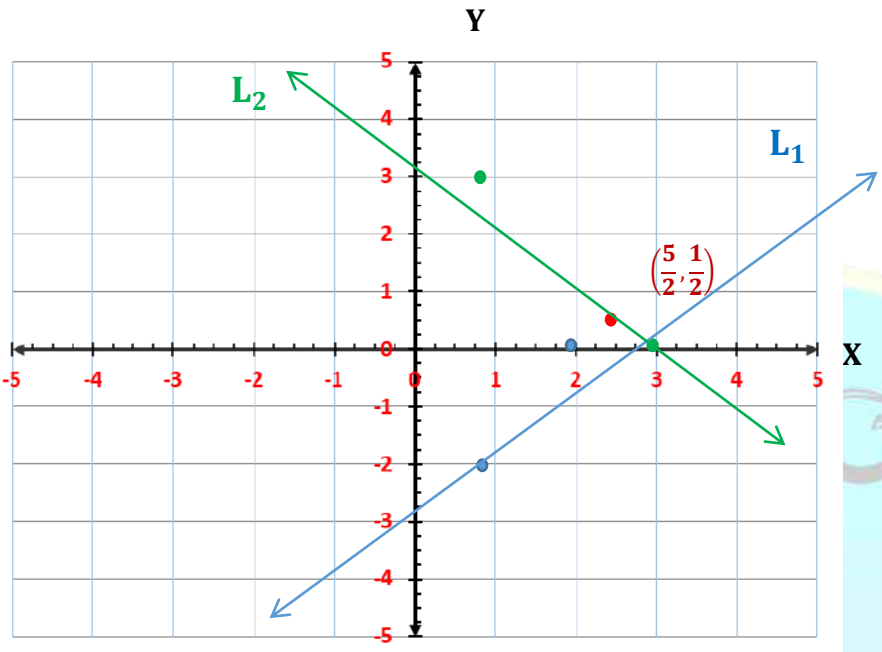
x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y+1=0 \Rightarrow y=-1$

$1+x=0 \Rightarrow x=-1$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$

3 $y = x - 2 \quad ---(1)$
$y = 3 - x \quad ---(2)$



الحل : نرمز للمعادلة $(1) : y = x - 2$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−2	(0, −2)
2	0	(2, 0)

$y = 0 - 2 \Rightarrow y = -2$
$0 = x - 2 \Rightarrow x = 2$

نرمز للمعادلة $(2)\ y = 3 - x$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$
$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$

جد مجموعة حل للمعادلتين في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي :

4 $2x + 3y = 1 \quad ---(1)$
$3x - 2y = 0 \quad ---(2)$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$3x = 2y \Rightarrow x = \frac{2}{3}y \quad ---(3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2\left(\frac{2}{3}y\right) + 3y = 1 \Rightarrow \frac{4}{3}y + 3y = 1 \quad \times 3$

$4y + 9y = 3 \Rightarrow 13y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{13}$

نعوض قيمة $y = \frac{3}{13}$ في معادلة (3)

$x = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{13}\right) = \frac{1}{13}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{2}{13}, \frac{3}{13}\right)\right\}$

6 $x - 2y = 11 \quad ---(1)$
$2x - 3y = 18 \quad ---(2)$

الحل : من معادلة (1) نحصل على :

$x = 11 + 2y \quad ---(3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$2(11 + 2y) - 3y = 18 \Rightarrow 22 + 4y - 3y = 18$
$y = 18 - 22 = -4$

جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

7 $3x - 4y = 12 \quad ---(1)$
$5x + 2y == -6 \quad ---(2) \quad \times 2$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 2

$3x - 4y = 12 \quad ---(1)$
$10x + 4y = -12 \quad ---(2)$ بالجمع
$13x = 0 \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$5(0) + 2y = -6 \Rightarrow 2y = -6$
$y = \frac{-6}{2} = -3$

مجموعة حل النظام : $\{(0, -3)\}$

8 $x - 3y = 6 \quad ---(1) \quad \times 2$
$2x - 4y = 24 \quad ---(2)$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 2

$\mp 2x \pm 6y = \mp 12 \quad ---(1)$
$2x - 4y = 24 \quad ---(2)$ بالطرح
$2y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{2} = 6$

نعوض قيمة $y = 6$ في معادلة (1)

$x - 3(6) = 6 \Rightarrow x - 18 = 6$
$x = 6 + 18 = 24$

مجموعة حل النظام : $\{(24, 6)\}$

نعوض قيمة $y=-4$ في معادلة (3)

$x=11+2(-4)=11-8=3$

مجموعة حل النظام : $\{(3,-4)\}$

---

6 $y-5x=10$ ـــــ (1)

$y-3x=8$ ـــــ (2)

الحل : من معادلة (1) نحصل على :

$y=10+5x$ ـــــ (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$10+5x-3x=8 \Rightarrow 2x=8-10$

$2x=-2 \Rightarrow x=\frac{-2}{2}=-1$

نعوض قيمة $x=-1$ في معادلة (3)

$y=10+5(-1)=10-5=5$

مجموعة حل النظام : $\{(-1,5)\}$

---

9 $3y-2x-7=0$ ـــــ (1)

$y+3x+5=0$ ـــــ $(2)\ \}\times 3$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 3

$3y-2x-7=0$ ـــــ (1)

$\mp 3y\mp 9x\mp 15=0$ ـــــ (2) بالطرح

$-11x-22=0 \Rightarrow 11x=-22$

$x=\frac{-22}{11}=-2$

نعوض قيمة $x=-2$ في معادلة (2)

$y+3(-2)+5=0 \Rightarrow y-6+5=0$

$y-1=0 \Rightarrow y=1$

مجموعة حل النظام : $\{(-2,1)\}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R وتحقق من صحة الحل :

[11] $0.2x-6y=4$ ـــــ (1)

$0.1x-7y==-2$ ـــــ $(2)\ \}\times 2$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 2

$0.2x-6y=4$ ـــــ (1)

$\mp 0.2x\pm 14y=\pm 4$ ـــــ (2) بالطرح

$8y=8 \Rightarrow y=\frac{8}{8}=1$

نعوض قيمة $y=1$ في معادلة (1)

$0.2x-6(1)=4 \Rightarrow 0.2x-6=4$

$0.2x=4+6 \Rightarrow 0.2x=10$

$x=\frac{10}{0.2}=\frac{100}{2}=50$

مجموعة حل النظام : $\{(50,1)\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم $x=50\ ,y=1$ في معادلة (1)

$0.2x-6y=0.2(50)-6(1)=10-6=4$

---

[10] $\frac{2x}{3}-\frac{y}{2}=1$ ـــــ $(1)\ \}\times 6$

$\frac{3y}{3}-\frac{x}{3}=4$ ـــــ $(2)\ \}\times 3$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$4x-3y=6$ ـــــ (1)

$3y-x=12 \Rightarrow -x+3y=12$ ـــــ (2)

$4x-3y=6$ ـــــ (1)

$-x+3y=12$ ـــــ (1) بالجمع

$3x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{3}=6$

نعوض قيمة $x=6$ في معادلة (2)

$-6+3y=12 \Rightarrow 3y=12+6$

$3y=18 \Rightarrow y=\frac{18}{3}=6$

مجموعة حل النظام : $\{(6,6)\}$

تحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x=6\ ,y=6$ في أحدى المعادلتين لتكن معادلة (2)

$-x+3y=-6+3(6)=-6+18=12$

---

[12] $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=2\frac{3}{4}$ ـــــ $(1)\ \}\times 12$

$\frac{1}{4}x-\frac{2}{3}y=6\frac{1}{4}$ ـــــ $(2)\ \}\times 12$

الحل : نبسط معادلة (1)

$\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}y=\frac{11}{4}\ \}\times 12$

$6x + 8y = 33 \quad ----(1)$

نبسط معادلة (2)

$\frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = \frac{25}{4} \quad \} \times 12$

$3x - 8y = 75 \quad ----(2)$

$6x + 8y = 33 \quad ----(1)$ بالجمع

$9x = 108 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{108}{9} = 12$

نعوض قيمة $x = 12$ في معادلة (1)

$6(12) + 8y = 33 \quad \Rightarrow \quad 72 + 8y = 33$

$8y = 33 - 72 \quad \Rightarrow \quad 8y = -39 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-39}{8}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(12, -\frac{39}{8}\right)\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم $x = 12 , y = -\frac{39}{8}$ في معادلة (1)

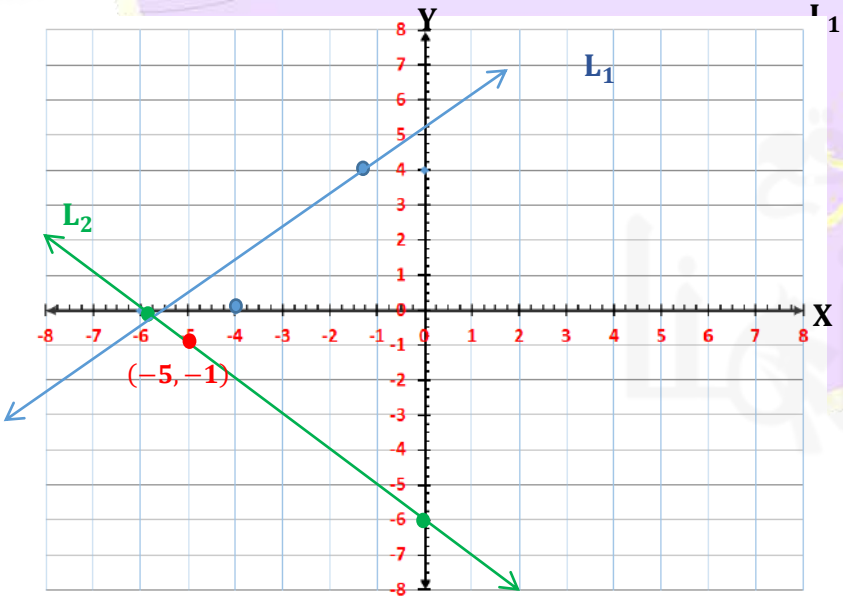
$6x + 8y = 6(12) + 8\left(-\frac{39}{8}\right) = 72 - 39 = 33$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل للمعادلتين بيانيا في R :

[13] $x - y = -4 \quad ----(1)$

$y + x = -6 \quad ----(2)$



الحل : نرمز للمعادلة (1) $x - y = -4$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	4	(0, 4)
−4	0	(−4, 0)

$0 - y = -4 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

$x - 0 = -4 \quad \Rightarrow x = -4$

نرمز للمعادلة (2) $y + x = -6$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
−6	0	(−6, 0)

$y + 0 = -6 \quad \Rightarrow \quad y = -6$

$0 + x = -6 \quad \Rightarrow x = -6$

مجموعة الحل : $\{(-5, -1)\}$

[14] $y = x - 4 \quad ---(1)$
$x = 2 - y \quad ---(2)$

الحل : نرمز للمعادلة (1) : $y = x - 4$ بالرمز L_1

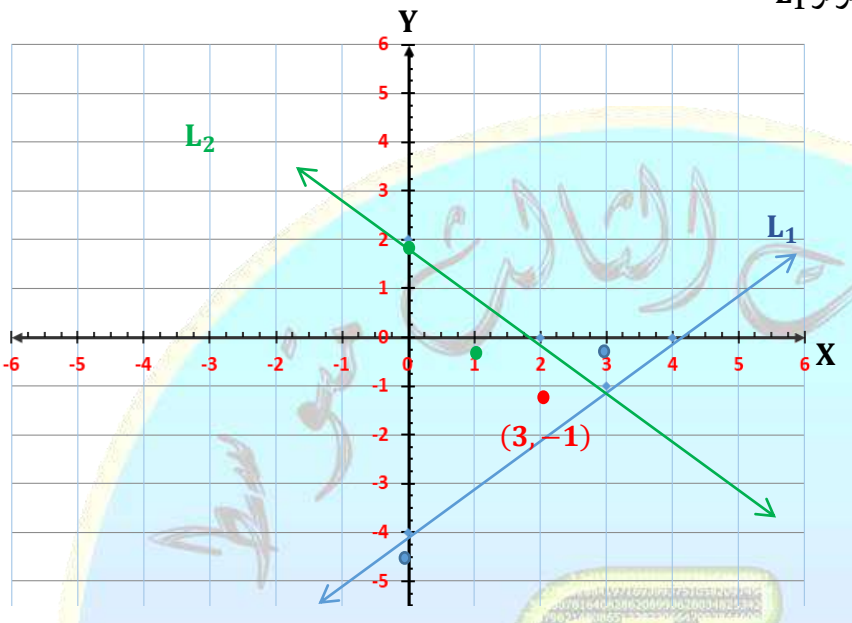
x	y	(x,y)
0	−4	(0,−4)
4	0	(4,0)

$y = 0 - 4 \Rightarrow y = -4$
$0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$

نرمز للمعادلة (2) : $x = 2 - y$ بالرمز L_2

x	y	(x,y)
0	2	(0,2)
2	0	(2,0)

$0 = 2 - y \Rightarrow y = 2$
$x = 2 - 0 = 2$



مجموعة حل النظام : $\{(3,-1)\}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي :

15 $3x + 2y = 2 \quad ---(1)$
$x - y = 8 \quad ---(2)$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$x = 8 + y \quad ---(3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(8 + y) + 2y = 2 \Rightarrow 24 + 3y + 2y = 2$
$5y = 2 - 24 \Rightarrow 5y = -22 \Rightarrow y = \frac{-22}{5}$

نعوض قيمة $y = -\frac{22}{5}$ في معادلة (3)

$x = 8 - \frac{22}{5} = \frac{40 - 22}{5} = \frac{18}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{18}{5}, -\frac{22}{5}\right)\right\}$

16 $2x - y = -4 \quad ---(1)$
$3x - y == 3 \quad ---(2)$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$y = 3x - 3 \quad ---(3)$

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$2x - (3x - 3) = -4 \Rightarrow 2x - 3x + 3 = -4$
$-x = -4 - 3 \Rightarrow -x = -7 \Rightarrow x = 7$

نعوض قيمة $x = 7$ في معادلة (3)

$y = 3(7) - 3 = 21 - 3 = 18$

مجموعة حل النظام $\{(7,18)\}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

17 $3x = 22 - 4y \quad ---(1)$
$4y = 3x - 14 \quad ---(2)$

الحل : نرتب المعادلتين :

$3x + 4y = 22 \quad ---(1)$
$-3x + 4y = -14 \quad ---(2)$ بالجمع

$8y = 8 \implies y = \frac{8}{8} = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$3x = 22 - 4(1) \implies 3x = 22 - 4$

$3x = 18 \implies x = \frac{18}{3} = 6$

مجموعة حل النظام : $\{(6, 1)\}$

18 $5x - 3y = 6 \quad ---(1) \ \} \times 5$
$2x + 5y = -10 \quad ---(2) \ \} \times 3$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 5 ومعادلة (2) في العدد 3

$25x - 15y = 30 \quad ---(1)$
$6x + 15y = -30 \quad ---(1)$ بالجمع

$31x = 0 \implies x =$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$2(0) + 5y = -10 \implies 5y = -10$

$y = \frac{-10}{5} = -2$

مجموعة حل النظام : $\{(0, -2)\}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R وتحقق من صحة الحل :

19 $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 2 \quad ---(1) \ \} \times 3$
$2x + 3y = 6 \quad ---(2)$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 3

$x - y = 6 \ \} \times 3$
$3x - 3y = 18 \quad ---(1)$
$2x + 3y = 6 \quad ---(2)$ بالجمع

$5x = 24 \implies x = \frac{24}{5}$

نعوض قيمة $x = \frac{24}{5}$ في معادلة (2)

$2\left(\frac{24}{5}\right) + 3y = 6 \implies \frac{48}{5} + 3y = 6 \ \} \times 5$

$48 + 15y = 30 \implies 15y = 30 - 48$

$15y = -18 \implies y = -\frac{18}{15} = -\frac{6}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{24}{5}, -\frac{6}{5}\right)\right\}$

لتحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = \frac{24}{5}$, $y = -\frac{6}{5}$ في معادلة (2)

$2x + 3y = 2\left(\frac{24}{5}\right) + 3\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{48}{5} - \frac{18}{5} = \frac{30}{5}$
$= 6$

20 $0.2x - 3y = 2 \quad ---(1)$
$0.1x - 6y = -3 \quad ---(2) \ \} \times 2$

الحل : بضرب معادلة (2) في 2

$0.2x - 3y = 2 \quad ---(1)$
$\mp 0.2x \pm 12y = \pm 6 \quad ---(2)$

$9y = 9 \implies y = \frac{9}{9} = 1$

نعوض قيمة $y = 1$ في معادلة (1)

$0.2x - 3(1) = 2 \implies 0.2x - 3 = 2$

$0.2x = 2 + 3 \implies 0.2x = 5$

$x = \frac{5}{0.2} = \frac{50}{2} = 25$

مجموعة حل النظام : $\{(25, 1)\}$

التحقق من صحة الحل :

نعوض قيم $x = 25$, $y = 1$ في معادلة (1)

$0.2x - 3y = 0.2(25) - 3(1) = 5 - 3 = 2$

تدرب وحل مسائل حياتية

[21] طقس: تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد أيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية . اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف ثم جد حلهما بطريقة الحذف .

الحل : عدد أيام شهر كانون الثاني $= 31$ يوم

نفرض عدد الأيام التي تنخفض بها درجة الحرارة $= x$

نفرض عدد الأيام التي تزداد بها درجة الحرارة $= y$

$$y + x = 31 \quad \text{-------(1)}$$

$$y - x = 9 \quad \text{-------(2)} \qquad \text{بالجمع}$$

$$2y = 40 \implies y = \frac{40}{2} = 20$$

نعوض قيمة $y = 20$ في معادلة (1)

$$20 + x = 31 \implies x = 31 - 20 = 11 \implies S = \{(11, 20)\}$$

---

[22] تجارة : باع متجر 25 ثلاجة وغسالة بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة اذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازا باع من كل نوع . اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلها بطريقة التعويض

الحل : نفرض عدد الثلاجات $= x$, عدد الغسالات $= y$

$$x + y = 25 \quad \text{-------(1)}$$

سعر الثلاجة $= 1000000x$, سعر الغسالة $= 500000y$

$$1000000x + 500000y = 20000000 \quad \} \div 500000$$

$$2x + y = 40 \quad \text{-------(2)}$$

من معادلة (1) نحصل على :

$$y = 25 - x \quad \text{-------(3)}$$

نعوض معادلة (3) في معادلة (2)

$$2x + 25 - x = 40 \implies x = 40 - 25 \implies x = 15$$

نعوض قيمة $x = 15$ في معادلة (3)

$$y = 25 - 15 = 10 \implies S = \{(15, 10)\}$$

---

[23] حفلة تخرج : عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور . وكان عدد المدعوين 23 شخصا . فكم شخصا دعل كل منهما ؟

الحل : نفرض عدد الأشخاص الذين دعاهم سجاد $= x$

عدد الأشخاص الذين دعاهم أنور $= y$

$$x + y = 23 \quad \text{-------(1)}$$

$$x - y = 3 \quad \text{-------(2)} \qquad \text{بالجمع}$$

$$2x = 26 \implies x = \frac{26}{2} = 13 \qquad \text{عدد الاشخاص الذين دعاهم سجاد}$$

نعوض قيم $x = 13$ في معادلة (1)

$$13 + y = 23 \implies y = 23 - 13 = 10 \qquad \text{الذين دعاهم أنور}$$

فكر

[24] تحد : جد مجموعة الحل للمعادلتين في R

ii) $\frac{2}{6}x-\frac{1}{3}y=1$ ———(1) $\}\times 6$

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y=3$ ———(2) $\}\times 2$

الحل : نبسط المعادلتين ذلك بضرب معادلة (1) في العدد6 والمعادلة (2) في العدد 2

$2x-2y=6$ ———(1)

$x+y=6$ ———(2) $\}\times 2$

$2x+2y=12$ ———(2)

$2x-2y=6$ ———(1) بالجمع

$4x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{4}=\frac{9}{2}$

نعوض قيمة $x=\frac{9}{2}$ في معادلة (2)

$\frac{9}{2}+y=6 \Rightarrow y=6-\frac{9}{2}=\frac{12-9}{2}=\frac{3}{2}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)\right\}$

29

[25] أصحح الخطأ :قال أحمد أن مجموعة حل المعادلتين الخطيتين : $2x+3y=6\,,3x+2y=1$
هي المجموعة : $\left\{\left(\frac{5}{16},\frac{5}{9}\right)\right\}$ اكتشف خطأ أحمد وصححه .

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد2 والمعادلة (2) في العدد 3

$4x+6y=12$ ———(1)

$\mp 9x\mp 6y=\mp 3$ ———(2) بالطرح

$-5x=9 \Rightarrow x=-\frac{9}{5}$

نعوض قيمة $x=-\frac{9}{5}$ في معادلة (2)

$3\left(-\frac{9}{5}\right)+2y=1 \Rightarrow -\frac{27}{5}+2y=1 \;\}\times 5$

$-27+10y=5 \Rightarrow 10y=5+27 \Rightarrow 10y=32 \Rightarrow y=\frac{32}{10}=\frac{16}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(-\frac{9}{5},\frac{16}{5}\right)\right\}$

خطأ أحمد هو أيجاد مجموعة الحل .

أكتب // مجموعة حل المعادلتين الخطيتين :

$5x-6y=0$ ———(1)

$x+2y=4$ ———(2) $\}\times 3$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد3

$5x-6y=0$ ———(1)

$3x+6y=12$ ———(2) بالجمع

$8x=12 \Rightarrow x=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

نعوض قيمة $x=\frac{3}{2}$ في معادلة (2)

$\frac{3}{2}+2y=4 \;\}\times 2 \Rightarrow 3+4y=8 \Rightarrow 4y=8-3$

$4y = 5 \implies y = \frac{5}{4} \implies \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{4}\right)\right\}$: مجموعة الحل

الدرس [2 – 3]	حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

[3 – 2 – 1]	حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

لحل المعادلة بطريقة التحليل فرق بين مربعين نتبع ما يأتي :

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

[2] نجعل المعادلة بالصورة : $x^2 - a^2 = 0$

[3] نحل المعادلة بطريقة الفرق بين مربعين بالصورة : $(x + a)(x - a) = 0$

[4] نجد قيم x بجعل أما : $x + a = 0 \implies x = -a$ أو : $x - a = 0 \implies x = a$

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{-a, a\}$

مثال // تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق اذ أنها تقع في جنوب العراق . رسم باسل لوحة جدارية للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي . أكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة .

الحل : نفرض طول ضلع اللوحة x

مساحة اللوحة = طول الضلع × نفسه

$x^2 = 9$

$x^2 - 9 = 0 \implies (x + 3)(x - 3) = 0$

أما $x + 3 = 0 \implies x = -3$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \implies x = 3$

طول ضلع اللوحة هو : $3m$

مثال // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل : $16 - y^2 = 0$

الحل :

$(4 + y)(4 - y) = 0$

أما $4 + y = 0 \implies y = -4$

$4 - y = 0 \implies y = 4 \implies S = \{4, -4\}$ أو

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة

$y = 4 \implies 16 - y^2 = 16 - (4)^2 = 16 - 16 = 0$

$y = -4 \implies 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0$

مثال // حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[1] $4x^2 - 25 = 0$

الحل :

أما $2x + 5 = 0 \implies 2x = -5 \implies x = -\frac{5}{2}$

أو $2x - 5 = 0 \implies 2x = 5 \implies x = \frac{5}{2}$

$S = \left\{-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\}$

[2] $3Z^2 - 12 = 0$

الحل :

$3(Z^2 - 4) = 0 \ \} \div 3$

$Z^2 - 4 = 0 \implies (Z + 2)(Z - 2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \implies Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \implies Z = 2 \implies S = \{-2, 2\}$

[3] $2y^2 - 6 = 0$

الحل :

$2(y^2 - 3) = 0 \ \} \div 2$

$y^2 - 3 = 0 \implies (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) = 0$

أما $y + \sqrt{3} = 0 \implies y = -\sqrt{3}$

أو $y - \sqrt{3} = 0 \implies y = \sqrt{3} \implies S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

[4] $x^2 - 5 = 0$

الحل :

$(x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0$

أما $x + \sqrt{5} = 0 \implies x = -\sqrt{5}$

أو $x - \sqrt{5} = 0 \implies x = \sqrt{5}$

[5] $(Z + 1)^2 - 36 = 0$

الحل :

$(Z + 1 + 6)(Z + 1 - 6) = 0 \implies (Z + 7)(Z - 5) = 0$

أما $Z + 7 = 0 \implies Z = -7$

أو $Z - 5 = 0 \implies Z = 5 \implies S = \{-7, 5\}$

[3 – 2 – 2] حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي

لحل المعادلات بخاصية الجر التربيعي نتبع ما يأتي

[1] نتخلص من الأقواس أن وجدت ثم نجمع أو نطرح الحدود المتشابهة .

[2] نجعل المتغيرات التي تحتوي x^2 في طرف والأعداد في طرف اخر .

[3] نقسم الطرفين على معامل x^2 أي جعل المعدلة بالصورة : $x^2 = a$

[4] نأخذ الجذر التربيعي للطرفين واضعين اشارتي $(\mp)$ أمام العدد . أي أن : $x = \mp\sqrt{a}$

[5] نكتب مجموعة الحل : $S = \{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$

مثال // حل المعادلة التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل : $x^2 = 9$

الحل :

$x^2 = 9 \implies x = \pm\sqrt{9} \implies x = \pm 3 \implies S = \{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 3 \implies x^2 = (3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

$x = -3 \implies x^2 = (-3)^2 = 9$ الطرف الأيمن

مثال // حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[1] $y^2 = 36$

الحل :

$y = \pm\sqrt{3} \implies y = \pm 6 \implies S = \{6, -6\}$

[2] $Z^2 = \frac{9}{25}$

الحل :

$Z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \implies Z = \pm\frac{3}{5} \implies S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$

[3] $x^2 + 81 = 0$

الحل :

$x^2 = -81$ (لا يوجد عدد حقيقي مربعه سالب)

[4] $3y^2 = 7$

الحل :

$y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$

[5] $4x^2 - 5 = 0$

الحل :

$4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

ملاحظة

اذا ربطت طرفي معادلة صحيحة فأن المعادلة الناتجة تبقى صحيحة . أي أن :

$y = x \Rightarrow y^2 = x^2$

لحل مثل هذا النوع من المعادلات نتبع ما يأتي :

[1] نجعل الحد الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ في طرف والأعداد في طرف اخر .

[2] نقسم طرفي المعادلة على معامل المتغير الذي يحتوي على الجذر $(\sqrt{x})$ أي :

نجعل المعادلة بالصورة : $\sqrt{x} = a$

[3] نقوم بتربيع طرفي المعادلة . أي أن : $(\sqrt{x})^2 = a^2$

[4] نكتب مجموعة الحل .

مثال // حل المعادلات التالية في R :

[1] $3\sqrt{x} = 18 \quad \} \div 3$

الحل :

$\sqrt{x} = \frac{18}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 6$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (6)^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$

[2] $\sqrt{y+8} = 3$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y+8})^2 = (3)^2 \Rightarrow y + 8 = 9$

$y = 9 - 8 = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

[3] $\sqrt{5Z} = 7$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{5Z})^2 = (7)^2 \Rightarrow 5Z = 49$

$Z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{49}{5}\right\}$

[4] $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1$ بتربيع الطرفين

الحل :

$\left(\sqrt{\frac{x}{13}}\right)^2 = (1)^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1$

$x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل :

[1] $x^2 - 16 = 0$

الحل :

$(x+4)(x-4) = 0$

أما $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$

$x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$

أو

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 4 \Rightarrow x^2 - 16 = (4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

[2] $81 - y^2 = 0$

الحل :

$(9+y)(9-y) = 0$

أما $9 + y = 0 \Rightarrow y = -9$

أو $9 - y = 0 \Rightarrow y = 9 \Rightarrow S = \{-9, 9\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة :

$y = 9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (9)^2 = 81 - 81 = 0$

$y = -9 \Rightarrow 81 - y^2 = 81 - (-9)^2 = 81 - 81 = 0$

$x = -4 \Rightarrow x^2 - 16 = (-4)^2 - 16 = 16 - 16 = 0$

[3] $2Z^2 - 8 = 0$

الحل:

$2(Z^2 - 4) = 0 \ \} \div 2 \Rightarrow Z^2 - 4 = 0 \Rightarrow (Z + 2)(Z - 2) = 0$

أما $Z + 2 = 0 \Rightarrow Z = -2$

أو $Z - 2 = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

تحقق من صحة الحل: نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

$Z = -2 \Rightarrow 2Z^2 - 8 = 2(-2)^2 - 8 = 8 - 8 = 0$

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[4] $4x^2 - 9 = 0$

الحل:

$(2x + 3)(2x - 3) = 0$

أما $2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

أو $2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

$S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

[5] $5y^2 - 20 = 0 \ \} \div 5$

الحل:

$y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y + 2)(y - 2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

[6] $(y + 2)^2 - 49 = 0$

الحل:

$(y + 2 + 7)(y + 2 - 7) = 0$

$(y + 9)(y - 5) = 0$

أما $y + 9 = 0 \Rightarrow y = -9$

$y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow S =$

أو$\{-9, 5\}$

[7] $(3 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل:

$(3 - Z + 1)(3 - Z - 1) = 0 \Rightarrow (4 - Z)(2 - Z) = 0$

أما $4 + Z = 0 \Rightarrow Z = -4$

أو $2 - Z = 0 \Rightarrow Z = 2 \Rightarrow S = \{-4, 2\}$

[8] $x^2 - 3 = 0$

الحل:

$(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$

أما $x + \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$

$x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{3} \Rightarrow S =$

أو $\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

[9] $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الحل:

$\left(y + \frac{1}{3}\right)\left(y - \frac{1}{3}\right) = 0$

أما $y + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

$y - \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow S =$

أو$\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[10] $x^2 = 64$

الحل:

$x = \pm\sqrt{64} \Rightarrow x = \pm 8 \Rightarrow S = \{8, -8\}$

[11] $Z^2 = 7$

الحل :

$Z = \pm\sqrt{7} \Rightarrow S = \{\sqrt{7}, -\sqrt{7}\}$

[12] $2y^2 = \frac{49}{8}$

الحل :

$y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{16}}$

$y = \pm\frac{7}{4} \Rightarrow S = \{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\}$

[14] $4(x^2 - 12) = 13$

الحل :

$4x^2 - 48 = 13 \Rightarrow 4x^2 = 13 + 48 \Rightarrow 4x^2 = 63$

$x^2 = \frac{63}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{63}{4}}$

$x = \pm\frac{3\sqrt{7}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{3\sqrt{7}}{2}, -\frac{3\sqrt{7}}{2}\}$

[13] $6Z^2 - 5 = 0$

الحل :

$6Z^2 = 5 \Rightarrow Z^2 = \frac{5}{6} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}$

$Z = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\}$

[15] $Z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الحل :

$Z^2 = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} \Rightarrow Z^2 = \frac{5-4}{6} \Rightarrow Z^2 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$Z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \Rightarrow Z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

حل المعادلات التالية في R :

[16] $3\sqrt{x} = 15$

الحل :

$\sqrt{x} = \frac{15}{3} \Rightarrow \sqrt{x} = 5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2 = (5)^2 \Rightarrow x = 25 \Rightarrow S = \{25\}$

[17] $\sqrt{y-5} = 2$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y-5})^2 = (2)^2 \Rightarrow y - 5 = 4$

$y = 4 + 5 = 9 \Rightarrow S = \{9\}$

[18] $\sqrt{2Z} = 6$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{2Z})^2 = (6)^2 \Rightarrow 2Z = 36$

$Z = \frac{36}{2} = 18 \Rightarrow S = \{18\}$

[21] $3Z^2 - 27 = 0 \quad \} \div 3$

الحل :

$Z^2 - 9 = 0 \Rightarrow (Z+3)(Z-3) = 0$

أما $Z + 3 = 0 \Rightarrow Z = -3$

$Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3 \Rightarrow S =$

أو$\{3, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة :

$Z = 3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(3)^2 - 27 = 27 - 27 = 0$

$Z = -3 \Rightarrow 3Z^2 - 27 = 3(-3)^2 - 27 = 27 - 27 = 0$

حل المعادلات التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

[22] $9x^2 - 36 = 0$

الحل :

$(3x+6)(3x-6) = 0$

أما $3x + 6 = 0 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -\frac{6}{3} = -2$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[19] $x^2 = 49$

الحل :

$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة :

$x = 7 \Rightarrow x^2 = (7)^2 = 49$ الطرف الايمن

$x = -7 \Rightarrow x^2 = (-7)^2 = 49$ الطرف الايمن

[20] $5y^2 - 10 = 0 \quad \} \div 5$

الحل :

$y^2 - 2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2$

$y = \pm\sqrt{2} \Rightarrow S = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة :

$y = \sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5\left(\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 10 - 10 = 0$

$y = -\sqrt{2} \Rightarrow 5y^2 - 10 = 5\left(-\sqrt{2}\right)^2 - 10 = 10 - 10 = 0$

[25] $(y+5)^2 - 64 = 0$

الحل :

$(y + 5 + 8)(y + 5 - 8) = 0$

$(y + 13)(y - 3) = 0$

أما $y + 13 = 0 \Rightarrow y = -13$

$y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S =$ أو$\{3, -13\}$

[26] $x^2 - 2 = 0$

الحل :

$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = 0$

أما $x + \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2}$

$x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow S =$ أو$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

[27] $y^2 - \frac{1}{36} = 0$

الحل :

$\left(y + \frac{1}{6}\right)\left(y - \frac{1}{6}\right) = 0$

أما $y + \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{6}$

أو $3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

$S = \{2, -2\}$

[23] $7y^2 - 28 = 0 \quad \} \div 7$

الحل :

$y^2 - 4 = 0 \Rightarrow (y + 2)(y - 2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S =$ أو$\{2, -2\}$

[24] $9(x^2 - 1) - 7 = 0$

الحل :

$9x^2 - 9 - 7 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 16 = 0$

$(3x + 4)(3x - 4) = 0$

$3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x =$ أما$-\frac{4}{3}$

أو $3x - 4 = 0 \Rightarrow 3x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \Rightarrow S = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right\}$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[28] $x^2 = 121$

الحل :

$x = \pm\sqrt{121} \Rightarrow x = \pm 11 \Rightarrow S = \{11, -11\}$

[29] $50 - 2y^2 = 0 \quad \} \div 2$

الحل :

$25 - y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 25 \Rightarrow y = \pm\sqrt{25}$

$y = \pm 5 \Rightarrow S = \{9, -9\}$

[30] $x^2 = \frac{1}{64}$

الحل :

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{8} \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right\}$

[31] $3y^2 = \frac{25}{3}$

الحل :

$y^2 = \frac{25}{9} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{25}{9}} \Rightarrow y = \pm\frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

أو $y-\frac{1}{6}=0 \Rightarrow y=\frac{1}{6} \Rightarrow S=\left\{\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right\}$

[32] $7(x^2-2)=50$

الحل :

$7x^2-14=50 \Rightarrow 7x^2=50+14$

$7x^2=64 \Rightarrow x^2=\frac{64}{7} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{64}{7}}$

$x=\pm\frac{8}{\sqrt{7}} \Rightarrow S=\left\{\frac{8}{\sqrt{7}},-\frac{8}{\sqrt{7}}\right\}$

[33] $\frac{1}{5}y^2=\frac{1}{3}$

الحل :

$3y^2=5 \Rightarrow y^2=\frac{5}{3} \Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}},-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}\right\}$

حل المعادلات التالية في R

[34] $6\sqrt{x}=30 \quad \}\div 3$

الحل :

$\sqrt{x}=\frac{30}{6} \Rightarrow \sqrt{x}=5$ بتربيع الطرفين

$(\sqrt{x})^2=(5)^2 \Rightarrow x=25 \Rightarrow S=\{25\}$

[35] $\sqrt{y-9}=4$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{y-9})^2=(4)^2 \Rightarrow y-9=16$

$y=16+9=25 \Rightarrow S=\{25\}$

[36] $\sqrt{4Z}=8$ بتربيع الطرفين

الحل :

$(\sqrt{4Z})^2=(8)^2 \Rightarrow 4Z=64 \Rightarrow Z=\frac{64}{4}$

$=16$

$S=\{16\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

[37] موكيت سجاد : قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m قطعت الى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل . ما طول ضلع الغرفة .

الحل : مساحة المستطيل = الطول × العرض

$A=12\times 3=36\ m^2$

نفرض طول ضلع المربع $= x$

مساحة المربع = طول الضلع × نفسه $\Leftarrow A=x^2$

مساحة المستطيل = مساحة المربع

$x^2=36 \Rightarrow x=\pm\sqrt{36} \Rightarrow x=\pm 6$

طول ضلع الغرفة 6m

[38] هندسة : قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm قطعت أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm وثنيت لتكون صندوقا دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32cm^3$. جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية .

الحل : الارتفاع = 2 وبعدي القاعدة $= (x-4)$

حجم متوازي السطوح المستطيلة = الطول × العرض × الارتفاع

$2(x-4)(x-4)=32 \quad \}\div 2$

$(x-4)^2=16 \Rightarrow x-4=\pm\sqrt{16}$

$x-4=\pm 4$

أما $x-4=4 \Rightarrow x=4+4=8\ cm$

طول ضلع قطعة الكارتون

أو $x-4=-4 \Rightarrow x=-4+4=0$ يهمل

[39] نافورة : صمم حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه $3m$ في منتصف حديقة مربعة الشكل فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$ فما طول ضلع الحديقة ؟

الحل : نفرض طول ضلع الحديقة $= x$

المساحة المتبقية= مساحة الحديقة - مساحة الحوض

$x^2 - 3^2 = 40 \Rightarrow x^2 - 9 = 40 \Rightarrow x^2 = 40 + 9$

$x^2 = 49 \Rightarrow x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7$

طول ضلع الحديقة $x = 7\ m$ أو يهمل $x = -7$ أما

فكر

[40] تحد : حل المعادلات التالية في R

i) $9(x^2 + 1) = 34$

الحل :

$9x^2 + 9 - 34 = 0 \Rightarrow 9x^2 - 25$

$(3x + 5)(3x - 5) = 0$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

ii) $4x^2 - 3 = 0$

الحل :

$4x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

[41] هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $2y^2 = \frac{16}{10}$, $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل

$y^2 = \frac{16}{20} \Rightarrow y^2 = \frac{4}{5} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$

$y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$

$\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ لا تمثل مجموعة الحل

ii) $3x^2 - 7 = 0$, $\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$

الحل :

$3x^2 = 7 \Rightarrow x^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}$

$x = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}, -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right\}$

$\left\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\right\}$ لا تمثل مجموعة الحل :

أصحح الخطأ : قال صلاح أن المجموعة $\left\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$ اكتشف خطأ صلاح وصححه .

الحل :

$$5x^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$$

$$x = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right\}$$

[43] حس عددي : عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أنقص من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة . ما العدد ؟

الحل : نفرض العدد الصحيح هو x

$$x^2 - 1 = 80 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 80 + 1$$

$$x^2 = 81 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{81} \quad \Rightarrow \quad x = \pm 9$$

$x = -9$ يهمل

$x = 9$ الصحيح

أكتب // مجموعة الحل للمعادلة : $(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

الحل :

$$(8 - 3y + 1)(8 - 3y - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad (9 - 3y)(7 - 3y) = 0$$

أما $9 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = 9 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{3} = 3$

أو $7 - 3y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3y = 7 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \left\{3, \frac{7}{3}\right\}$

الدرس [3 – 3] حل المعادلات التربيعية بالتجربة

[3 – 3 – 1] حل المعادلة : $x^2 + bx + c = 0$

تحليل المقدار الى قوسين بإشارتين مختلفتين أو متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق (الثالث) والحد الوسط (الثاني)

مثال // حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $x^2 - 7x + 12 = 0$

الحل :

$$(x - 4)(x - 3) = 0$$

أما $x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4$

أو $x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{4, 3\}$

[2] $y^2 + 8y + 15 = 0$

الحل :

$(y + 5)(y + 3) = 0$

أما $y + 5 = 0 \Rightarrow y = -5$

$y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S =$ أو$\{-5, -3\}$

[3] $Z^2 - Z - 30 = 0$

الحل :

$(Z - 6)(Z + 5) = 0$

أما $Z - 6 = 0 \Rightarrow Z = 6$

$Z + 5 = 0 \Rightarrow Z = -5 \Rightarrow S =$ أو$\{6, -5\}$

[4] $x^2 - 2x - 63 = 0$

الحل :

$(x - 9)(x + 7) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

$x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \Rightarrow S =$ أو$\{9, -7\}$

مثال // اذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار 2m على ضعف عرضه ومساحته $480m^2$. فما بعدي الملعب ؟

الحل :

نفرض عرض الملعب x , طول الملعب $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$x(2x + 2) = 480$

$2x^2 + 2x - 480 = 0 \} \div 2$

$x^2 + x - 240 = 0 \Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$

أما $x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$ يهمل

أو $x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15m$ عرض الملعب

$2x + 2 = 2(15) + 2 = 30 + 2$

$= 32m$ طول الملعب

مثال // ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12 ؟

الحل :

نفرض العدد x , مربع العدد x^2

$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$

$(x - 4)(x + 3) = 0$

أما $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

[3 – 3 – 1] حل المعادلة : $ax^2 + bx + c = 0$

مثال // حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $4y^2 - 14y + 6 = 0$

الحل :

$(4y - 2)(y - 3) = 0$

أما $4y - 2 = 0 \Rightarrow 4y = 2 \Rightarrow y = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow S = \left\{3, \frac{1}{3}\right\}$

[3] $20 + 13Z + 2Z^2 = 0$

الحل :

$(4 + Z)(5 + 2Z) = 0$

أما $4 + Z = 0 \Rightarrow Z = -4$

أو $5 + 2Z = 0 \Rightarrow 2Z = -5 \Rightarrow Z = -\frac{5}{2}$

$S = \left\{-4, -\frac{5}{2}\right\}$

[2] $3x^2 + 18x - 21 = 0$

الحل :

$(x + 7)(3x - 3) = 0$

أما $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$3x - 3 = 0 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{3} =$ أو1

$S = \{1, -7\}$

[4] $9x^2 - 69x - 24 = 0 \} \div 3$

الحل :

$3x^2 - 23x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 8)(3x + 1) = 0$

أما $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

أو $3x + 1 = 0 \Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{8, -\frac{1}{3}\right\}$

مثال // مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار $1m$ فاذا كانت مساحة المسبح $140m^2$ جد أبعاده ؟

الحل : نفرض عرض المسبح x

طول المسبح $3x-1$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(3x-1)=140 \Rightarrow 3x^2-x-140=0$

$(x-7)(3x+20)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7m$ عرض المسبح

أو $3x+20=0 \Rightarrow 3x=-20 \Rightarrow x=-\frac{20}{3}$ يهمل

طول المسبح $3x-1=3(7)-1=21-1=20m$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $x^2-9x+18=0$

الحل :

$(x-6)(x-3)=0$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6$

أو $x-3=0 \Rightarrow x=3 \Rightarrow S=\{6,3\}$

[2] $x^2-4x-32=0$

الحل :

$(x-8)(x+4)=0$

أما $x-8=0 \Rightarrow x=8$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow S=\{8,-4\}$

[3] $y^2+48y-49=0$

الحل :

$(y+49)(y-1)=0$

أما $y+49=0 \Rightarrow y=-49$

$y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=$ أو$\{1,-49\}$

[4] $x^2-9x-36=0$

الحل :

$(x-12)(x+3)=0$

أما $x-12=0 \Rightarrow x=12$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3 \Rightarrow S=$ أو$\{12,-3\}$

[5] $x^2-3x+2=0$

الحل :

$(x-2)(x-1)=0$

[8] ما العدد الذي لو أضيف 4 أضعافه الى مربعه لكان الناتج 45

الحل : نفرض العدد هو x , مربع العدد x^2

أربعة اضعاف العدد $4x$

$x^2+4x=45 \Rightarrow x^2+4x-45=0$

$(x+9)(x-5)=0$

أما $x+9=0 \Rightarrow x=-9$

$x-5=0 \Rightarrow x=5 \Rightarrow S=$ أو$\{5,-9\}$

[9] سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $48m^2$. ما أبعاد السجادة ؟

الحل : نفرض عرض السجادة x , طول السجادة $x+2$

مساحة السجادة = الطول × العرض

$x(x+2)=48 \Rightarrow x^2+2x-48=0$

$(x+8)(x-6)=0$

أما $x+8=0 \Rightarrow x=-8$ يهمل

أو $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ عرض السجادة

طول السجادة $x+2=6+2=8m$

أما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{1,2\}$

[6] $y^2-8y-33=0$

الحل:

$(y-11)(y+3)=0$

أما $y-11=0 \Rightarrow y=11$

أو $y+3=0 \Rightarrow y=-3 \Rightarrow S=\{11,3\}$

[9] ما العدد الذي مربعه يزيد عن ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل: نفرض العدد هو x , مربع العدد x^2

ضعف العدد $2x$

$x^2-2x=35 \Rightarrow x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

$x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow S=\{7,-5\}$ أو

[14] $70-33y-4y^2=0$

الحل:

$(7-4y)(10+y)=0$

أما $7-4y=0 \Rightarrow 4y=7 \Rightarrow y=\frac{7}{4}$

$10+y=0 \Rightarrow y=-10 \Rightarrow S=\left\{-10,\frac{7}{4}\right\}$ أو

حل المعادلات التالية في R :

[10] $15x^2-11x-14=0$

الحل:

$(5x-7)(3x+2)=0$

أما $5x-7=0 \Rightarrow 5x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{5}$

أو $3x+2=0 \Rightarrow 3x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$

$S=\left\{\frac{7}{5},-\frac{2}{3}\right\}$

[11] $6+7x-5x^2=0$

الحل:

$(3+5x)(2-x)=0$

أما $3+5x=0 \Rightarrow 5x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{5}$

أو $2-x=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow S=\left\{2,-\frac{3}{5}\right\}$

[12] $42+64y+24y^2=0 \quad \} \div 2$

الحل:

$21+32y+12y^2=0$

$(3+2y)(7+6y)=0$

أما $3+2y=0 \Rightarrow 2y=-3 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}$

أو $7+6y=0 \Rightarrow 6y=-7 \Rightarrow y=-\frac{7}{6}$

$S=\left\{-\frac{7}{6},-\frac{3}{2}\right\}$

[13] $36-75x+6x^2=0 \quad \} \div 3$

الحل:

$12-25x+2x^2=0 \Rightarrow (12-x)(1-2x)=0$

أما $12-x=0 \Rightarrow x=12$

أو $1-2x=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{12,\frac{1}{2}\right\}$

[15] أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار 4m على عرضها ما بعدا الأرض اذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟

الحل: نفرض العرض x

الطول $x+4$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+4)=60 \Rightarrow x^2+4x-60=0$

$(x+10)(x-6)=0$

أما $x+10=0 \Rightarrow x=-10$ يهمل

أو $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ العرض

$x+4=6+4=10m$ الطول

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[16] $x^2-15x+56=0$

الحل :

$(x-8)(x-7)=0$

أما $x-8=0 \Rightarrow x=8$

أو $x-7=0 \Rightarrow x=7 \Rightarrow S=\{8,7\}$

[17] $y^2+16y+63=0$

الحل :

$(y+9)(y+7)=0$

أما $y+9=0 \Rightarrow y=-9$

$y+7=0 \Rightarrow y=-7 \Rightarrow S=$

أو$\{-9,-7\}$

[18] $x^2+15x-16=0$

الحل :

$(x+16)(x-1)=0$

أما $x+16=0 \Rightarrow x=-16$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{1,-16\}$

[19] $y^2-y-42=0$

الحل :

$(y-7)(y+6)=0$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

أو $y+6=0 \Rightarrow y=-6 \Rightarrow S=\{7,-6\}$

[20] $x^2-4x+3=0$

الحل :

$(x-3)(x-1)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{3,1\}$

[21] $y^2-6y-55=0$

الحل :

$(y-11)(y+5)=0$

أما $y-11=0 \Rightarrow y=11$

$y+5=0 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow S=$

أو$\{11,-5\}$

[22] قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار 2m عن طولها . ما بعدا القطعة المعدنية اذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟

الحل : نفرض طول القطعة x , عرض القطعة $x-2$

مساحة القطعة = الطول × العرض

$x(x-2)=24 \Rightarrow x^2-2x-24=0$

$(x-6)(x+4)=0$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ طول القطعة

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4$ يهمل

$x-2=6-2=4m$ عرض القطعة

[30] ما العدد الذي مربعه ينقص عن ثلاثة أمثاله بمقدار 2 ؟

الحل : نفرض العدد x , مربع العدد x^2 , ثلاثة أمثاله $3x$

$3x-x^2=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$

$(x-2)(x-1)=0$

أما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{2,1\}$

[23] $12x^2 - 20x + 7 = 0$

الحل :

$(2x-1)(6x-7) = 0$

أما $2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

أو $6x - 7 = 0 \Rightarrow 6x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{6}$

$S = \left\{\frac{1}{2}, \frac{7}{6}\right\}$

[24] $28 + 2Z - 8Z^2 = 0$

الحل :

$(7+4Z)(4-2Z) = 0$

$7 + 4Z = 0 \Rightarrow 4Z = -7 \Rightarrow Z =$ أما $-\frac{7}{4}$

$4 - 2Z = 0 \Rightarrow 2Z = 4 \Rightarrow Z = \frac{4}{2} =$ أو 2

$S = \left\{2, -\frac{7}{4}\right\}$

[25] $81 - 9x - 12x^2 = 0$

الحل :

$(9-4x)(9+3x) = 0$

أما $9 - 4x = 0 \Rightarrow 4x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{4}$

$9 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{3} =$ أو -3

$S = \left\{-3, \frac{9}{4}\right\}$

[26] $50Z^2 + 10Z - 4 = 0 \quad \} \div 2$

الحل :

$25Z^2 + 5Z - 2 = 0 \Rightarrow (5Z+2)(5Z-1) = 0$

أما $5Z + 2 = 0 \Rightarrow 5Z = -2 \Rightarrow Z = -\frac{2}{5}$

أو $5Z - 1 = 0 \Rightarrow 5Z = 1 \Rightarrow Z = \frac{1}{5}$

$S = \left\{\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}\right\}$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل

[28] $x^2 - 4x + 3 = 0$

الحل :

$(x-3)(x-1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة :

$x = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (3)^2 - 4(3) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

$x = 1 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (1)^2 - 4(1) + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

[29] $y^2 - 9y - 36 = 0$

الحل :

$(y-12)(y+3) = 0$

أما $y - 12 = 0 \Rightarrow y = 12$

أ $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow S = \{12, -3\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y بالمعادلة :

$y = 12 \Rightarrow y^2 - 9y - 36 = (12)^2 - 9(12) - 36 = 144 - 108 - 36 = 0$

$y = -3 \Rightarrow y^2 - 9y - 36 = (-3)^2 - 9(-3) - 36 = 9 + 27 - 36 = 0$

[27] صالة طعام ينقص طولها عن مثلي عرضها بمقدار 3m ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة ؟

الحل : نفرض عرض الصالة x , مثلي عرضها $2x$

طول الصالة $= 2x - 3$

مساحة الصالة = الطول × العرض

$x(2x-3) = 54 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 54 = 0$

$(x-6)(2x+9) = 0$

أما $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6m$ عرض الصالة

$2x + 9 = 0 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x =$ أو $-\frac{9}{2}$ يهمل

$2x - 3 = 2(6) - 3 = 12 - 3 = 9m$ طول الصالة

[30] $4 - 26x + 12x^2 = 0$

الحل :

$(4 - 2x)(1 - 6x) = 0$

$4 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = \frac{4}{2} =$ أما 2

أو $1 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

[31] $80 - 38y + 3y^2 = 0$

الحل :

$(8 - 3y)(10 - y) = 0$

أما $8 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 8 \Rightarrow y = \frac{8}{3}$

$10 - y = 0 \Rightarrow y = 10 \Rightarrow S =$ أو $\left\{10, \frac{8}{3}\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y بالمعادلة :

$y = 10 \Rightarrow 80 - 38y + 3y^2$

$= 80 - 38(10) + 3(10)^2$

$= 80 - 380 + 300 = 0$

$y = \frac{8}{3} \Rightarrow 80 - 38y + 3y^2 = 80 - 38\left(\frac{8}{3}\right) + 3\left(\frac{8}{3}\right)^2$

$= 80 - \frac{304}{3} + \frac{64}{3} = \frac{240 - 304 + 64}{3} = \frac{0}{3}$

تدرب وحل مسائل حياتية

[32] رياضة : اذا كان طول صورة ملعب كرة القدم بمقدار $4m$ على ضعف عرضها فما بعدا الصورة اذا كانت مساحتها $160m^2$ ؟

الحل : نفرض عرض الصورة x , ضعف العرض $2x$

طول الصورة $2x + 4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x + 4) = 160$

$2x^2 + 4x - 160 = 0 \} \div 2$

$x^2 + 2x - 80 = 0$

$(x + 10)(x - 8) = 0$

أما $x + 10 = 0 \Rightarrow x = -10$ يهمل

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8m$ عرض الصورة

طول الصورة $2x + 4 = 2(8) + 4 = 16 + 4 = 20m$

[33] حقل نعام : اذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار $4m$ عن ضعف عرضه فاذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ فهل يكفي سياج طوله $44m$ لتحويط الحقل ؟

الحل : نفرض عرض الحقل x , ضعف العرض $2x$

طول الحقل $2x - 4$

المساحة = الطول × العرض

$x(2x - 4) = 96 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 96 = 0 \} \div 2$

$x^2 - 2x - 48 = 0 \Rightarrow (x + 6)(x - 8) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ يهمل

أو $x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8m$ عرض

طول الحقل $2x - 4 = 2(8) - 4 = 16 - 4 = 12m$

محيط المستطيل = 2 × (الطول + العرض)

$P = 2 \times (12 + 8) = 2 \times 20 = 40m$

نعم يكفي

[34] أطار صورة : اشترى سامر اطار لصورة طوله ضعف عرضه يحتاج سامر الى تصغير الاطار بمقدار $2cm$ من طوله وعرضه ليصبح مناسبا للصورة فما أبعاد الاطار الذي اشتراه سامر اذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$ ؟

الحل : نفرض عرض الاطار x , طول الاطار $2x$

بعد التصغير يصبح : العرض $(x - 2)$, الطول $(2x - 2)$

المساحة = الطول × العرض

$(2x-2)(x-2)=40$

$2x^2-4x-2x+4-40=0$

$2x^2-6x-36=0 \ \} \div 2 \Rightarrow x^2-3x-18=0$

$(x-6)(x+3)=0$

أما $x-6=0 \Rightarrow x=6m$ العرض

أو $x+3=0 \Rightarrow x=-3$ يهمل

$2x=2(6)=12m$ طول

فـــكر

[35] تحد : حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

i) $(x-3)(x+2)=14$

الحل :

$x^2+2x-3x-6-14=0 \Rightarrow x^2-x-20=0$

$(x-5)(x+4)=0$

أما $x-5=0 \Rightarrow x=5$

أو $x+4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow S=\{5,-4\}$

ii) $3y^2-11y+10=80$

الحل :

$3y^2-11y+10-80=0$

$3y^2-11y-70=0 \Rightarrow (y-7)(3y+10)=0$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

$3y+10=0 \Rightarrow 3y=-10 \Rightarrow y=-\frac{10}{3}$ أو

$S=\left\{7,-\frac{10}{3}\right\}$

[36] وضح : هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا ؟

i) $4x^2+2x=30$, $\left\{-\frac{2}{5},3\right\}$

الحل :

$(2x+6)(2x-5)=0$

أما $2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{2}=3$

أو $2x-5=0 \Rightarrow 2x=5 \Rightarrow x=\frac{5}{2}$

$S=\left\{\frac{5}{2},3\right\}$ لا تمثل مجموعة حل

[36] أصحح الخطأ : قالت رنا أن مجموعة الحل للمعادلة : $2x^2-34x+60=0$ هي $\{3,15\}$. حدد خطأ رنا وصححه .

الحل :

$(2x-4)(x-15)=0$

$2x-4=0 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{2}=2$ أما

$x-15=0 \Rightarrow x=15 \Rightarrow S=\{2,15\}$ أو

خطأ رنا مجموعة الحل .

[37] حس عددي : عدد صحيح مكون من رقمين فاذا كان رقم آحاده يزيد على ضعف عشراته بمقدار 1 وحاصل ضرب رقميه يساوي 10 فما العدد ؟

الحل : نفرض العشرات x , ضعف العشرات $2x$ الاحاد $2x+1$

$x(2x+1)=10 \Rightarrow 2x^2+x-10=0$

$(2x+5)(x-2)=0$

أما $2x+5=0 \Rightarrow 2x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{2}$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow S=\left\{2,-\frac{5}{2}\right\}$

أكتب // معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها :
ما العدد الذي ينقص مربعه على ضعفه بمقدار 35 ؟

الحل : نفرض العدد x , ضعف العدد $2x$, مربع العدد x^2

$x^2-2x=35 \Rightarrow x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

$x+5=0 \Rightarrow x=-5 \Rightarrow S=\{7,-5\}$ أو

ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0$, $\left\{2, \frac{7}{2}\right\}$

الحل :

$(7 - 2y)(6 - 3y) = 0$

أما $7 - 2y = 0 \Rightarrow 2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}$

أو $6 - 3y = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2$

$S = \left\{2, \frac{7}{2}\right\}$ تمثل مجموعة حل

[3 – 4 – 1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

تعرفت سابقا كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل والآن سوف نستخدم هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة . أي أن :

$$ax^2 + bx + c = \left(\sqrt{ax^2} \pm \sqrt{c}\right)^2$$

حيث الإشارة $\pm$ حسب إشارة الحد الوسط (الثاني).

مثال // الجكوار هو أحد السنوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور تمثل المعادلة : $x^2 - 20x + 100 = 0$ مساحة المنطقة المربعة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات . ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة ؟

الحل :

$x^2 - 20x + 100 = 0$

$(x - 10)^2 = 0 \Rightarrow x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10$

طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو : $10m$

مثال // حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $4x^2 + 20x + 25 = 0$

الحل :

$(2x + 5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$

$2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

[2] $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$

الحل :

$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

[3] $3 - 6\sqrt{3}Z + 9Z^2 = 0$

الحل :

$\left(\sqrt{3} - 3Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3Z = 0$

$3Z = \sqrt{3} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{3}$

[3 – 4 – 2] حل المعادلات التربيعية بأكمال المربع

يمكن حل المعادلة من الدرجة الثانية بالمربع الكامل كالآتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ حيث $a \neq 0$

2) اذا كان $a \neq 1$ فنقسم المعادلة على a

3) نضيف الى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x) أي أن : $\left(\frac{1}{2}\,b\right)^2$

4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعا كاملا ونبسط الطرف الأيمن .

5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x

مثال // حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع :

[1] $x^2 - 4x - 12 = 0$

الحل :

$x^2 - 4x = 12$

$\left(\frac{1}{2}\times 4\right)^2 = (2)^4 = 4$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 4x + 4 = 12 + 4 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$ بأخذ الجذر التربيعي الطرفين

$x - 2 = \pm 4 \Rightarrow$ أما $x - 2 = 4 \Rightarrow x = 4 + 2 = 6$

أو $x - 2 = -4 \Rightarrow x = -4 + 2 = -2 \Rightarrow S = \{6, -2\}$

تأكد من فهمك

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[1] $x^2 + 12x + 36 = 0$

الحل :

$(x+6)^2 = 0 \Rightarrow x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

[2] $y^2 - 10y + 25 = 0$

الحل :

$(y-5)^2 = 0 \Rightarrow y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$

[3] $4x^2 - 4x + 1 = 0$

الحل :

$(2x-1)^2 = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0$

$2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

[4] $y^2 + 2\sqrt{7}\,y + 7 = 0$

الحل :

$\left(y + \sqrt{7}\right)^2 = 0 \Rightarrow y + \sqrt{7} = 0$

$\Rightarrow y = -\sqrt{7}$

[5] $x^2 + 16x = -64$

الحل :

$x^2 + 16x + 64 = 0 \Rightarrow (x+8)^2 = 0$

$x + 8 = 0 \Rightarrow x = -8$

[6] $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

الحل :

$\left(\frac{1}{4} - x\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

[2] $2y^2 - 3 = 3y$

الحل :

$2y^2 - 3y = 3 \;\}\div 2 \Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{24+9}{16}$

$\left(y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{33}{16}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}$

أما $y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{33}+3}{4}$

أو $y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3-\sqrt{33}}{4}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33}+3}{4}, \frac{3-\sqrt{33}}{4}\right\}$

مثال // مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm قدر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح اذا كانت مساحته $36cm^2$ ؟

الحل : نفرض عرض المستطيل x ، طول المستطيل $x+2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+2) = 36 \Rightarrow x^2 + 2x = 36$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2 = (1)^2 = 1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$

$(x+1)^2 = 37$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x + 1 = \pm\sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$

$x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 6 - 1 \approx$ عرض المستطيل $5cm$ أما

أو $x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -6 - 1 = -7$ يهمل

طول المستطيل $x+2=5+2=7\ cm$

حل المعادلات التالية في R بأكمال المربع :

[7] $x^2-10x-24=0$

الحل :

$x^2-10x=24$

$\left(\frac{1}{2}\times 10\right)^2=(5)^2=25$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-10x+25=24+25$

$(x-5)^2=49$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-5=\pm 7$

أما $x-5=7 \Rightarrow x=7+5=12$

أو $x-5=-7 \Rightarrow x=-7+5=-2$

$S=\{12,-5\}$

[8] $y^2-3=2y$

الحل :

$y^2-2y=3$

$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=(1)^2=1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-2y+1=3+1$

$(y-1)^2=4$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-1=\pm 2$

أما $y-1=2 \Rightarrow y=2+1=3$

$x^2-\frac{3}{4}x+\frac{9}{64}=4+\frac{9}{64}$

$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2=\frac{265}{64}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-\frac{3}{8}=\pm\frac{\sqrt{265}}{8}$

أما $x-\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{\sqrt{265}}{8}+\frac{3}{8}=\frac{\sqrt{265}+3}{8}$

أو $x-\frac{3}{8}=-\frac{\sqrt{265}}{8} \Rightarrow x=\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{265}}{8}=\frac{3-\sqrt{265}}{8}$

$S=\left\{\frac{\sqrt{265}+3}{8},\frac{3-\sqrt{265}}{8}\right\}$

أو $y-1=-2 \Rightarrow y=-2+1=-1$

$S=\{3,-1\}$

[10] $3y^2+2y=1$

الحل :

$3y^2+2y=1 \ \}\div 3 \Rightarrow y^2+\frac{2}{3}y=\frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-\frac{2}{3}y+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$

$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{3+1}{9}$

$\left(y-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y-\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}$

أما $y-\frac{1}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1$

أو $y-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3} \Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$

$S=\left\{1,-\frac{1}{3}\right\}$

[11] $x^2-\frac{6}{5}x=\frac{1}{5}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{6}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-\frac{6}{5}x+\frac{9}{25}=\frac{1}{5}+\frac{9}{25}=\frac{5+9}{25} \Rightarrow \left(x-\frac{3}{5}\right)^2$

[9] $4x^2 - 3x - 16 = 0$

الحل :

$4x^2 - 3x = 16 \ \} \div 4 \implies x^2 - \frac{3}{4}x = 4$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{14}{25}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{3}{5} = \pm\frac{\sqrt{14}}{5}$

أما $x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}}{5} \implies x = \frac{\sqrt{14}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{14}+3}{5}$

أو $x - \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{14}}{5} \implies x = \frac{3}{5} - \frac{\sqrt{14}}{5} = \frac{3-\sqrt{14}}{5}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{14}+3}{5}, \frac{3-\sqrt{14}}{5}\right\}$

[12] $5y^2 + 15y - 30 = 0$

الحل :

$5y^2 + 15y = 30 \ \} \div 5 \implies y^2 + 3y = 6$

$\left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 3y + \frac{9}{4} = 6 + \frac{9}{4}$

$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{33}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{33}}{2}$

أما $y + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33}}{2} \implies y = \frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{33}-3}{2}$

أو $y + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{33}}{2} \implies y = -\frac{\sqrt{33}}{2} - \frac{3}{2} = \frac{-\sqrt{33}-3}{2}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{33}-3}{2}, \frac{-\sqrt{33}-3}{2}\right\}$

تدرب وحل التمرينات

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[13] $x^2 + 24x + 144 = 0$

الحل :

$(x+12)^2 = 0 \implies x + 12 = 0 \implies x = -12$

[14] $y^2 - 20y + 100 = 0$

الحل :

$(y-10)^2 = 0 \implies y - 10 = 0 \implies y = 10$

[15] $y^2 + 4\sqrt{2}\,y + 8 = 0$

الحل :

$\left(y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 0 \implies y + 2\sqrt{2} = 0$

$y = -2\sqrt{2}$

[16] $7 - 2\sqrt{7}Z + Z^2 = 0$

الحل :

$\left(\sqrt{7} - Z\right)^2 = 0 \implies \sqrt{7} - Z = 0 \implies Z = \sqrt{7}$

[17] $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}\,y = 0$

الحل :

$3y^2 - 12\sqrt{3}\,y + 36 = 0$

$\left(\sqrt{3}\,y - 6\right)^2 = 0 \implies \sqrt{3}\,y - 6 = 0$

$\sqrt{3}\,y = 6 \implies y = \frac{6}{\sqrt{3}}$

[18] $9Z^2 - 10Z + \frac{25}{9} = 0$

الحل :

$\left(3Z - \frac{5}{3}\right)^2 = 0 \implies 3Z - \frac{5}{3} = 0$

$3Z = \frac{5}{3} \implies Z = \frac{5}{9}$

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[19] $y^2 + 2\sqrt{3}\,y = 3$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2$

$= 3$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 2\sqrt{3}\,y + 3 = 3 + 3$

$\left(y + \sqrt{3}\right)^2 = 6$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + \sqrt{3} = \pm\sqrt{6}$

أما $y + \sqrt{3} = \sqrt{6} \Rightarrow y = \sqrt{6} - \sqrt{3}$

أو $y + \sqrt{3} = -\sqrt{6} \Rightarrow y = -\sqrt{6} - \sqrt{3}$

$S = \{\sqrt{6} + \sqrt{3}\,, -\sqrt{6} - \sqrt{3}\}$

[20] $4Z^2 - 12Z - 27 = 0$

الحل :

$4Z^2 - 12Z = 27 \;\}\div 4 \Rightarrow Z^2 - 3Z = \frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2} \times 3\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 - 3Z + \frac{9}{4} = \frac{27}{4} + \frac{9}{4}$

$\left(Z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{36}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z - \frac{3}{2} = \pm\frac{6}{2}$

[21] $x^2 - 2x = 0$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 2x + 1 = 1$

$(x - 1)^2 = 1$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 1 = \pm 1$

أما $x - 1 = 1 \Rightarrow x = 1 + 1 = 2$

أو $x - 1 = -1 \Rightarrow x = -1 + 1 = 0$

$S = \{2, 0\}$

[22] $y^2 - 8y = 24$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - 8y + 16 = 24 + 16$

$(y - 4)^2 = 40$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - 4 = \pm 2\sqrt{10}$

أما $y - 4 = 2\sqrt{10} \Rightarrow y = 2\sqrt{10} + 4$

أو $y - 4 = -2\sqrt{10} \Rightarrow y = 4 - 2\sqrt{10}$

$S = \{2\sqrt{10} + 4\,, 4 - 2\sqrt{10}\}$

[23] $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = 4 + \frac{1}{9}$

$\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{37}{9}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{1}{3} = \pm\frac{\sqrt{37}}{3}$

أما $x - \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37}}{3} + \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{37} + 1}{3}$

أو $x - \frac{1}{3} = \frac{-\sqrt{37}}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{37}}{3} = \frac{1 - \sqrt{37}}{3}$

$S = \left\{\frac{\sqrt{37} + 1}{3}\,, \frac{1 - \sqrt{37}}{3}\right\}$

[24] $8y^2 + 16y - 64 = 0$

الحل :

$8y^2 + 16y = 64 \;\}\div 8 \Rightarrow y^2 + 2y = 8$

$\left(\frac{1}{2} \times 2\right)^2 = (1)^2 = 1$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 2y + 1 = 8 + 1$

$(y + 1)^2 = 9$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + 1 = \pm 3$

أما $y + 1 = 3 \Rightarrow y = 3 - 1 = 2$

أو $y + 1 = -3 \Rightarrow y = -3 - 1 = -4$

$S = \{2, -4\}$

تدرب وحل مسائل حياتية

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

[25] $x^2 - 6x = 15$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = 15 + 9$

$(x-3)^2 = 24$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 \approx \pm 5$

أما $x - 3 \approx 5 \Rightarrow x = \approx 5 + 3 \approx 8$

أو $x - 3 \approx -5 \Rightarrow x \approx -5 + 3 \approx -2$

$S = \{8, -2\}$

[26] $y(2y + 28) = 28$

الحل :

$2y^2 + 28y = 28 \ \} \div 2 \Rightarrow y^2 + 14y = 14$

$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2 = 49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 + 14y + 49 = 14 + 49$

$(y+7)^2 = 63$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y + 7 = \pm 8$

أما $y + 7 = 8 \Rightarrow y = 8 - 7 = 1$

أو $y + 7 = -8 \Rightarrow y = -8 - 7 = -15$

$S = \{1, -15\}$

[27] $Z^2 + 10Z + 10 = 0$

الحل :

$Z^2 + 10Z = -10$

$\left(\frac{1}{2} \times 10\right)^2 = (5)^2 = 25$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + 10Z + 25 = -10 + 25$

$(Z+5)^2 = 15$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

[28] مدينة بابل : مدينة بابل هي مدينة عراقية كانت تقع على نهرالفرات وكانت عاصمة البابليين أيم حكم حمورابي سنة $(1750 - 1792)$ قبل الميلاد . اذا كانت المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ تمثل مساحة أحدى القاعات المربعة الشكل اذ x يمثل طول ضلع القاعة . جد طول ضلع القاعة ؟

الحل :

$x^2 - 28x + 196 = 0 \Rightarrow (x-14)^2 = 0$

$x - 14 = 0 \Rightarrow x = 14$ طول ضلع القاعة

[29] دب الباندا : المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 مترا وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها . جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح .

الحل : نفرض الطول x , العرض $x - 8$

المساحة = الطول × العرض

$x(x-8) = 126 \Rightarrow x^2 - 8x = 126$

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 8x + 16 = 126 + 16$

$(x-4)^2 = 142$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 4 \approx \pm 12$

$x - 4 \approx 12 \Rightarrow x \approx 12 + 4 \approx$ الطول 16 أما

$x - 4 \approx -12 \Rightarrow x \approx -12 + 4 \approx$ يهمل -8 أو

$x - 8 = 16 - 8 = 8$ العرض

[30] حيتان : تجنح بعض المجموعات من الحيتان الى الشاطئ ولا يوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة ويحاول حماة البيئة ارجاعها الى البحر. حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة اكمال المربع لايجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحن الى أحد شواطئ استراليا .

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 20\right)^2 = (10)^2$

$= 100$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 + 20x + 100 = 525 + 100$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين $(x+10)^2 = 625$

$x+10 = \pm 25$

أما $x+10=25 \Rightarrow x = 25-10 = 15$

$x+10=-25 \Rightarrow x = -25-10 =$ يهمل -35 أو

عدد الحيتان هو 15

فـــكر

[31] تحد : حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

i) $4x(x-6) = 27$

الحل :

$4x^2 - 24x = 27 \ \} \div 4 \Rightarrow x^2 - 6x = \frac{27}{4}$

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = \frac{27}{4} + 9 \Rightarrow (x-3)^2 = \frac{27+36}{4}$

$(x-3)^2 = \frac{63}{4}$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 \approx \pm\frac{8}{4} \Rightarrow x - 3 \approx \pm 2$

أما $x-3 \approx 2 \Rightarrow x \approx 2+3 \approx 5$

$x-3 \approx -2 \Rightarrow x \approx -2+3 \approx 1 \Rightarrow S =$ أو $\{5, 1\}$

ii) $6y^2 - 48y = 6$

الحل :

$6y^2 - 48y = 6 \ \} \div 6 \Rightarrow y^2 - 8y = 1$

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - 8y + 16 = 1 + 16$

$(y-4)^2 = 17$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - 4 \approx \pm 4$

أما $x-4 \approx 4 \Rightarrow x \approx 4+4 \approx 8$

$x-4 \approx -4 \Rightarrow x \approx -4+4 \approx 0 \Rightarrow S =$ أو $\{8, 0\}$

أكتب // مجموعة الحل للمعادلة : $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}Z + Z^2 = 0$

الحل :

$\left(\frac{1}{9} - Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{9} - Z = 0 \Rightarrow Z = \frac{1}{9}$

[32] أصحح الخطأ : حلت سوسن المعادلة: $4x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 3 = 0$ بطريقة اكمال المربع وكتبت مجموعة الحل للمعادلة بالشكل الآتي : $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$. اكتشف خطأ سوسن وصححه .

الحل :

$4x^2 - 4\sqrt{3}\,x = -3 \ \} \div 4 \Rightarrow x^2 - \sqrt{3}\,x = -\frac{3}{4}$

$\left(\frac{1}{2} \times \sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - \sqrt{3}\,x + \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}$

$\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

[33] حس عددي : هل أن مجموعة الحل للمعادلة : $y^2 - 4y + 1 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة ؟ وضح اجابتك

الحل : كلا تحتوي على قيمتين متساويتين ومتشابهتين بالإشارة

$y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow (y-2)^2 = 0$

$y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$

[3 – 5 – 1] حل المعادلات باستعمال القانون العام (الدستور)

يمكن حل المعادلة $a \neq 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ باستخدام القانون العام :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

لحل المعادلة بالقانون العام وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية كما يأتي :

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) : $ax^2 + bx + c = 0$

2) نكتب قيم المعاملات : a معامل x^2 , b معامل x مع اشارته , c الحد المطلق مع اشارته .

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير .

مثال // أريد رصف ممر على جانبي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة $7m$ وعرضها $5m$ ومساحة الرصف $45m^2$ جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك .

الحل : نفرض عرض الممر $= x$

فإن مساحة الجزء الأيمن من الممر $= 7x$

مساحة الجزء الممر الأمامي $= 5x$ ومساحة زاوية الممر $= x^2$

ومجموع مساحتي الرصف $45m^2$

$$x^2 + 7x + 5x = 45 \implies x^2 + 12x - 45 = 0$$

$$a = 1 , b = 12 , c = -45$$

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-12 \mp \sqrt{(12)^2 - 4(1)(-45)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-12 \mp \sqrt{144 + 180}}{2} = \frac{-12 \mp \sqrt{324}}{2}$$

$$x = \frac{-12 \mp 18}{2}$$

أما $x = \frac{-12 + 18}{2} = \frac{6}{2} = 3\ m$ عرض الممر

أو $x = \frac{-12 - 18}{2} = \frac{-30}{2} = -15$ يهمل

مثال // جد مجموعة حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام

في R : $x^2 - 3x - 5 = 0$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2}$

أو $x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{29}}{2} , \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \right\}$$

[3 − 5 − 2]

المقدار المميز $[\Delta = b^2 - 4ac]$

يمكن معرفة نوع جذري المعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$ باستعمال المميز كالآتي :

1) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب ومربع كامل يكون نوع الجذران حقيقيان نسبيان .

2) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac > 0]$ موجب وليس مربعا كاملا يكون نوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

3) اذا كان المميز يساوي صفر $[b^2 - 4ac = 0]$ يكون نوع الجذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

4) اذا كان المميز $[b^2 - 4ac < 0]$ سالب يكون نوع الجذران غير حقيقيين (ليس لها حل في R)

مثال // حدد جذري المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا :

[1] $2x^2 + 3x - 2 = 0$

الحل :

$a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

أما $x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $x = \frac{-3 - 5}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \implies S = \left\{-2, \frac{1}{2}\right\}$

[2] $y^2 - 4y - 9 = 0$

الحل :

$a = 1, \ b = -4 \ , \ c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-4)^2 - 4(1)(-9) = 16 + 36 = 52$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين.

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{52}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2}$$

أما $y = \frac{4 + \sqrt{52}}{2}$

أو $y = \frac{4 - \sqrt{52}}{2} \implies S = \left\{\frac{4 + \sqrt{52}}{2}, \frac{4 - \sqrt{52}}{2}\right\}$

[3] $Z^2 + 8Z = -16$

الحل :

$Z^2 + 8Z + 16 = 0 \implies a = 1, \ b = 8 \ , \ c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان (لها جذر حقيقي واحد)

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{-8}{2} = -4$$

مثال // ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة :

$x^2 - (k + 1)x + 4 = 0$

متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $0 =$

$a = 1 \ , \ b = -(k + 1) \ , \ c = 4$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k + 1)]^2 = -4(1)(4) = 0$

$(k + 1)^2 - 16 = 0$

$(k + 1)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 1 = \pm 4$

أما $k + 1 = 4 \implies k = 4 - 1 = 3$

أو $k + 1 = -4 \implies k = -4 - 1 = -5$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k = 3 \implies x^2 - 4x + 4 = 0 \implies (x - 2)^2 = 0$

$x - 2 = 0 \implies x = 2$

$k = -5 \implies x^2 + 4x + 4 = 0 \implies (x + 2)^2 = 0$

$x + 2 = 0 \implies x = -2$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام في R

[1] $x^2 - 4x - 5 = 0$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{4 + 6}{2} = \frac{10}{2} = 5$

أو $x = \frac{4 - 6}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ $\Rightarrow$ $S = \{5, -1\}$

[2] $y^2 + 5y - 1 = 0$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = 5 \ , \ c = -1$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 4}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{29}}{2}$$

أما $y = \frac{-5 + \sqrt{29}}{2}$ أو $y = \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-5 + \sqrt{29}}{2} \ , \frac{-5 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

[4] $4y^2 + 8y = 6$

الحل :

$4y^2 + 8y - 6 = 0\} \div 2 \Rightarrow 2y^2 + 4y - 3 = 0$

$a = 2 \ , \ b = 4, \ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{4}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$$

أما $y = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$ أو $y = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$

$$S = \left\{-1 + \frac{\sqrt{10}}{2} \ , -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$$

[5] $4x^2 - 12x + 9 = 0$

الحل :

$a = 4 \ , \ b = -12 \ , \ c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(4)(9)}}{2(4)}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{8} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

$$S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$$

[3] $3x^2 - 9x = -2$

الحل :

$3x^2 - 9x + 2 = 0 \Rightarrow a = 3 \ , \ b = -9 \ , \ c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6} = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$$

أما $x = \frac{9 + \sqrt{57}}{6}$ أو $x = \frac{9 - \sqrt{57}}{6}$

$$S = \left\{\frac{9 + \sqrt{57}}{6} \ , \frac{9 - \sqrt{57}}{6}\right\}$$

[6] $2y^2 - 3 = -5y$

الحل :

$2y^2 + 5y - 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \ , \ b = 5, \ c = -3$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-5 \pm 7}{4}$$

أما $y = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

أو $y = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow S = \left\{\frac{1}{2}, -3\right\}$

حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[7] $2x^2 + 3x = 5$

الحل :

$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow a = 2 \ , \ b = 3 \ , \ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (3)^2 - 4(2)(-5) = 9 + 40 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2(2)} = \frac{-3 \pm 7}{4}$$

أما $x = \frac{-3 + 7}{4} = \frac{4}{4} = 1$

أو $x = \frac{-3 - 7}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2} \Rightarrow S = \left\{1 \ , -\frac{5}{2}\right\}$

[8] $3x^2 - 7x + 6 = 0$

الحل :

$a = 3 \ , \ b = -7 \ , \ c = 6$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(3)(6) = 49 - 72 = -23$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

[9] $y^2 - 2y + 1 = 0$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -2, \ c = 1$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(1) = 4 - 4 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{2}{2} = 1$$

[10] $y^2 + 12 = -9y$

الحل :

$y^2 + 9y + 12 = 0 \Rightarrow a = 1 \ , \ b = 9 \ , \ c = 12$

$\Delta = b^2 - 4ac =$

$\Delta = (9)^2 - 4(1)(12) = 81 - 48 = 33$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2(1)} = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{2}$$

أما $y = \frac{-9 + \sqrt{33}}{2}$ أو $y = \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}$

$$S = \left\{\frac{-9 + \sqrt{33}}{2}, \frac{-9 - \sqrt{33}}{2}\right\}$$

[11] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+2)x+36=0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$a=1\ ,\ b=-(k+2)\ ,\ c=36$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+2)]^2=-4(1)(36)=0$

$(k+2)^2-144=0$

$(k+2)^2=144$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+2=\pm12$

أما $k+2=12 \Rightarrow k=12-2=10$

أو $k+2=-12 \Rightarrow k=-12-2=-14$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=12 \Rightarrow x^2-(k+2)x+36=0$

$x^2-12x+36=0 \Rightarrow (x-6)^2=0$

$x-6=0 \Rightarrow x=6$

$k=-14 \Rightarrow x^2-(k+2)x+36=0$

$x^2+12x+36=0 \Rightarrow (x+6)^2=0$

$x+6=0 \Rightarrow x=-6$

[12] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2+25=(k-5)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$4y^2-(k-5)y+25=0$

$a=4\ ,\ b=-(k-5)\ ,\ c=25$

$b^2-4ac=0$

$[-(k-5)]^2=-4(4)(25)=0$

$(k-5)^2-400=0$

$(k-5)^2=400$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k-5=\pm20$

أما $k-5=20 \Rightarrow k=20+5=25$

أو $k-5=-20 \Rightarrow k=-20+5=-15$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=25 \Rightarrow y^2-(k-5)y+25=0$

$y^2-20y+25=0 \Rightarrow (y-5)^2=0$

$y-5=0 \Rightarrow y=5$

[13] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $Z^2+16=(k+4)Z$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$Z^2-(k+4)Z+16=0$

$a=1\ ,\ b=-(k+4)\ ,\ c=16$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+4)]^2=-4(1)(16)=0$

$(k+4)^2-64=0$

$(k+4)^2=64$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+4=\pm8$

أما $k+4=8 \Rightarrow k=8-4=4$

أو $k+4=-8 \Rightarrow k=-8-4=-12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=4 \Rightarrow Z^2-(k+4)Z+16=0$

$Z^2-8Z+16=0 \Rightarrow (Z-4)^2=0$

$Z-4=0 \Rightarrow Z=4$

$k=-12 \Rightarrow Z^2-(k+4)Z+16=0$

$Z^2+8y+16=0 \Rightarrow (Z+4)^2=0$

$Z+4=0 \Rightarrow Z=-4$

[16] بين أن المعادلة $Z^2-6Z+28=0$ ليس لها حل في R

الحل :

$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=28$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-6)^2-4(1)(28)=36-112=-76$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

$k=-15 \Rightarrow y^2-(k-5)y+25=0$

$y^2+20y+25=0 \Rightarrow (y+5)^2=0$

$y+5=0 \Rightarrow y=-5$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة حل المعادلات التالية باستعمال القانون في R

[15] $x^2-7x-14=0$

الحل :

$a=1,\ b=-7,\ c=-14$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\dfrac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(-14)}}{2(1)}$

$=\dfrac{7\pm\sqrt{49+56}}{2}=\dfrac{7\pm\sqrt{105}}{2}$

أما $x=\dfrac{7+\sqrt{105}}{2}$ أو $x=\dfrac{7-\sqrt{105}}{2}$

$S=\left\{\dfrac{7+\sqrt{105}}{2},\dfrac{7-\sqrt{105}}{2}\right\}$

[16] $y^2+3y-9=0$

الحل :

$a=1,\ b=3,\ c=-9$

$y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4(1)(-9)}}{2(1)}$

$=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$

أما $y=\dfrac{-3+\sqrt{45}}{2}$ أو $y=\dfrac{-3-\sqrt{45}}{2}$

$S=\left\{\dfrac{-3+\sqrt{45}}{2},\dfrac{-3-\sqrt{45}}{2}\right\}$

$x=\dfrac{8\pm2\sqrt{6}}{10}=\dfrac{2(4\pm\sqrt{6})}{10}=\dfrac{4\pm\sqrt{6}}{5}$

أما $x=\dfrac{4+\sqrt{6}}{5}$ أو $x=\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}$

$S=\left\{\dfrac{4+\sqrt{6}}{5},\dfrac{4-\sqrt{6}}{5}\right\}$

[17] $9x^2-8(3x+2)=0$

الحل :

$9x^2-24x-16=0$

$a=9,\ b=-24,\ c=-16$

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x=\dfrac{24\pm\sqrt{576+576}}{18}=\dfrac{24\pm\sqrt{1152}}{18}$

$=\dfrac{24\pm24\sqrt{2}}{18}=\dfrac{4\pm4\sqrt{2}}{3}$

أما $x=\dfrac{4+4\sqrt{2}}{3}$ أو $x=\dfrac{4-4\sqrt{2}}{3}$

$S=\left\{\dfrac{4+4\sqrt{2}}{3},\dfrac{4-4\sqrt{2}}{3}\right\}$

[18] $2y^2-2=-10y$

الحل :

$2y^2+10y-2=0 \Rightarrow a=2,\ b=10,\ c=-2$

$y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$y=\dfrac{-10\pm\sqrt{(10)^2-4(2)(-2)}}{2(2)}$

$=\dfrac{-10\pm\sqrt{100+16}}{4}=\dfrac{-10\pm\sqrt{116}}{4}$

$y=\dfrac{-10\pm2\sqrt{29}}{4}=\dfrac{2(-5\pm\sqrt{29})}{4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{29}}{2}$

أما $y=\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2}$ أو $y=\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}$

$S=\left\{\dfrac{-5+\sqrt{29}}{2},\dfrac{-5-\sqrt{29}}{2}\right\}$

حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[19] $x^2 + 4x = 5$

الحل :

$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow a = 1\ ,\ b = 4\ ,\ c = -5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (4)^2 - 4(1)(-5) = 16 + 20 = 36$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2(1)} = \frac{-4 \pm 6}{2}$$

أما $x = \frac{-4 + 6}{2} = \frac{2}{2} = 1$

أو $x = \frac{-4 - 6}{2} = \frac{-10}{2} = -5 \Rightarrow S = \{1, -5\}$

[20] $y^2 - 2y - 10 = 0$

الحل :

$a = 1\ ,\ b = -2\ ,\ c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-10) = 4 + 40 = 44$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{44}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{44}}{2}$$

$$y = \frac{2 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 1 \pm \sqrt{11}$$

أما $y = 1 + \sqrt{11}$ أو $y = 1 - \sqrt{11}$

$S = \{1 + \sqrt{11}\ , 1 - \sqrt{11}\}$

[21] $2x^2 - 5x + 7 = 0$

الحل :

$a = 2\ ,\ b = -5\ ,\ c = 7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(7) = 25 - 56 = -31$

مقدار المميز سالب ليس لها حل في R ونوع الجذران غير حقيقيين

[22] $y^2 - 14y + 49 = 0$

الحل :

$a = 1\ ,\ b = -14\ ,\ c = 49$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(49) = 196 - 196 = 0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان (لهل جذر حقيقي واحد)

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-14) \pm \sqrt{0}}{2(1)} = \frac{14}{2}$$

$$= 7$$

[23] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+6)x+49=0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$a=1 \quad , \quad b=-(k+6) \quad , \quad c=49$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+6)]^2-4(1)(49)=0$

$(k+6)^2-196=0$

$(k+6)^2=196$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+6=\pm 14$

أما $k+6=14 \Rightarrow k=14-6=8$

أو $k+6=-14 \Rightarrow k=-14-6=-20$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=8 \Rightarrow x^2-(k+6)x+49=0$

$x^2-14x+49=0 \Rightarrow (x-7)^2=0$

$x-7=0 \Rightarrow x=7$

$k=-20 \Rightarrow x^2-(k+6)x+49=0$

$x^2+14x+49=0 \Rightarrow (x+7)^2=0$

$x+7=0 \Rightarrow x=-7$

[26] بين أن المعادلة $2Z^2-3Z+10=0$ ليس لها حل في R

الحل :

$a=2 \quad , \quad b=-3 \quad , \quad c=10$

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4(2)(10)$

$=9-80=-71$

مقدار المميز سالب لذا المعادلة ليس لها حل في R

الطريقة الثانية :

$p^2-30p+225=0 \Rightarrow (p-15)^2=0$

$p-15=0 \Rightarrow p=15$

[24] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2+36=(k-6)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$4y^2-(k-6)y+36=0$

$a=4 \quad , \quad b=-(k-6) \quad , \quad c=36$

$b^2-4ac=0$

$[-(k-6)]^2-4(4)(36)=0$

$(k-6)^2-576=0$

$(k-6)^2=576$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k-6=\pm 24$

أما $k-6=24 \Rightarrow k=24+6=30$

أو $k-6=-24 \Rightarrow k=-24+6=-18$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=30 \Rightarrow 4y^2-(k-6)y+36=0$

$4y^2-24y+36=0 \Rightarrow (2y-6)^2=0$

$2y-6=0 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow y=\frac{6}{2}=3$

$k=-18 \Rightarrow 4y^2-(k-6)y+36=0$

$4y^2+24y+36=0 \Rightarrow (2y+6)^2=0$

$2y+6=0 \Rightarrow 2y=-6 \Rightarrow y=-\frac{6}{2}=-3$

[25] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $Z^2+81=(k+9)Z$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$Z^2-(k+9)Z+81=0$

$a=1 \quad , \quad b=-(k+9) \quad , \quad c=81$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+9)]^2-4(1)(81)=0$

$(k+9)^2-324=0$

$(k+9)^2=324$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+9=\pm 18$

أما $k+9=18 \Rightarrow k=18-9=9$

أو $k+9=-18 \Rightarrow k=-18-9=-27$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

$k=9 \Rightarrow Z^2-(k+9)Z+81=0$

$$Z^2 - 18 + 81 = 0 \Rightarrow (Z-9)^2 = 0$$
$$Z - 9 = 0 \Rightarrow Z = 9$$
$$k = -27 \Rightarrow Z^2 - (k+9)Z + 81 = 0$$
$$Z^2 + 18Z + 81 = 0 \Rightarrow (Z+9)^2 = 0$$
$$Z + 9 = 0 \Rightarrow Z = -9$$

تدرب وحل مسائل حياتية

[27] العاب نارية : في احدى المناسبات اطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع $140m$.

احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة التالية : $5t^2 + 60t = 140$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار الذي وصلت اليه الألعاب النارية بعد t ثانية.

الحل : الطريقة الاولى

$$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$$
$$t^2 + 12t - 28 = 0$$
$$a = 1 \ , b = 12 \ , \quad c = -28$$
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(1)(28)}}{2(1)}$$
$$= \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 112}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{256}}{2}$$
$$t = \frac{-12 \pm 16}{2}$$

أما $t = \frac{-12 + 16}{2} = \frac{4}{2} = 2$

أو $t = \frac{-12 - 16}{2} = \frac{-28}{2} = -14$ يهمل

الطريقة الثانية :

$$5t^2 + 60t - 140 = 0 \quad \} \div 5$$
$$t^2 + 12t - 28 = 0 \Rightarrow (t+14)(t-2) = 0$$

أما $t + 14 = 0 \Rightarrow t = -14$ يهمل

أو $t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$ الزمن

[28] تجارة : يحسب سامر سعر الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 الف

دينار اذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثل مبلغ ربح سامر في البدلة الواحدة بألوف الدنانير

فما سعر كلفة البدلة الواحدة ؟

الحل : الطريقة الاولى

$$a = 1 \ , \quad b = -30 \ , \quad c = 225$$
$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4(1)(225)}}{2(1)}$$
$$= \frac{30 \pm \sqrt{900 - 900}}{2} = \frac{30}{2} = 15$$

فـــكر

[29] تحد : حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R
اذا كان :

i) $x^2 + 8x = 10$

الحل :

$x^2 + 8x - 10 = 0 \Rightarrow a = 1 , b = 8 , c = -10$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(-10) = 64 + 40 = 104$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-8 \pm \sqrt{104}}{2(1)}$$

$$= \frac{-8 \pm 2\sqrt{26}}{2}$$

$$= \frac{2(-4 \pm \sqrt{26})}{2} = -4 \pm \sqrt{26}$$

أما $x = -4 + \sqrt{26}$ أو $x = -4 - \sqrt{26}$

$S = \{-4 + \sqrt{26} , -4 - \sqrt{26}\}$

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

الحل :

$3y^2 - 6y - 42 = 0 \} \div 3 \Rightarrow y^2 - 2y - 14 = 0$

$a = 1 , \quad b = -2 , \quad c = -14$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-14) = 4 + 56 = 60$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{60}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{2}$$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{15})}{2} = 1 \pm \sqrt{15}$$

أما $y = 1 + \sqrt{15}$

$y = 1 - \sqrt{15} \Rightarrow S = \{1 + \sqrt{15} , 1 - \sqrt{15}\}$ أو

[30] أصحح الخطأ : قال سعد أن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ لي لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية . اكتشف خطأ سعد وصححه .

الحل :

$a = 2 , \quad b = -3 , \quad c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-9) = 9 + 72 = 81$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{81}}{2(2)} = \frac{3 \pm 9}{4}$$

أما $x = \frac{3 + 9}{4} = \frac{12}{4} = 3$

أو $x = \frac{3 - 9}{4} = \frac{-6}{4} = -\frac{3}{2} \Rightarrow S = \left\{3, -\frac{3}{2}\right\}$

[31]حس عددي : استعملت مروة المقدار المميز لكتابة جذري المعادلة $Z^2 - 8Z + 16 = 0$ دون تحليلها . فسر كيف استطاعت مروة كتابة جذري المعادلة .

الحل :

$a = 1 , \quad b = -8 , \quad c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (8)^2 - 4(1)(16) = 64 - 64 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ولها جذر حقيقي واحد .

أكتب // نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز دون حلها .

الحل :

$x^2 - 20x + 100 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 1 \ , \quad b = -20 \ , \quad c = 100$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-20)^2 - 4(1)(100) = 400 - 400 = 0$

قيمة المقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران حقيقيان متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

الدرس [3 – 6]	حل المعادلات الكسرية

نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بتخلص من الكسور .ثم حلها بإحدى طرق التحليل السابقة .

مثال // اذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة $2x + 3$ الف دينار وثمن شراع ست تحفيات $x^2 + 3x - 1$ الف دينار فاذا كان ثمن تحفية واحدة الى ثمن ست تحفيات $\frac{1}{3}$ فما ثمن شراء تحفية واحدة ؟

الحل :

$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ست تحفيات}} = \frac{1}{3}$

$\frac{2x+3}{x^2+3x-1} = \frac{1}{3}$ الطرفين في الوسطين

$x^2 + 3x - 1 = 6x + 9$

$x^2 + 3x - 1 - 6x - 9 = 0$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-5) = 0$

أما $x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$ يهمل

أو $x - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 5$

الف $2x + 3 = 2(5) + 3 = 10 + 3 = 13$

ثمن شراء تحفية واحدة هو 13 ألف دينار

مثال // جد مجموعة الحل للمعادلة التالية ثم تحقق من صحة

الحل :

$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$

الحل :

$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3} \ \} \cdot 3x$

$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right)$

$15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 + x - 2 - 2 = 0$

$15x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (5x-2)(3x+1) = 0$

أما $5x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{5}$

أو $3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}\right\}$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

$x = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad 5\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{\frac{2}{5} - 2}{3\left(\frac{2}{5}\right)} = 2 + \frac{\frac{2-10}{5}}{\frac{6}{5}}$

$= 2 + \frac{-8}{6} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{6-4}{3}$

$= \frac{2}{3}$ الايمن

$$x=-\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad 5\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{\frac{-1}{3}-2}{3\left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$=-\frac{5}{3}+\frac{\frac{-1-6}{3}}{-\frac{3}{3}}=-\frac{5}{3}+\frac{-7}{-3}$$

$$=\frac{-5}{3}+\frac{7}{3}=\frac{2}{3}$$ الايمن

مثال // جد مجموعة الحل للمعادلة في R :

$$\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{x^2-9}$$

الحل :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x}{x-3}+\frac{4x}{x+3}=\frac{18}{(x+3)(x-3)} \\ \times (x+3)(x-3)\end{array}\right\}$$

$$x(x+3)+4x(x-3)=18$$

$$x^2+3x+4x^2-12x-18=0$$

$$5x^2-9x-18=0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(5x+6)=0$$

أما $x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$

أو $5x+6=0 \quad \Rightarrow \quad 5x=-6 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{6}{5}$

$$S=\left\{3,-\frac{6}{5}\right\}$$

مثال // جد مجموعة حل المعادلة :

$$\frac{2}{x+2}-\frac{x}{2-x}=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

الحل :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2}{x+2}+\frac{x}{x-2}=\frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)} \\ \times (x+2)(x-2)\end{array}\right\}$$

$$2(x-2)+x(x+2)=x^2+4$$

$$2x-4+x^2+2x=x^2+4$$

$$4x-4+x^2=x^2+4$$

$$4x-4+x^2-x^2-4=0$$

$$4x-8=0 \quad \Rightarrow \quad 4x=8 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{8}{4}=2$$

تأكد من فهمك

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ وتحقق من صحة الحل :

[1] $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{6}{4x^2}$ $\}\cdot 4x^2$

الحل :

$4x+2x^2=6 \Rightarrow 2x^2+4x-6=0$ $\}\div 2$

$x^2+2x-3=0 \Rightarrow (x+3)(x-1)=0$

أما $x-3=0 \Rightarrow x=3$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

$x=1 \Rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{2+1}{2}$

$=\frac{3}{2}$ الطرف الايسر

$\frac{6}{4x^2}=\frac{6}{4(1)^2}=\frac{6}{4}$

$=\frac{3}{2}$ الطرف الايمن

الطرفين في الوسطين

[4] $\frac{y+1}{2y^2}=\frac{3}{4}$

الحل :

$2y^2(3)=4(y+1) \Rightarrow 6y^2=4y+4$

$6y^2-4y-4=0$ $\}\div 2 \Rightarrow 3y^2-2y-2=0$

$a=3\ ,\quad b=-2\ ,\quad c=-2$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(3)(-2)}}{2(3)}$

$=\frac{2\pm\sqrt{4+24}}{6}$

$y=\frac{2\pm\sqrt{28}}{6}=\frac{2\pm 2\sqrt{7}}{6}=\frac{2(1\pm\sqrt{7})}{6}=\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}$

أما $y=\frac{1+\sqrt{7}}{3}$ أو $y=\frac{1-\sqrt{7}}{3}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

$y=\frac{1+\sqrt{7}}{3} \Rightarrow \frac{y+1}{2y^2}=\frac{\frac{1+\sqrt{7}}{3}+1}{2\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)^2}$

$=\frac{\frac{1+\sqrt{7}+3}{3}}{2\left(\frac{1+2\sqrt{7}+7}{9}\right)}=\frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{2\left(\frac{8+2\sqrt{7}}{9}\right)}=\frac{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}{\frac{16+4\sqrt{7}}{9}}$

$=\frac{4+\sqrt{7}}{3}\times\frac{9}{16+4\sqrt{7}}=\frac{4+\sqrt{7}}{1}\times\frac{3}{4(4+\sqrt{7})}=\frac{3}{4}$

[2] $\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$

الحل :

$\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{10y}$ $\}\times 10y$

$10y\left(\frac{y}{2}\right)-10y\left(\frac{7}{5}\right)=10y\left(\frac{3}{10y}\right)$

$5y(y)-2y(7)=3$

$5y^2-14y-3=0 \Rightarrow (y-3)(5y+1)=0$

أما $y-3=0 \Rightarrow y=3$

أو $5y+1=0 \Rightarrow 5y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

$y=3 \Rightarrow$ الايسر $\frac{y}{2}-\frac{7}{5}=\frac{3}{2}-\frac{7}{5}=\frac{15-14}{10}=\frac{1}{10}$

الايمن $\frac{3}{10y}=\frac{3}{10(3)}=\frac{3}{30}=\frac{1}{10}$

[3] $\frac{x+4}{2}=\frac{-3}{2x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2x(x+4)=-3(2) \Rightarrow 2x^2+8x=-6$

$2x^2+8x+6=0$ $\}\div 2 \Rightarrow x^2+4x+3=0$

$(x+3)(x+1)=0$

أما $x+3=0 \Rightarrow x=-3$

أو $x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow S\{-3,-1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x=-3$

الطرف الأيسر $\frac{x+4}{2}=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$

الطرف الأيمن $\frac{-3}{2x}=\frac{-3}{2(-3)}=\frac{-3}{-6}=\frac{1}{2}$

[5] $\frac{9x-14}{x-5}=\frac{x^2}{x-5}$ $\}\cdot(x-5)$

الحل :

$9x-14=x^2 \Rightarrow x^2-9x+14=0$

$(x-7)(x-2)=0$

أما $x-7=0 \Rightarrow x=7$

أو $x-2=0 \Rightarrow x=2$

التحقق : عندما $x=7$

الأيسر $\frac{9x-14}{x-5}=\frac{9(7)-14}{7-5}=\frac{63-14}{2}=\frac{49}{2}$

الطرف لأيمن $\frac{x^2}{x-5}=\frac{(7)^2}{7-5}=\frac{49}{2}$

[6] $\frac{1}{y^2-6}=\frac{2}{y+3}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$2y^2-12=y+3 \Rightarrow 2y^2-12-y-3=0$

$2y^2-y-15=0 \Rightarrow (2y+5)(y-3)=0$

أما $2y+5=0 \Rightarrow 2y=-5 \Rightarrow y=-\frac{5}{2}$

أو $y-3=0 \Rightarrow y=3$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y=3$

الطرف الايسر $\frac{1}{y^2-6}=\frac{1}{(3)^2-6}=\frac{1}{9-6}=\frac{1}{3}$

الطرف الايمن $\frac{2}{y+3}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[7] $\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{y^2-4}$

الحل :

$\frac{y-4}{y+2}-\frac{2}{y-2}=\frac{17}{(y+2)(y-2)}$ $\}\times(y+2)(y-2)$

$(y-2)(y-4)-2(y+2)=17$

$y^2-4y-2y+8-2y-4-17=0$

$y^2-8y-13=0$

$a=1\ ,b=-8\ ,\quad c=-13$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(-13)}}{2(1)}$

$=\frac{8\pm\sqrt{64+52}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{116}}{2}$

$y=\frac{8\pm2\sqrt{29}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{29})}{2}=4\pm\sqrt{29}$

أما $y=4+\sqrt{29}$ أو $y=4-\sqrt{29}$

[8] $\frac{9}{x^2-x-6}-\frac{5}{x-3}=1$

الحل :

$\frac{9}{(x-3)(x+2)}-\frac{5}{x-3}=1$ $\}\times(x-3)(x+2)$

$9-5(x+2)=x^2+2x-3x-6$

$9-5x-10=x^2-x-6$

$-1-5x=x^2-x-6$

$x^2-x-6+1+5x=0 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$(x+5)(x-1)=0$

أما $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{-5,1\}$

[9] $\frac{12}{y^2-16}+\frac{6}{y+4}=2$

الحل :

$\frac{12}{(y+4)(y-4)}+\frac{6}{y+4}=2 \quad \} \times (y+4)(y-4)$

$12+6(y-4)=2(y+4)(y-4)$

$12+6y-24=2(y^2-16)$

$6y-12=2y^2-32$

$2y^2-32-6y+12=0 \Rightarrow 2y^2-6y-20=0$

$(y-5)(2y+4)=0$

أما $y-5=0 \Rightarrow y=5$

أو $2y+4=0 \Rightarrow 2y=-4 \Rightarrow y=-\frac{4}{2}=-2$

$S=\{5,-2\}$

[10] $\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{8+7x+3x^2}{x^2-1}$

الحل :

$\frac{2x}{x+1}+\frac{3x}{x-1}=\frac{8+7x+3x^2}{(x+1)(x-1)} \quad \} \times (x+1)(x-1)$

$2x(x-1)+3x(x+1)=8+7x+3x^2$

$2x^2-2x+3x^2+3x-8-7x-3x^2$

$2x^2-6x-8=0 \Rightarrow (x-4)(2x+2)=0$

أما $x-4=0 \Rightarrow x=4$

أو $2x+2=0 \Rightarrow 2x=-2 \Rightarrow x=-\frac{2}{2}=-1$

$S=\{4,-1\}$

تدرب وحل التمرينات

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[11] $\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{x} \quad \} \cdot (6x^2)$

الحل :

$4+2x^2=6x \Rightarrow 2x^2-6x+4=0 \quad \} \div 2$

$x^2-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0$

أما $x-2=0 \Rightarrow x=2$

أو $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow S=\{2,1\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x=2$

$\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6(2)^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{24}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1+2}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ الطرف الأيسر

$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ الطرف الأيمن

عندما : $x=1$

$\frac{4}{6x^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6(1)^2}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2+1}{3}=\frac{3}{3}=1$ الطرف الأيسر

$\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$ الأيمن

[12] $\frac{3y}{4}-\frac{6}{12y}+\frac{1}{4}=0$

الحل :

$\frac{3y}{4}-\frac{2}{4y}+\frac{1}{4}=0 \quad \} \times 4y$

$3y^2-2+y=0 \Rightarrow 3y^2+y-2=0$

$(y+1)(3y-2)=0$

أما $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

أو $3y-2=0 \Rightarrow 3y=2 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$

$S=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y=-1$

$\frac{3y}{4}-\frac{6}{12y}+\frac{1}{4}=\frac{3(-1)}{4}-\frac{2}{4(-1)}+\frac{1}{4}=\frac{-3}{4}+\frac{2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{0}{4}=0$ الطرف الأيمن

[13] $\frac{9x+22}{x^2}=1$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$x^2=9x+22 \Rightarrow x^2-9x-22=0$

$(x-11)(x+2)=0$

أما $x-11=0 \Rightarrow x=11$

أو $x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow S=\{11,-2\}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x=-2$

$\frac{9x+22}{x^2}=\frac{9(-2)+22}{(-2)^2}=\frac{-18+22}{4}=\frac{4}{4}=1$

الطرف الأيمن

الطرف الأيسر $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{9}{(1+2)^2}=\frac{9}{9}=1$

الطرف الأيمن $\frac{3y}{y+2}=\frac{3(1)}{1+2}=\frac{3}{3}=1$

[14] $\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2}$

الحل :

$\frac{9}{(y+2)^2}=\frac{3y}{y+2} \quad \} \cdot (y+2)^2$

$9=3y(y+2) \Rightarrow 3y^2+6y-9=0 \} \div 3$

$y^2+2y-3=0 \Rightarrow (y+3)(y-1)=0$

أما $y+3=0 \Rightarrow y=-3$

أو $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\{-3,1\}$

التحقق من صحة الحل : عندما : $y=1$

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[15] $\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=1$

الحل :

$\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x-3}=1 \} \cdot (x-4)(x-3)$

$3(x-3)-2(x-4)=(x-4)(x-3)$

$3x-9-2x+8=x^2-3x-4x+12$

$x-1=x^2-7x+12$

$x^2-7x+12-x+1=0$

$x^2-8x+13=0 \Rightarrow a=1, b=-8, c=13$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-8)\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(13)}}{2(1)}$

$=\frac{8\pm\sqrt{64-52}}{2}$

$x=\frac{8\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{8\pm2\sqrt{3}}{2}=\frac{2(4\pm\sqrt{3})}{2}=4\pm\sqrt{3}$

أما $x=4+\sqrt{3}$ أو $x=4-\sqrt{3}$

$S=\{4+\sqrt{3},4-\sqrt{3}\}$

[16] $\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{y^2-25}$

الحل :

$\frac{y-5}{y+5}-\frac{y+5}{y-5}=\frac{4y^2-24}{(y+5)(y-5)} \} \times (y+5)(y-5)$

$(y-5)^2-(y+5)^2=2y^2-24$

$y^2-10y+25-(y^2+10y+25)=4y^2-24$

$4y^2-24-y^2+10y-25+y^2+10y+25=0$

$4y^2+20y-24=0 \} \div 4$

$y^2+5y-6=0 \Rightarrow (y+6)(y-1)=0$

أما $y+6=0 \Rightarrow y=-6$

أو $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\{-6,1\}$

[17] $\frac{6-x}{x^2+x-12}-\frac{2}{x+4}=1$

الحل :

$\frac{6-x}{(x+4)(x-3)}-\frac{2}{x+4}=1 \quad \}\times(x+4)(x-3)$

$6-x-2(x-3)=x^2-3x+4x-12$

$6-x-2x+6=x^2+x-12$

$12-3x=x^2+x-12$

$x^2+x-12-12+3x=0$

$x^2+4x-24=0$

$a=1\ ,b=4\ ,\quad c=-24$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{(4)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}$

$=\frac{-4\pm\sqrt{16+96}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{112}}{2}$

$x=\frac{-4\pm4\sqrt{7}}{2}=-2\pm2\sqrt{7}$

أما $x=-2+\sqrt{7}$ او $x=-2-\sqrt{7}$

[18] $\frac{4+8y}{y^2-9}+\frac{6}{y+3}=3$

الحل :

$\frac{4+8y}{(y+3)(y-3)}+\frac{6}{y+3}=3 \quad \}\times(y+3)(y-3)$

$4+8y+6(y-3)=3(y+3)(y-3)$

$4+8y+6y-18=3(y^2-9)$

$14y-14=3y^2-27$

$3y^2-27+14-14y=0 \Rightarrow 3y^2-14y-13=0$

$a=3\ ,\quad b=-14\ ,\quad c=-13$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-14)\pm\sqrt{(-14)^2-4(3)(-13)}}{2(3)}$

$=\frac{14\pm\sqrt{196+156}}{6}=\frac{14\pm\sqrt{352}}{6}$

$y=\frac{14\pm4\sqrt{22}}{6}=\frac{2(7\pm2\sqrt{22})}{6}=\frac{7\pm2\sqrt{22}}{3}$

أما $y=\frac{7+2\sqrt{22}}{3}$ أو $y=\frac{7-2\sqrt{22}}{3}$

$S=\left\{\frac{7+2\sqrt{22}}{3},\frac{7-2\sqrt{22}}{3}\right\}$

تدرب وحل مسائل

[19] نقل مسافرين : تقطع طائرة الخطوط الجوية العراقية المسافة 350km بين مدينة بغداد واربيل بسرعة معينة ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 10 km/h لتمكنت الطائرة من قطع المسافة بزمن يقل 10 دقائق عن الزمن الأول . جد سرعة أولاً .

الحل : نفرض السرعة الأولى V

السرعة الثانية $V+10$

الزمن = المسافة / السرعة

الزمن الأول $=\frac{350}{V}$ ، الزمن الثاني $=\frac{350}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $=\frac{1}{6}$

$\frac{350}{V}-\frac{350}{V+10}=\frac{1}{6} \quad \}\times6V(V+10)$

نحول الزمن من دقائق الى ساعة $\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$

$2100(V+10)-210V=V(V+10)$

$2100V+21000-2100V=V^2+10V$

$V^2+10V-21000=0$

$(V+150)(V-140)=0$

أما $V+150=0 \Rightarrow V=-150$ يهمل

أو $V-140=0 \Rightarrow V=140\ km/h$ السرعة

[20] رياضة : اذا أراد راكب دراجة قطع مسافة 60km بين مدينتين A, B بسرعة معينة ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لتمكن من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول . جد سرعته أولا .

الحل : نفرض السرعة الأولى V

السرع الثانية $V+10$

الزمن = المسافة / السرعة

الزمن الأول $=\frac{60}{V}$ ، الزمن الثاني $=\frac{60}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $=1$

$\frac{60}{V}-\frac{60}{V+10}=1 \quad \}\times V(V+10)$

$60(V+10)-60V=V(V+10)$

$60V+600-60V=V^2+10V$

$V^2+10V-600=0$

$(V+30)(V-20)=0$

أما $V+30=0 \Rightarrow V=-30$ يهمل

أو $V-20=0 \Rightarrow V=20\ km/h$ سرعته

[21] سباق : شارك نوفل في سباق ثلاثي وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري واستغرق ساعتين لأنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاور على اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة . جد معدل السرعة التقريبية في سباق السباحة .

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s = 1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b = 20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r = 4$	$x+4$	t_r

ملاحظة : أستعمل معادلة الزمن الأجمالي الذي أستغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو :

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

الحل :

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$t_s = \frac{1}{x} \quad , \quad t_b = \frac{20}{5x} = \frac{4}{x} \quad , t_r = \frac{4}{x+4} \quad , T(x) = 2$$

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

$$\frac{1}{x} + \frac{4}{x} + \frac{4}{x+4} = 2 \quad \} \cdot x(x+4)$$

$$x + 4 + 4(x+4) + 4x = 2x(x+4)$$

$$x + 4 + 4x + 16 + 4x = 2x^2 + 8x$$

$$9x + 20 = 2x^2 + 8x$$

$$2x^2 + 8x - 9x - 20 = 0$$

$$2x^2 - x - 20 = 0 \implies a = 2 \, , b = -1 \, , c = -20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-20)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 160}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{161}}{4} \approx \frac{1 \pm 13}{4}$$

أما $x \approx \frac{1+13}{4} \approx \frac{14}{4} \approx \frac{7}{2} \approx 3.5 \approx 4$

أو $x \approx \frac{1-13}{4} \approx \frac{-12}{4} \approx -3$ يهمل

السرعة تقريباً هي : $x \approx 4 \, km/h$

فـــكر

[22] تحد : جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

i) $\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$

الحل :

$$\frac{3}{x+5} - \frac{4}{x-5} = \frac{x^2 - 15x + 14}{(x+5)(x-5)} \quad \}$$

$$\times (x+5)(x-5)$$

$$3(x-5) - 4(x+5) = x^2 - 15x + 14$$

$$3x - 15 - 4x - 20 = x^2 - 15x + 14$$

$$-x - 35 = x^2 - 15x + 14$$

$$x^2 - 15x + 14 + x + 35 = 0$$

$$x^2 - 14x + 49 = 0$$

$$(x-7)^2 = 0 \implies x - 7 = 0 \implies x = 7$$

[23] أصحح الخطأ : استعمل نمير المقدار المميز لبيان جذور المعادلة :

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نمير أن للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان . اكتشف خطأ نمير وصححه .

الحل :

$$\frac{2}{x^2 - x - 7x + 7} = 1$$

$$\frac{2}{x^2 - 8x + 7} = 1 \quad \text{الطرفين في الوسطين}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 2 \implies x^2 - 8x + 7 - 2 = 0$$

$$x^2 - 8x + 5 = 0 \implies a = 1 \, , b = -8 \, , c = 5$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4(1)(5) = 64 - 20 = 44$$

المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيين .

أكتب // مجموعة الحل في R

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2$$

الحل :

$$\frac{1}{x+6}-\frac{5}{x-6}=2 \quad \}\times(x+6)(x-6)$$
$$x-6-5(x+6)=2(x+6)(x-6)$$
$$x-6-5x-30=2(x^2-36)$$
$$-4x-36=2x^2-72$$
$$2x^2-72+4x+36=0$$
$$2x^2+4x-36=0 \quad \}\div 2$$
$$x^2+2x-18=0 \implies a=1\,,b=2\,,c=-18$$
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{(2)^2-4(1)(-18)}}{2(1)}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{4+72}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{76}}{2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{19}}{2}=$$
$$x=-1\mp\sqrt{19}$$

أما $x=-1+\sqrt{19}$ أو $x=-1-\sqrt{19}$

$$S=\{-1+\sqrt{19},-1-\sqrt{19}\}$$

خطة حل المسألة (كتابة المعادلة)

تعلم // تقطع باخرة شحن مسافة 240km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن

الأول . جد سرعة الباخرة أولا .

أفهم : ما المعطيات في السؤال ؟

باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B بسرعة معينة وتطعها بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .

ما المطلوب من المسألة ؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً

خطط : أكتب معادلة تمثل المسألة ثم حلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً

حل :

نفرض سرعة الباخرة الأولى V ، الزمن الأول $=\frac{240}{V}$

سرعة الباخرة الثانية $V+10$ ، الزمن الثاني $=\frac{240}{V+10}$

الزمن الأول – الزمن الثاني $=2$

$$\frac{240}{V}-\frac{240}{V+10}=2 \quad \}\times V(V+10)$$
$$240(V+10)-240V=2V(V+10)$$
$$240V+2400-240V=2V^2+20V$$
$$2V^2+20V-2400=0 \quad \}\div 2$$
$$V^2+10V-1200=0 \implies (V+40)(V-30)=0$$

أما $V+40=0 \implies V=-40$ يهمل

أو $V-30=0 \implies V=30\ km/h$ سرعة الباخرة

تحقق من صحة الحل :

الزمن الأول $\frac{240}{V}=\frac{240}{30}=8h$

الزمن الثاني $\frac{24}{V+10}=\frac{240}{30+10}=\frac{240}{40}=6h$

مسائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة المعادلة)

[1] نافورة : زرعت منطقة مربعة الشكل طول ضلعها $4m$ بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84m^2$. ما طول ضلع الحديقة ؟

الحل : نفرض طول ضلع الحديقة $= x$ ومساحة الحديقة $= x^2$

مساحة المنطقة المزروعة $4 \times 4 = 16$

مساحة الحديقة – مساحة المنطقة المزروعة $= 84$

$x^2 - 16 = 84 \Rightarrow x^2 = 84 + 16$

$x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$ أما $x = -10$ يهمل

أو $x = 10\ m$ طول ضلع الحديقة

التحقق :

$x^2 - 16 = (10)^2 - 16 = 100 - 16 = 84$

[2] أسد بابل : هو تمثال لأسد عثر عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776 وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $15m^2$. فما أبعادها ؟

الحل : نفرض العرض $= x$ والطوال $x + 2$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

$x(x+2) = 15 \Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$

$(x+5)(x-3) = 0$

أما $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ يهمل

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3m$ العرض

$x + 2 = 3 + 2 = 5m$ الطول

التحقق :

$3 \times 5 = 15\ m^2$ المساحة

[3] الأسد : وهو من اقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويلقب الأسد بملك الغابة نسبة الى قوته بين الحيوانات في الغابة اذا كانت المعادلة $x^2 - 30x = 175$ تمثل المساحة التي يبسط الأسد سيطرته عليها بالكيلومترات . ما طول ضلع المنطقة ؟

الحل :

$x^2 - 30x - 175 = 0 \Rightarrow (x-35)(x+5) = 0$

$x - 35 = 0 \Rightarrow x =$

أما $35\ km$ طول ضلع المنطقة

أو $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$ يهمل

التحقق :

$x^2 - 30x = (35)^2 - 30(35)$

$= 1225 - 1050 = 175$

[4] ألعاب نارية : في أحدى المناسبات أطلقت مجموعة من الألعاب النارية عموديا في الهواء وصلت الى ارتفاع 140 . احسب الزمن الذي وصلت به الى هذا الارتفاع اذا كانت المعادلة الآتية : $2t^2 - 30t = 200$ تمثل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار التي تصل اليه الألعاب النارية بعد t ثانية .

الحل :

$2t^2 - 30t - 200 = 0 \ \} \div 2$

$t^2 - 15t - 100 = 0 \Rightarrow (t-20)(t+5) = 0$

أما $t - 20 = 0 \Rightarrow t = 20\ s$

أو $t + 5 = 0 \Rightarrow t = -5$ يهمل

التحقق :

$2t^2 - 30t = 2(20)^2 - 30(20)$

$= 800 - 600 = 200$

مراجعة الفصل

الدرس [3 – 1]	حل نظام معادلتين خطيتين بمتغيرين

مثال // جد مجموعة الحل انظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي : $x+3y=7\ ,\ x-3y=1$

الحل :

$$x+3y=7 \quad ---(1)$$
$$x-3y=1 \quad ---(2) \qquad \text{بالجمع}$$
$$2x=8 \implies x=\frac{8}{2}=4$$

نعوض قيمة $x=4$ في معادلة (1)

$$4+3y=7 \implies 3y=7-4$$
$$3y=3 \implies y=\frac{3}{3}=1$$

مجموعة حل النظام : $\{(4,1)\}$

تدريب // جد مجموعة الحل انظام في R باستعمال الحذف لكل مما يأتي :

$$x+y=2 \quad ---(1)$$
$$x+5y=4 \quad ---(2)$$

الحل :

$$x+y=2 \quad ---(1)$$
$$\mp x \mp 5y=\mp 4 \quad ---(2) \qquad \text{بالطرح}$$
$$-4y=-2 \implies y=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

نعوض قيمة $y=\frac{1}{2}$ في معادلة (1)

$$x+\frac{1}{2}=2 \implies x=2-\frac{1}{2}=\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$S=\left\{\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

الدرس [3 – 2]	حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين

$$25-x^2=0$$

الحل :

$$(5+x)(5-x)=0$$
أما $5+x=0 \implies x=-5$
أو $5-x=0 \implies x=5 \implies S=\{-5,5\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2=\frac{16}{25}$

الحل :

$$y^2=\frac{16}{25} \implies y=\mp\sqrt{\frac{16}{25}} \implies y=\mp\frac{4}{5}$$
$$S=\left\{\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\right\}$$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R باستعمال الفرق بين مربعين :

$$x^2-64=0$$

الحل :

$$(x+8)(x-8)=0$$
أما $x+8=0 \implies x=-8$
أو $x-8=0 \implies x=8 \implies S=\{-8,8\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R باستعمال خاصية الجذر التربيعي : $y^2=49$

الحل :

$$y^2=49 \implies y=\mp\sqrt{49} \implies y=\mp 7$$
$$S=\{7,-7\}$$

الدرس [3 – 3] حل المعادلات التربيعية بالتجربة

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

الحل :

$$(x-5)(x+3) = 0$$

أما $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

أو $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{5, -3\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

الحل :

$$(x-7)(x-3) = 0$$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow S = \{7, 3\}$

مثال 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$$3y^2 - 11y + 10 = 0$$

الحل :

$$(3y-5)(y-2) = 0$$

أما $3y - 5 = 0 \Rightarrow 3y = 5 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$

تدريب 2 // حل المعادلة التالية في R بالتحليل بالتجربة :

$$4y^2 + 16y - 9 = 0$$

الحل :

$$(2y+9)(2y-1) = 0$$

أما $2y + 9 = 0 \Rightarrow 2y = -9 \Rightarrow y = -\frac{9}{2}$

أو $2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

$$S = \left\{\frac{5}{3}, 2\right\}$$

الدرس [3 – 4] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل

مثال 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل :

$$9x^2 - 36x + 36 = 0$$

الحل :

$(3x-6)^2 = 0 \Rightarrow 3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6$

$x = \frac{6}{3} \Rightarrow x = 2$

تدريب 1 // حل المعادلة التالية في R بالمربع الكامل :

$$4x^2 - 28x + 49 = 0$$

الحل :

$(2x+7)^2 \Rightarrow 2x + 7 = 0 \Rightarrow 2x = -7$

$x = -\frac{7}{2}$

مثال 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع :

$$x^2 - 6x = 27$$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 6\right)^2 = (3)^2 = 9$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 6x + 9 = 27 + 9$

$(x-3)^2 = 36$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 3 = \pm 6$

أما $x - 3 = 6 \Rightarrow x = 6 + 3 = 9$

أو $x - 3 = -6 \Rightarrow x = -6 + 3 = -3$

$S = \{9, -3\}$

تدريب 2 // حل المعادلة بطريقة اكمال المربع :

$$x^2 - 12x = 28$$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 12\right)^2 = (6)^2 = 36$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 12x + 36 = 28 + 36$

$(x-6)^2 = 64$ بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 6 = \pm 8$

أما $x - 6 = 8 \Rightarrow x = 8 + 6 = 14$

أو $x - 6 = -8 \Rightarrow x = -8 + 6 = -2$

$S = \{14, -2\}$

الدرس [3 – 5] حل المعادلات بالقانون العام

مثال 1 // جد مجموعة الحل للمعادلة باستعمال القانون العام

$x^2 - 5x - 7 = 0$: في R

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -7$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{53}}{2}$$

أما $x = \frac{5 + \sqrt{53}}{2}$ أو $x = \frac{5 - \sqrt{53}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{53}}{2} , \frac{5 - \sqrt{53}}{2} \right\}$$

تدريب 1 // جد مجموعة حل المعادلة التالية باستعمال القانون العام في R : $x^2 - 3x - 8 = 0$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -8$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-8)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 32}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

أما $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$ أو $x = \frac{3 + \sqrt{41}}{2}$

$$S = \left\{ \frac{3 + \sqrt{41}}{2} , \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \right\}$$

مثال 2 // حدد جذور المعادلة : $3x^2 + 5x - 2 = 0$

الحل :

$a = 3 \ , \ b = 5 \ , \ c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (5)^2 - 4(3)(-2) = 25 + 24 = 49$

مقدار المميز مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان نسبيان .

تدريب 2 // حدد جذور المعادلة : $2x^2 - 7x - 3 = 0$

الحل :

$a = 2 \ , \ b = -7 \ , \ c = -3$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-7)^2 - 4(2)(-3) = 49 + 24 = 73$

مقدار المميز ليس مربع كامل ونوع الجذران غير حقيقين

الدرس [3 – 6] | حل المعادلات الكسرية

مثال // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة الحل

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{12}{x^2-1}$$

الحل :

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{12}{(x+1)(x-1)} \quad \times (x+1)(x-1)$$

$$x(x+1)+3x(x-1)=12$$

$$x^2+x+3x^2-3x-12=0$$

$$4x^2-2x-12=0 \implies (2x-4)(2x+3)=0$$

أما $2x-4=0 \implies 2x=4 \implies x=\frac{4}{2}=2$

أو $2x+3=0 \implies 2x=-3 \implies x=-\frac{3}{2}$

$$S=\left\{2,-\frac{3}{2}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية :

عندما : $x=2$

$$\frac{x}{x-1}+\frac{3x}{x+1}=\frac{2}{2-1}+\frac{3(2)}{2+1}=\frac{2}{1}+\frac{6}{3}$$

الطرف الايسر $=2+2=4$

الطرف الايمن $\frac{12}{x^2-1}=\frac{12}{(2)^2-1}=\frac{12}{3}=4$

الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

تدريب // جد مجموعة الحل للمعادلة في R وتحقق من صحة الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{32}{x^2-16}$$

الحل :

$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{32}{(x+4)(x-4)} \quad \cdot (x+4)(x-4)$$

$$2x(x+4)+x(x-4)=32$$

$$2x^2+8x+x^2-4x-32=0$$

$$3x^2+4x-32=0 \implies (x+4)(3x-8)=0$$

أما $x+4=0 \implies x=-4$

أو $3x-8=0 \implies 3x=8 \implies x=\frac{8}{3}$

$$S=\left\{-4,\frac{8}{3}\right\}$$

التحقق من صحة الحل : نعوض قيم x بالمعادلة الأصلية :

عندما : $x=-4$

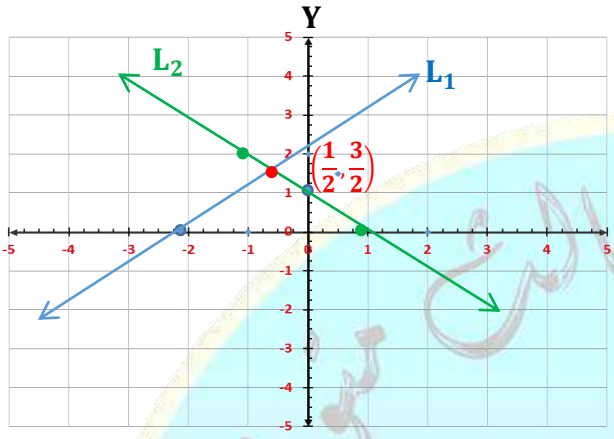
$$\frac{2x}{x-4}+\frac{x}{x+4}=\frac{2(-4)}{-4-4}+\frac{-4}{-4+4}=\frac{-8}{-8}-\frac{4}{0}$$

غير ممكن

اختبار الفصل

جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في R

$[1]\ y = 1 + x \quad ---- (1)$
$y = 2 - x \quad ---- (2)$



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y = 1 + x$ بالرمز L_1

$y = 1 - 0 \Rightarrow y = 1$
$0 = 1 + x \Rightarrow x = -1$

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
−1	0	(−1, 0)

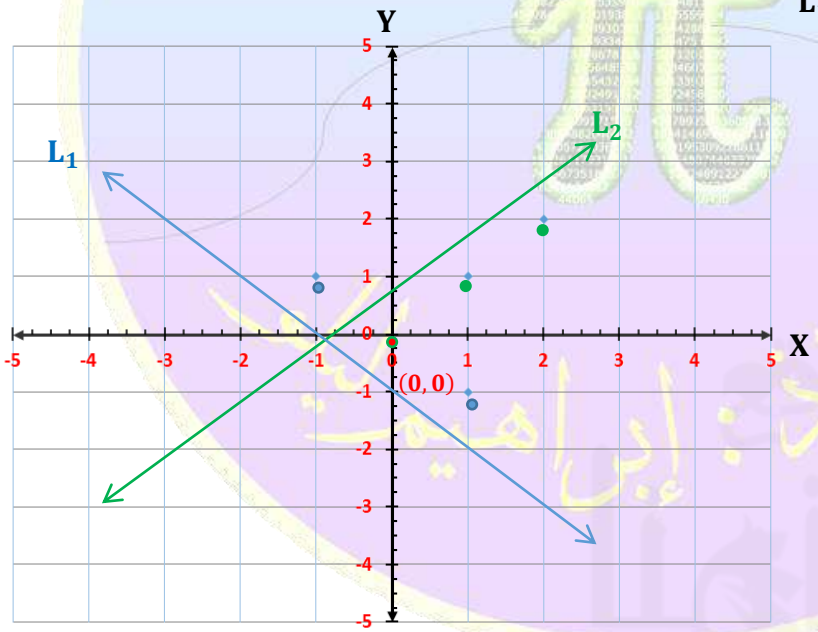
نرمز للمعادلة (2) $y = 2 - x$ بالرمز L_2

$y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$
$0 = 2 - x \Rightarrow x = 2$

x	y	(x, y)
0	2	(0, 2)
2	0	(2, 0)

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)\right\}$

$[2]\ y + x = 0 \quad --- (1)$
$y - x = 0 \quad --- (2)$



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y + x = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
1	−1	(1, −1)
−1	1	(−1, 1)

$y + 1 = 0 \Rightarrow y = -1$
$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$

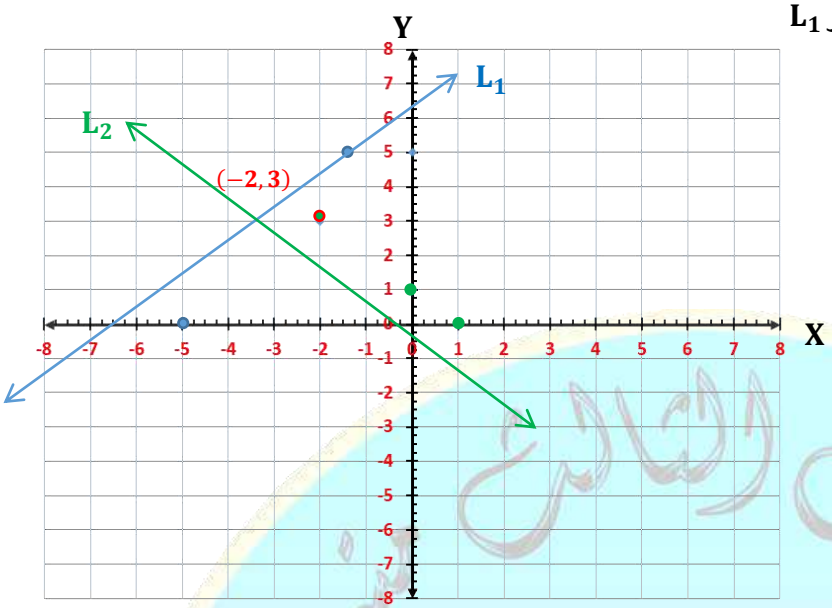
نرمز للمعادلة (2) $y - x = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
1	1	(1, 1)
2	2	(2, 2)

$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$2 - x = 0 \Rightarrow x = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(0, 0)\}$

[3] $y - x - 5 = 0$ ——— (1)
$y + x - 1 = 0$ ——— (2)



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y - x - 5 = 0$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	5	(0, 5)
−5	0	(−5, 0)

$y - 0 - 5 = 0 \Rightarrow y = 5$
$0 - x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

نرمز للمعادلة (2) $y + x - 1 = 0$ بالرمز L_2

x	y	(x, y)
0	1	(0, 1)
1	0	(1, 0)

$y + 0 - 1 = 0 \Rightarrow y = 1$
$0 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

مجموعة حل النظام : $\{(-2,3)\}$

جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي :

[4] $2x + y = 1$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2)

الحل :

$2x + y = 1$ ——— (1)
$x - y = 8$ ——— (2) بالجمع

$3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$

نعوض قيمة $x = 3$ في معادلة (1)

$2(3) + y = 1 \Rightarrow 6 + y = 1 \Rightarrow y = 1 - 6$
$= -5$

مجموعة حل النظام : $\{(3,-5)\}$

[5] $4x - 2y = -4$ ——— (1)
$x + y = 6$ ——— (2) $\} \times 2$

الحل :

$4x - 2y = -4$ ——— (1)
$2x + 2y = 12$ ——— (2) بالجمع

$6x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

نعوض قيمة $x = \frac{4}{3}$ في معادلة (2)

$\frac{4}{3} + y = 6 \Rightarrow y = 6 - \frac{4}{3} = \frac{18-4}{3} = \frac{14}{3}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right)\right\}$

[6] $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ ——— (1) $\} \times 6$
$x + y = 2$ ——— (2) $\} \times 3$

الحل : بضرب معادلة (1) في العدد 6 ومعادلة (2) في العدد 3

$2x + 3y = 6$ ——— (1)
$-3x - 3y = -6$ ——— (2) بالطرح

$-x = 0 \Rightarrow x = 0$

نعوض قيمة $x = 0$ في معادلة (2)

$0 + y = 2 \Rightarrow y = 2$

مجموعة حل النظام : $\{(0,2)\}$

حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين :

[7] $9x^2 - 25 = 0$

الحل :

$(3x + 5)(3x - 5) = 0$

أما $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

أو $3x - 5 = 0 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$S = \{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\}$

[8] $3y^2 - 12 = 0$

الحل :

$3(y^2 - 4) = 0 \} \div 3 \Rightarrow y^2 - 4 = 0$

$(y + 2)(y - 2) = 0$

أما $y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2$

أو $y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$

[9] $(7 - Z)^2 - 1 = 0$

الحل :

$(7 - Z + 1)(7 - Z - 1) = 0$

$(8 - Z)(6 - Z) = 0$

أما $8 - Z = 0 \Rightarrow Z = 8$

أو $6 - Z = 0 \Rightarrow Z = 6 \Rightarrow S = \{8, 6\}$

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[10] $x^2 = 49$

الحل :

$x = \pm\sqrt{49} \Rightarrow x = \pm 7 \Rightarrow S = \{7, -7\}$

[11] $81 - y^2 = 0$

الحل :

$y^2 = 81 \Rightarrow y = \pm\sqrt{81} \Rightarrow y = \pm 9$

$S = \{9, -9\}$

[12] $Z^2 = \frac{36}{9}$

$Z = \pm\sqrt{\frac{36}{9}} \Rightarrow Z = \pm\frac{6}{3} = \pm 2 \Rightarrow S = \{2, -2\}$

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[13] $x^2 + 9x + 18 = 0$

الحل :

$(x + 6)(x + 3) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow S =$

أو$\{-6, -3\}$

[14] $Z^2 - 2Z - 48 = 0$

الحل :

$(Z - 8)(Z + 6) = 0$

أما $Z - 8 = 0 \Rightarrow Z = 8$

أو $Z + 6 = 0 \Rightarrow Z = -6 \Rightarrow S = \{8, -6\}$

[15] $3x^2 - x - 10 = 0$

الحل :

$(x - 2)(3x + 5) = 0$

أما $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

أو $3x + 5 = 0 \Rightarrow 3x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

$S = \{2, -\frac{5}{3}\}$

[16] $7Z^2 - 18Z - 9 = 0$

الحل :

$(Z - 3)(7Z + 3) = 0$

أما $Z - 3 = 0 \Rightarrow Z = 3$

أو $7Z + 3 = 0 \Rightarrow 7Z = -3 \Rightarrow Z = -\frac{3}{7}$

$S = \left\{3, -\frac{3}{7}\right\}$

[17] ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3 ؟

الحل : نفرض العدد x , أربعة أمثاله $4x$

مربع العدد x^2

$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$(x - 3)(x - 1) = 0$

أما $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

أو $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow S = \{3, 1\}$

[18] حوض سباحة يزيد طوله على مثلي عرضه بمقدار 4m ومساحته $48m^2$. ما أبعاد المسبح ؟

الحل : نفرض عرض المسبح x , مثلي عرضه $2x$

طول المسبح $2x + 4$

مساحة المسبح = الطول × العرض

$x(2x + 4) = 48 \Rightarrow 2x^2 + 4x - 48 = 0$

$(x + 6)(2x - 8) = 0$

أما $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6$ يهمل

أو $2x - 8 = 0 \Rightarrow 2x = 8$

$x = \frac{8}{2} = 4m$ العرض

الطول $2x + 4 = 2(4) + 4 = 8 + 4 = 12m$

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[19] $x^2 - 16x + 64 = 0$

الحل :

$(x - 8)^2 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$

[20] $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}Z + \frac{1}{4}Z^2 = 0$

الحل :

$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{1}{2}Z = 0$

$\frac{1}{2}Z = \frac{1}{3} \Rightarrow 3Z = 2 \Rightarrow Z = \frac{2}{3}$

حل المعادلات التالية في R بالمربع الكامل :

[20] $x^2 - 14x = 32$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 14\right)^2 = (7)^2 = 49$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 14x + 49 = 32 + 49$

$(x-7)^2 = 81$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 7 = \pm 9$

أما $x - 7 = 9 \Rightarrow x = 9 + 7 = 16$

أو $x - 7 = -9 \Rightarrow x = -9 + 7 = -2$

$S = \{16, -2\}$

[21] $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل :

$5Z^2 + 6Z = 9 \ \} \div 5 \Rightarrow Z^2 + \frac{6}{5}Z = \frac{9}{5}$

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{6}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + \frac{6}{5}Z + \frac{9}{25} = \frac{9}{5} + \frac{9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{45+9}{25}$

$\left(Z + \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{54}{25}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z + \frac{3}{5} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$

$Z + \frac{3}{5} = \pm\frac{3\sqrt{6}}{5}$

أما $Z + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow Z = \frac{\sqrt{3}-3}{5}$

أو $Z + \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{3}}{5} \Rightarrow Z = \frac{-\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5}$

$Z = \frac{-\sqrt{3}-3}{5} \Rightarrow S = \left\{\frac{\sqrt{3}-3}{5}, \frac{-\sqrt{3}-3}{5}\right\}$

جد مجموعة حلول المعادلات التالية باستعمال القانون العام في R

[24] $x^2 - 3x - 7 = 0$

الحل :

$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -7$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2}$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2}$

أما $x = \frac{3+\sqrt{37}}{2}$ أو $x = \frac{3-\sqrt{37}}{2}$

$S = \left\{\frac{3+\sqrt{37}}{2}, \frac{3-\sqrt{37}}{2}\right\}$

[25] $3y^2 - 12y = -3$

الحل :

$3y^2 - 12y + 3 = 0$

$a = 3 \ , \ b = -12 \ , \ c = 3$

$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)}$

$= \frac{12 \pm \sqrt{144-36}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{108}}{6}$

$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{3}}{6} = \frac{6(2 \pm \sqrt{3})}{6} = 2 \pm \sqrt{3}$

أما $y = 2 + \sqrt{3}$

أو $y = 2 - \sqrt{3} \Rightarrow S = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$

[26] $5Z^2 + 6Z = 9$

الحل :

$5Z^2 + 6Z - 9 = 0 \Rightarrow a = 5 \ , \ b = 6 \ , \ c = -9$

$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4(5)(-9)}}{2(5)}$

$= \frac{6 \pm \sqrt{36+180}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{216}}{10}$

$Z = \frac{6 \pm 6\sqrt{6}}{10} = \frac{2(3 \pm 3\sqrt{6})}{10} = \frac{3 \pm 3\sqrt{6}}{5}$

أما $Z=\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5}$ أو $Z=\dfrac{3-3\sqrt{6}}{5}$

$S=\left\{\dfrac{3+3\sqrt{6}}{5},\dfrac{3-3\sqrt{6}}{5}\right\}$

حدد جذور المعادلة أولا ثم جد مجموعة الحل في R اذا كان ممكنا

[27] $2x^2+8x+8=0$

الحل :

$a=2\ ,\ b=8\ ,\ c=8$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(8)^2-4(2)(8)=64-64=0$

مقدار المميز يساوي صفر ونوع الجذران متساويان ولها جذر حقيقي واحد .

$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-8\pm\sqrt{0}}{2(2)}=\dfrac{-8}{4}=-2$

[28] $y^2-6y-9=0$

الحل :

$a=1\ ,\ b=-6\ ,\ c=-9$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-6)^2-4(1)(-9)=36+36=72$

مقدار المميز موجب وليس مربع كامل ونوع الجذران حقيقيان غير نسبيان .

$y=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-6)\pm\sqrt{72}}{2(1)}$

$=\dfrac{6\pm6\sqrt{2}}{4}$

$y=\dfrac{2(3\pm3\sqrt{2})}{4}=\dfrac{3\pm3\sqrt{2}}{2}$

أما $y=\dfrac{3+3\sqrt{2}}{2}$ أو $y=\dfrac{3-3\sqrt{2}}{2}$

$S=\left\{\dfrac{3+3\sqrt{2}}{2},\dfrac{3-3\sqrt{2}}{2}\right\}$

[29] $4Z^2-3Z+7=0$

الحل :

$a=4\ ,\ b=-3\ ,\ c=7$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-3)^2-4(4)(7)=9-112=-103$

مقدار المميز سالب ونوع الجذران غير حقيقيان وليس لها حل في R

[30] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2-(k+6)x+9=0$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة .

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $=0$

$a=1\ ,\ b=-(k+6)\ ,\ c=9$

$b^2-4ac=0$

$[-(k+6)]^2-4(1)(9)=0$

$(k+6)^2-36=0$

$(k+6)^2=36$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k+6=\pm6$

أما $k+6=6\ \Rightarrow\ k=6-6=0$

أو $k+6=-6\ \Rightarrow\ k=-6-6=-12$

التحقق : نعوض قيم k بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة :

عندما : $k=0$

$x^2-(k+6)x+9=0\ \Rightarrow\ x^2-6x+9=0$

$(x-3)^2=0\Rightarrow x-3=0\ \Rightarrow\ x=3$

عندما : $k=-12$

$x^2-(k+6)x+9=0\ \Rightarrow\ x^2+6x+9=0$

$(x+3)^2=0\ \Rightarrow\ x+3=0\ \Rightarrow\ x=-3$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية في R وتحقق من صحة الحل :

[31] $\frac{6x}{5}=\frac{5}{6x}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$36x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{36} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{36}}$

$x=\pm\frac{5}{6}$

أما $x=\frac{6}{5}$ أو $x=-\frac{6}{5}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم x في المعادلة الأصلية :

عندما : $x=\frac{5}{6}$

الطرف الايسر $\frac{6x}{5}=\frac{6\left(\frac{5}{6}\right)}{5}=\frac{5}{5}=1$

الطرف الايمن $\frac{5}{6x}=\frac{5}{6\left(\frac{5}{6}\right)}=\frac{5}{5}=1$

[33] $\frac{Z+4}{Z^2}=\frac{1}{2}$ الطرفين في الوسطين

الحل :

$Z^2=2Z+8 \Rightarrow Z^2-2Z-8=0$

$(Z-4)(Z+2)=0$

أما $Z-4=0 \Rightarrow Z=4$

أو $Z+2=0 \Rightarrow Z=-2$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم Z في المعادلة الأصلية

$Z=4 \Rightarrow \frac{Z+4}{Z^2}=\frac{4+4}{(4)^2}=\frac{8}{16}$

$=\frac{1}{2}$ الطرف الايمن

[32] $\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y}$

الحل :

$\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{y}\ \}\times 6y^2$

$1+3y^2=6y \Rightarrow 3y^2-6y+1=0$

$a=1\ ,\quad b=-6\ ,\quad c=1$

$y=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(6)^2-4(3)(1)}}{2(3)}$

$=\frac{6\pm\sqrt{36-12}}{6}=\frac{6\pm\sqrt{24}}{6}$

$y=\frac{6\pm 2\sqrt{6}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}$

أما $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$ أو $y=\frac{3-\sqrt{6}}{3}$

تحقق من صحة الحل : نعوض قيم y في المعادلة الأصلية :

عندما : $y=\frac{3+\sqrt{6}}{3}$

$\frac{1}{6y^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right)^2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6\left(\frac{9+6\sqrt{6}+6}{9}\right)}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2\left(\frac{15+6\sqrt{6}}{3}\right)}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2(5+2\sqrt{6})}+\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{10+4\sqrt{6}}\times\frac{10-4\sqrt{6}}{10-4\sqrt{6}}+\frac{1}{2}$

$=\frac{10-4\sqrt{6}}{100-96}+\frac{1}{2}=\frac{10-4\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5-2\sqrt{6}}{2}+\frac{1}{2}$

$=\frac{6-2\sqrt{6}}{2}=3-\sqrt{6}$ الطرف الايسر

$\frac{1}{y}=\frac{1}{\frac{3+\sqrt{6}}{3}}=\frac{3}{3+\sqrt{6}}\times\frac{3-\sqrt{6}}{3-\sqrt{6}}=\frac{3(3-\sqrt{6})}{9-6}$

$=\frac{3(3-\sqrt{6})}{3}=3-\sqrt{6}$ الطرف الايمن

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[42] $\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1$

الحل :

$\frac{4}{x-5}-\frac{3}{x-2}=1 \quad \} \times (x-5)(x-2)$

$4(x-2)-3(x-5)=(x-5)(x-2)$

$4x-8-3x+15=x^2-2x-5x+10$

$x+7=x^2-7x+10$

$x^2-7x+10-x-7=0$

$x^2-8x+3=0 \Rightarrow a=1 \ , \ b=-8 \ , \ c=3$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4(1)(3)}}{2(1)}$

$=\frac{8\pm\sqrt{64-12}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{52}}{2}$

$x=\frac{8\pm2\sqrt{13}}{2}=4\pm\sqrt{13}$

أما $x=4+\sqrt{13}$ أو $x=4-\sqrt{13}$

[43] $\frac{2y}{y+2}+\frac{y}{2-y}=\frac{7}{y^2-4}$

الحل :

$\frac{2y}{y+2}-\frac{y}{y-2}=\frac{7}{(y+2)(y-2)} \quad \} \times (y+2)(y-2)$

$2y(y-2)-y(y+2)=7$

$2y^2-4y-y^2-2y=7$

$y^2-6y-7=0 \Rightarrow (y-7)(y+1)=0$

أما $y-7=0 \Rightarrow y=7$

أو $y+1=0 \Rightarrow y=-1$

تمرينات الفصول

الاختيار من متعدد

الفصل 1 العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

الدرس [1 – 1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

بسط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

[1] $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})=\cdots\cdots$

a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$

c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

الحل :

$(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7})=(\sqrt{2}+\sqrt{7})^2$

$=2+2\sqrt{2}\times\sqrt{7}+7$

$=9+2\sqrt{14}$

الجواب فرع : (c)

[2] $(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right)=\cdots\cdots$

a) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ d) $\frac{-3\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$(\sqrt{18}-\sqrt{8})\left(\sqrt[3]{\frac{-27}{125}}\right)=(3\sqrt{2}-2\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right)$

$=(\sqrt{2})\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{-3\sqrt{2}}{5}$

الجواب فرع : (d)

[3] $\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{2}$ b) $\frac{-2}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$$\frac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \frac{6\times 5\sqrt{2}}{3(-2)} \div \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{7}}{\sqrt{7}}$$

$$= \frac{10\sqrt{2}}{-2} \div 2\sqrt{2} = -5\sqrt{2} \times \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-5}{2}$$

الجواب فرع : (a)

[4] $\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = \cdots\cdots$

a) $5-4\sqrt{6}$ b) $5+4\sqrt{6}$

c) $4-5\sqrt{6}$ d) $4+5\sqrt{6}$

الحل :

$$\sqrt{8}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - 3\sqrt{6} = 2\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3}) - 3\sqrt{6}$$

$$= 2\sqrt{2}\times\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\times\sqrt{3} - 3\sqrt{6}$$

$$= 4 - 2\sqrt{6} - 3\sqrt{6} = 4 - 5\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

[5] $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = \cdots\cdots$

a) $\frac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\frac{-\sqrt{2}}{5}$

الحل :

$$(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = \sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{4}\times 4\sqrt{2}\right)$$

$$= -3\left(\frac{1}{6}\sqrt{2} - \sqrt{2}\right) = 3\times\frac{1}{6}\sqrt{2} + 3\times\sqrt{2} =$$

$$= \frac{-1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \frac{-\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{2}}$$

الجواب فرع : (b)

بسط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية :

[6] $\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \cdots\cdots$

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-1}{\sqrt{5}}$ c) 1 d) -1

$$\frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}\times\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{1(\sqrt{5}+1)-\sqrt{5}(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5})^2-(1)^2}$$

$$= \frac{1\times\sqrt{5}+1\times 1-\sqrt{5}\times\sqrt{5}-\sqrt{5}\times 1}{5-1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}+1-5-\sqrt{5}}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

الجواب فرع : (d)

[7] $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \cdots\cdots$ a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

الحل :

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}-\sqrt{2}\times\sqrt{3}-\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2}$$

$$= \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{6}+3}{2-3} = \frac{5-2\sqrt{6}}{-1} = -5+2\sqrt{6}$$

الجواب فرع : (c)

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[8] $\left(\frac{1}{3}\right)^{2} - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \cdots\cdots$

a) -18.11 b) 18.11
c) 11.18 d) -11.18

الحل :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \frac{1}{9} - \frac{1}{3^2} - \sqrt{(5)^3}$$
$$\approx \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - \sqrt{125} \approx -5\sqrt{5} \approx -5(2.236) \approx -11.18$$

الجواب فرع : (d)

[9] $8^{-\frac{1}{3}} - (-7)^{0} + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx \cdots\cdots$

a) -0.16 b) -0.17 c) 0.16 d) 0.17

الحل :

$$8^{-\frac{1}{3}} - (-7)^{0} + \frac{1}{6} \times 4^{\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{8^{\frac{1}{3}}} - 1 + \frac{1}{6} \times \sqrt{4}$$
$$\approx \frac{1}{\sqrt[3]{8}} - 1 + \frac{1}{6} \times 2 \approx \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3}$$
$$\approx 0.5 - 1 + 0.333 \approx -0.167 \approx -0.17$$

الجواب فرع : (b)

[2] اذا كانت $A = \{1, 2, -2, -3\}$ وكان $g : A \longrightarrow Z$ فأن مدى التطبيق اذا كان $g(x) = 5x - 3$ هو :

a) $\{2, 9, 13, 18\}$ b) $\{2, 7, -13, -18\}$
c) $\{9, 13, 18, 21\}$ d) $\{7, 13, 15, 18\}$

الحل :

$g(x) = 5x - 3$, $A = \{1, 2, -2, -3\}$
$g(1) = 5(1) - 3 = 5 - 3 = 2$
$g(2) = 5(2) - 3 = 10 - 3 = 7$
$g(-2) = 5(-2) - 3 = -10 - 3 = -13$
$g(-3) = 5(-3) - 3 = -15 - 3 = -18$
المدى $= \{2, 7, -13, -18\}$

الجواب فرع : (b)

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقربا لأقرب مرتبتين عشريتين :

[10] $(7.46 \times 10^{-2})^{2} \approx \cdots\cdots$

a) 5.56×10^{-5} b) 5.57×10^{-4}
c) 5.56×10^{-4} d) 5.57×10^{-5}

الحل :

$$(7.46 \times 10^{-2})^{2} = 7.46 \times 10^{-2} \times 7.46 \times 10^{-2}$$
$$= (7.46 \times 7.46) \times 10^{-4} = 55.65 \times 10^{-4}$$
$$= 5.565 \times 10^{-5} \approx 5.57 \times 10^{-5}$$

الجواب فرع : (d)

الدرس [1 – 2] التطبيقات

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

[1] اذا كان التطبيق $f : A \to B$ معرف كالآتي : $x \to x + 1$
حيث $A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 68\}$ فأن مدى التطبيق هو :

a) $\{2, 4, 8\}$ b) $\{4, 6, 8\}$ c) $\{2, 4, 6\}$ d) $\{2, 6, 8\}$

الحل :

$x \longrightarrow x + 1$, $A = \{1, 3, 5\}$
$1 \longrightarrow 1 + 1 = 2$, $2 \longrightarrow 3 + 1 = 4$
$5 \longrightarrow 5 + 1 = 6$

المدى $= \{2, 4, 6\}$

الجواب فرع : (c)

[3] اذا كانت $f : Z \longrightarrow R$ اذ $f(x) = 3x - 2$ فأن العدد 10 هو صورة للعدد :

a) 5 b) 4 c) 2 d) 3

الحل :

$f(4) = 3(4) - 2 = 12 - 2 = 10$

الجواب فرع : (b)

[4]ليكن $f : A \longrightarrow B$ اذ $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{4,6,8\}$
وأن $f = \{(2,4),(3,6),(4,8),(5,8)\}$ فأن f يمثل تطبيقا
شاملا لأن :

a) المدى ≠ المجال المقابل
b) $f(u) = f(s)$
c) المدى هو المجال المقابل A
d) المدى = المجال المقابل

الحل : الجواب فرع : (d)

[5]اذا كانت $f : N \to N$ اذ $f(x) = 2x - 3$ و $g : N \to N$ اذ
$g(x) = x + 1$ فأن التطبيق $(g \circ f)(x)$ هو

a) $2x - 2$
b) $2x - 4$
c) $2x + 2$
d) $2x + 4$

الحل :

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(2x-3) = 2x - 3 + 1$$
$$= 2x - 2$$

الجواب فرع : (a)

[6]ليكن $f : \{2,3,5\} \to N$ اذ $f(x) = 3x - 1$ و $g : N \to N$ اذ $g(x) = x + 1$ فأن مدى $g \circ f$ هو :

a) $R_{g\circ f} = \{5,8,14\}$
b) $R_{g\circ f} = \{5,6.9\}$
c) $R_{g\circ f} = \{6,9,15\}$
d) $R_{g\circ f} = \{6,9,12\}$

الحل :

$$g \circ f(2) = g[f(2)] = g[3(2) - 1] = g(5) = 5 + 1$$
$$= 6$$
$$g \circ f(3) = g[f(3)] = g[3(3) - 1] = g(8) = 8 + 1$$
$$= 9$$
$$g \circ f(5) = g[f(5)] = g[3(5) - 1] = g(14)$$
$$= 14 + 1$$
$$= 15$$

المدى هو $R_{g\circ f} = \{6,9,15\}$

الجواب فرع : (c)

[7]اذا كان التطبيق $f : Q \to Q$ اذ $f(x) = 4x + 1$
والتطبيق $g : Q \to Q$ اذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ جد قيمة x اذا كانت $(f \circ g)(x) = 45$ فأن قيمة x هي :

a) ∓ 5
b) ± 6
c) ± 7
d) ± 8

الحل :

$$(f \circ g)(x) = 45 \implies f[g(x)] = 45$$
$$f\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) = 45$$
$$4\left(\frac{1}{3}x^2 - 1\right) + 1 = 45$$
$$\frac{4}{3}x^2 - 4 + 1 = 45 \implies \frac{4}{3}x^2 - 3 = 45$$
$$\frac{4}{3}x^2 = 45 + 3 \implies \frac{4}{3}x^2 = 48$$
$$4x^2 = 144 \implies x^2 = \frac{144}{4}$$
$$x^2 = 36 \implies x = \pm 6$$

الجواب فرع : (b)

الدرس [1 – 3]	المتتابعات

أختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

[1] $\{u_n\} = 5n - 2$

a) $\{2, 6, 12, 16, 20\}$ b) $\{3, 8, 13, 18, 23$

c) $\{4, 8, 12, 18, 22\}$ d) $\{5, 10, 16, 20,$

الحل :

$u_1 = 5(1) - 2 = 3$, $u_2 = 5(2) - 2 = 8$

$u_3 = 5(3) - 2 = 13$, $u_4 = 5(4) - 2 = 18$

$u_5 = 5(5) - 2 = 23$

المتتابعة هي : $\{3, 8, 13, 18, 23.\}$

الجواب فرع : (b)

[2] $\{u_n\} = \frac{n}{2} + 1$

a) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$ b) $\left\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right\}$

c) $\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$ d) $\left\{2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \right.$

الحل :

$u_1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{2}{2} + 1 = 1 + 1 = 2$

$u_3 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{3+2}{2} = \frac{5}{2}$, $u_4 = \frac{4}{2} + 1 = 2 + 1 = 3$

$u_5 = \frac{5}{2} + 1 = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع : (c)

[3] $\{u_n\} = \frac{-1}{2+n}$

a) $\left\{\frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}\right\}$ b) $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\right\}$

c) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}\right\}$ d) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}\right\}$

الحل :

$u_1 = \frac{-1}{2+1} = \frac{-1}{3}$, $u_2 = \frac{-1}{2+2} = \frac{-1}{4}$

$u_3 = \frac{-1}{2+3} = \frac{-1}{5}$, $u_4 = \frac{-1}{2+4} = \frac{-1}{6}$

$u_5 = \frac{-1}{2+5} = \frac{-1}{7}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{-1}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{5}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{7}\right\}$

الجواب فرع : (b)

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية :

[4] متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3

a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$ b) $\{2, 5, 8, 11, 14\}$

c) $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ d) $\{1, 4, 7, 10, 13\}$

الحل :

$u_2 = 3$, $n = 2$, $d = 3$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_2 = a + (2-1)(3) \Rightarrow 3 = a + (1)(3)$

$3 = a + 3 \Rightarrow a = 3 - 3 = 0$

المتتابعة هي : $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

الجواب فرع : (a)

[5] متتابعة حسابية الحد الثالث فيها (-8) وأساسها 2

a) $\{-14, -12, -10, -8, -6\}$ b) $\{-12, -10, -8, -6, -4\}$

c) $\{-10, -8, -6, -4, -2\}$ d) $\{-8, -6, -4, -2, 0\}$

الحل :

$u_3 = -8$, $n = 3$, $d = 2$, $a = ?$

$u_n = a + (n-1)d$

$u_3 = a + (3-1)(2) \Rightarrow -8 = a + (2)(2)$

$-8 = a + 4 \Rightarrow a = -8 - 4 = -12$

المتتابعة هي : $\{-12, -10, -8, -6, -4\}$

الجواب فرع : (b)

[6] جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2

a) $u_9 = 12 , u_{15} = 20$ b) $u_9 = 14 , u_{15} = 24$
c) $u_9 = 16 , u_{15} = 28$ d) $u_9 = 18, u_{15} = 32$

الحل :

$u_2 = 2 \ , \ n = 2 \ , \ d = 2 \ , \ a = ?$
$u_n = a + (n-1)d$
$u_2 = a + (2-1)(2) \implies 2 = a + (1)(2)$
$2 = a + 2 \implies a = 2 - 2 = 0$
$u_9 = 0 + (9-1)(2) = (8)(2) = 16$
$u_{15} = 0 + (15-1)(2) = (14)(2) = 28$

الجواب فرع : (c)

[9] جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ واساسها 2

a) $\left\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\right\}$ b) $\left\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\right\}$
c) $\left\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\right\}$ d) $\left\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\right\}$

الحل :

$u_n = a + (n-1)d$
$u_2 = \frac{9}{5} \ , \ n = 2 \ , \ a = ? \ , \ d = 2$
$u_2 = a + (2-1)(2)$
$\frac{9}{5} = a + 2$
$a = \frac{9}{5} - 2 = \frac{9-10}{5} = \frac{-1}{5}$
$u_3 = \frac{-1}{5} + (3-1)(2) = \frac{-1}{5} + 4 = \frac{-1+20}{5} = \frac{19}{5}$
$u_4 = \frac{-1}{5} + (4-1)(2) = \frac{-1}{5} + 6 = \frac{-1+30}{5} = \frac{29}{5}$
$u_5 = \frac{-1}{5} + (5-1)(2) = \frac{-1}{5} + 8 = \frac{-1+40}{5} = \frac{39}{5}$

المتتابعة هي : $\left\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\right\}$

الجواب فرع : (d)

الدرس [1 – 4]	المتباينات المركبة

[3] $3Z + 9 < 30$ و $16 < 3Z + 9$

a) $\left\{Z : \frac{3}{7} \le Z < 7\right\}$ b) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z \le 7\right\}$
c) $\left\{Z : \frac{3}{7} < Z < 7\right\}$ d) $\left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$

الحل :

$16 - 9 < 3Z$ و $3Z < 30 - 9$
$7 < 3Z$ و $3Z < 21$
$\frac{7}{3} < \frac{3Z}{3}$ و $\frac{3Z}{3} < \frac{21}{3} \implies \frac{7}{3} < Z$ و $Z < 7$
$S = S_1 \cap S_2 = \left\{Z : \frac{7}{3} < Z\right\} \cap \{Z : Z < 7\}$
$= \left\{Z : \frac{7}{3} < Z < 7\right\}$

الجواب فرع : (d)

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبريا :

[1] $x \le -2$ و $-10 < x$

a) $\{x: -10 \le x\} \cap \{x: x \le -2\}$
b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$
c) $\{x: -10 \le x\} \cup \{x: x \le -2\}$
d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \le -2\}$

الحل :

$S = S_1 \cap S_2 = \{x: -10 < x\} \cap \{x: x \le -2\}$

الجواب فرع : (b)

[2] $y - 3 < 12$ و $0 \le y - 3$

a) $\{y: 3 < y < 15\}$ b) $\{y: -3 \le y \le 15\}$
c) $\{y: 3 \le y < 15\}$ d) $\{y: -3 < y < 15\}$

الحل :

$0 + 3 \le y$ و $y < 12 + 3 \implies 3 \le y$ و $y < 15$
$S = S_1 \cap S_2 = \{y : 3 \le y\} \cap \{y : y < 15\}$
$= \{y : 3 \le y < 15\}$ الجواب : (c)

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبريا

[4] $2t-4>-8$ أو $2t-4\leq -12$

a) $\{t:t>-2\}\cap\{t:t\leq -4\}$

b) $\{t:t>-2\}\cup\{t:t\leq -4\}$

c) $\{t:t<-2\}\cap\{t:t\geq -4\}$

d) $\{t:t<-2\}\cup\{t:t\geq -4\}$

الحل :

$2t>-8+4$ أو $2t\leq -12+4$

$2t>-4$ أو $2t\leq -8$ $\}\div 2$

$t>-2$ أو $t\leq -4$

$S=S_1\cup S_2=\{t:t>-2\}\cup\{t:t\leq -4\}$

الجواب فرع : (a)

[5] $\frac{y+5}{3}<\frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3}>\frac{7}{3}$

a) $\{y:y<4\}\cap\{y:y>2\}$

b) $\{y:y>-4\}\cup\{y:y<2\}$

c) $\{y:y<-4\}\cap\{y:y>-2\}$

d) $\{y:y<-4\}\cup\{y:y>2\}$

الحل :

$\frac{y+5}{3}<\frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3}>\frac{7}{3}$ $\}\times 3$

$y+5<1$ أو $y+5>7$

$y<1-5$ أو $y>7-5$

$y<-4$ أو $y>2$

$S=S_1\cup S_2=\{y:y<-4\}\cup\{y:y>2\}$

الجواب فرع : (d)

اكتب المتباينة المركبة التي تبين مدى طول الضلع الثالث في المثلث اذا كان طولا الضلعين الاخرين للمثلث معلومين:

[6] 5cm , 12cm

a) $7<Z<17$ b) $7\leq Z<17$

c) $7\leq Z\leq 17$ d) $7<Z\leq 17$

الحل :

فرض طول الضلع الثالث Z

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , Z

$5+12>Z \Rightarrow 17>Z$ الضلع الثالث أصغر من 17

$12+Z>5 \Rightarrow Z>5-12 \Rightarrow Z>-7$

$5+Z>12 \Rightarrow Z>12-5 \Rightarrow Z>7$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي :

$7<Z<17$

الجواب فرع : (a)

[7] 8cm , 2cm

a) $6\leq x<10$ b) $6\leq x\leq 10$

c) $6<x<10$ d) $6<x\leq 10$

الحل :

فرض طول الضلع الثالث x

اطوال اضلاع المثلث 5, 12 , x

$8+2>x \Rightarrow 10>x$ الضلع الثالث أصغر من 10

$8+x>2 \Rightarrow x>2-8 \Rightarrow x>-6$

$2+x>8 \Rightarrow x>8-2 \Rightarrow x>6$

المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث هي $6<x<10$

الجواب فرع : (c)

اكتب متباينات التي تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد :

[8]

a) $-4 < x < 3$ b) $-4 \leq x < 3$

c) $-4 \leq x \leq 3$ d) $-4 < x \leq 3$

الدرس [5 – 1] متباينات القيمة المطلقة

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية :

[1] $|y - 8| < 13$

a) $5 < y < -21$ b) $-5 \leq y \leq -21$

c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \leq 21$

الحل :

$-13 < y - 8 < 13 \Rightarrow -13 + 8 < y < 13 + 8$

$-5 < y < 21 \Rightarrow S = \{y : -5 < y < 21\}$

الجواب فرع : (c)

[2] $|3Z| - 7 < 1$

a) $-\frac{8}{3} \leq Z < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < Z \leq \frac{8}{3}$

c) $-\frac{8}{3} \leq Z \leq \frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}$

الحل :

$|3Z| < 1 + 7 \Rightarrow |3Z| < 8 \Rightarrow -8 < 3Z < 8$

$\frac{8}{3} < \frac{3Z}{3} < \frac{8}{3} \Rightarrow -\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}$

$S = \left\{Z : -\frac{8}{3} < Z < \frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع : (d)

الجواب فرع : (a)

[9]

a) $y \leq -3$ أو $y > 5$ b) $y \leq -3$ أو $y \geq 5$

c) $y < -4$ أو $y \geq 5$ d) $y < -3$ أو $y > 5$

الجواب فرع : (c)

[3] $|3 - x| < 3$

a) $-6 < x < 0$ b) $0 < x < 6$

c) $-6 < x < 6$ d) $0 \leq x \leq 6$

الحل :

$-3 < 3 - x < 3 \Rightarrow -3 - 3 < -x < 3 - 3$

$-6 < -x < 0 \quad \} \times (-1) \Rightarrow 0 < x < 6$

الجواب فرع : (b)

[4] $|5t - 5| > 0$

a) $t \leq 1$ أو $t > 1$ b) $t \geq 1$ أو $t < -1$

c) $t > 1$ أو $t < 1$ d) $t > -1$ أو $t < -1$

الحل :

$5t - 5 > 0$ أو $5t - 5 < 0$

$5t > 5$ أو $5t < 5 \} \div 5 \Rightarrow t > 1$ أو $t < 1$

الجواب فرع : (c)

[5] $|v - 3| \geq \frac{1}{2}$

a) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \leq -\frac{5}{2}$ b) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \geq -\frac{5}{2}$

c) $v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{5}{2}$ d) $v \leq \frac{7}{2}$ أو $v \geq -\frac{5}{2}$

الحل :

$v - 3 \geq \frac{1}{2}$ أو $v - 3 \leq \frac{-1}{2}$

$v \geq \frac{1}{2} + 3$ أو $v \leq \frac{-1}{2} + 3$

$v \geq \frac{1+6}{2}$ أو $v \leq \frac{-1+6}{2} \Rightarrow v \geq \frac{7}{2}$ أو $v \leq \frac{5}{2}$

الجواب فرع : (c)

[6] $|6-3y| \geq 9$

a) $y \leq 1$ أو $y \geq -5$
b) $y < -1$ أو $y > 5$
c) $y > -1$ أو $y < -5$
d) $y \leq -1$ أو $y \geq 5$

الحل :

$6-3y \geq 9$ أو $6-3y \leq -9$
$-3y \geq 9-6$ أو $-3y \leq -9-6$
$-3y \geq 3$ أو $-3y \leq -15$ $\} \div (-3)$
$y \leq -1$ أو $y \geq 5$

الجواب فرع : (d)

[7] $\left|\frac{7-2y}{3}\right| \geq 3$

a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$
b) $y < -1$ أو $y \geq 8$
c) $y < -1$ أو $y > 8$
d) $y < -1$ أو $y > 8$

الحل :

$\frac{7-2y}{3} \geq 3$ أو $\frac{7-2y}{3} \leq -3$ $\} \times 3$
$7-2y \geq 9$ أو $7-2y \leq -9$
$-2y \geq 9-7$ أو $-2y \leq -9-7$
$-2y \geq 2$ أو $-2y \leq -16$ $\} \div (-2)$
$y \leq -1$ أو $y \geq 8$

الجواب فرع : (a)

[8] $\left|\frac{Z-1}{7}\right| \leq 2$

a) $-13 < Z \leq 15$
b) $-13 \leq Z < 15$
c) $-13 \leq Z \leq 15$
d) $-13 < Z < 15$

الحل :

$-2 \leq \frac{Z-1}{7} \leq 2$ $\} \times 7$
$-14 \leq Z-1 \leq 14$
$-14+1 \leq Z \leq 14+1$
$-13 \leq Z \leq 15$

الجواب فرع : (c)

الفصل 2 المقادير الجبرية

الدرس [1 – 2] ضرب المقادير الجبرية

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر :

[1] $(x+5)^2$

a) $x^2-10x+25$
b) $x^2+10x+25$
c) $x^2+5x+25$
d) $x^2-5x+25$

الحل :

$(x+5)^2 = x^2+10x+25$

الجواب فرع : (b)

[3] $(x+8)(x-8)$

a) x^2-64
b) x^2+64
c) x^2+16
d) x^2-16

الحل :

$(x+8)(x-8) = x^2-8^2 = x^2-64$

الجواب فرع : (a)

[4] $(3-2Z)(3+2Z)$

a) $6-4Z^2$ b) $9-4Z^2$
c) $6+4Z^2$ d) $9+4Z^2$

الحل:

$$(3-2Z)(3+2Z)=3^2-(2Z)^2=9-4Z^2$$

الجواب فرع : (b)

[5] $(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})$

a) $y^2-\sqrt{12}$ b) y^2-6
c) $y^2+\sqrt{12}$ d) y^2+6

الحل:

$$(y+\sqrt{6})(y-\sqrt{6})=y^2-(\sqrt{6})^2=y^2-6$$

الجواب فرع : (b)

[6] $(2x-3)(x+9)$

a) $2x^2+15x-27$ b) $2x^2-5x-27$
c) $2x^2-15x+27$ d) $2x^2+15x+27$

الحل:

$$(2x-3)(x+9)=2x^2+18x-3x-27$$
$$=2x^2+15x-27$$

الجواب فرع : (a)

[7] $(y-2)(y^2+2y+4)$

a) y^3+8 b) y^3-8
c) y^3-4 d) y^3-16

الحل:

$$(y-2)(y^2+2y+4)=y^3-2^3=y^3-8$$

الجواب فرع : (b)

[8] $\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)$

a) $\frac{1}{27}-x^3$ b) $\frac{1}{27}+x^3$ c) $\frac{1}{9}+x^3$ d) $\frac{1}{9}-x^3$

الحل:

$$\left(\frac{1}{3}-x\right)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}x+x^2\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^3-x^3=\frac{1}{27}-x^3$$

الجواب فرع : (a)

[9] $(Z-2)^3$

a) $Z^3+6Z^2+12Z+8$
b) $Z^3-6Z^2+12Z-8$
c) $Z^3+6Z^2-12Z-8$
d) $Z^3-6Z^2-12Z+8$

الحل:

$$(Z-2)^3=(Z-2)(Z-2)^2$$
$$=(Z-2)(Z^2-4Z+4)$$
$$=Z(Z^2-4Z+4)-2(Z^2-4Z+4)$$
$$=Z^3-4Z^2+4Z-2Z^2+8Z-8$$
$$=Z^3-6Z^2+12Z-8$$

الجواب فرع : (b)

[10] $\left(y+\frac{1}{5}\right)^3$

a) $y^3-\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$
b) $y^3+\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$
c) $y^3+\frac{3}{3}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$
d) $y^3-\frac{3}{3}y^2-\frac{3}{25}y-\frac{1}{125}$

الحل:

$$\left(y+\frac{1}{5}\right)^3=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y+\frac{1}{5}\right)^3$$
$$=\left(y+\frac{1}{5}\right)\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)$$
$$=y\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)+\frac{1}{5}\left(y^2+\frac{2}{5}y+\frac{1}{25}\right)$$
$$=y^3+\frac{2}{5}y^2+\frac{1}{25}y+\frac{1}{5}y^2+\frac{2}{25}y+\frac{1}{125}$$
$$=y^3+\frac{3}{5}y^2+\frac{3}{25}y+\frac{1}{125}$$

الجواب فرع : (c)

الدرس [2 − 2]	تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) :

[1] $12x^3 + 9x^2 - 3x$

a) $3x(4x^2 + 3x + 1)$ b) $3x(4x^2 + 3x - 1)$

c) $9x(4x^2 + 3x + 1)$ d) $9x(4x^2 + 3x - 1)$

الحل :

$$12x^3 + 9x^2 - 3x = 3x(4x^2 + 3x - 1)$$

الجواب فرع : (b)

[2] $6y^2(3y - 4) + 36y$

a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

الحل :

$$6y^2(3y - 4) + 36y = 18y^3 - 24y^2 + 36y$$
$$= 6y(3y^2 - 4y + 6)$$

الجواب فرع : (d)

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر :

[3] $3Z(Z - 3) - 7(Z - 3)$

a) $(Z + 3)(3Z - 7)$ b) $(Z - 3)(3Z + 7)$

c) $(Z - 3)(3Z - 7)$ d) $(Z + 3)(3Z + 7)$

الحل :

$$3Z(Z - 3) - 7(Z - 3) = (Z - 3)(3Z - 7)$$

الجواب فرع : (c)

[5] $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$

a) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ b) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$

c) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$ d) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$

الحل :

$$\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$$
$$= (x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$$

الجواب فرع : (b)

حلل المقدار باستعمال خاصية التوزيع وتحقق من صحة الحل :

[6] $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$ b) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$ d) $(y + 3)(3y^2 - 5)$

الحل :

$$3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$$
$$= (3y^3 - 9y^2) + (5y - 15)$$
$$= 3y^2(y - 3) + 5(y - 3)$$
$$= (y - 3)(3y^2 + 5)$$

التحقق من صحة الحل :

$$(y - 3)(3y^2 + 5) = y(3y^2 + 5) - 3(3y^2 + 5)$$
$$= 3y^3 + 5y - 9y^2 - 15$$
$$= 3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$$

الجواب فرع : (c)

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس :

[7] $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$

a) $(5y+1)(4y^2-3)$ b) $(5y-1)(4y^2+3)$

c) $(5y-1)(4y^2-3)$ d) $(5y+1)(4y^2+3)$

الحل :

$$20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$$
$$= (20y^3 - 4y^2) + (3 - 15y)$$
$$= 4y^2(5y-1) + 3(1-5y)$$
$$= 4y^2(5y-1) + 3(-1)(5y-1)$$
$$= 4y^2(5y-1) - 3(5y-1)$$
$$= (5y-1)(4y^2-3)$$

الجواب فرع : (c)

[8] $\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$

a) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$ b) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$

c) $(x+2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$ d) $(x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 + 2\right)$

الحل :

$$\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 4 - 2x$$
$$= \left(\frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{3}x^3\right) + (4 - 2x)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) + 2(2-x)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) + 2(-1)(x-2)$$
$$= \frac{1}{6}x^3(x-2) - 2(x-2)$$
$$= (x-2)\left(\frac{1}{6}x^3 - 2\right)$$

الجواب فرع : (a)

الدرس [2 – 3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية :

[1] $9 - 4x^2$

a) $(3+2x)(3+2x)$ b) $(3+2x)(3-2x)$

c) $(9-x)(9+4x)$ d) $(3+x)(3-4x)$

الحل :

$$9 - 4x^2 = (3+2x)(3-2x)$$

الجواب فرع : (b)

[2] $12y^3Z - 3yz^3$

a) $3y(2y-Z)(y+2Z)$ b) $3Z(2y-Z)(2y+Z)$

c) $3yZ(2y-Z)(2y+Z)$ d) $3yZ(y-2Z)(y+2Z)$

الحل :

$$12y^3Z - 3yz^3 = 3yZ(4y^2 - Z^2)$$
$$= 3yZ(2y-Z)(2y+Z)$$

الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x$

a) $\frac{x}{6}\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ b) $\frac{x}{6}\left(x+\frac{1}{4}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$

c) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$ d) $\frac{x}{3}\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\right)$

الحل :

$$\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x = \frac{1}{6}x\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{6}x\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

الجواب فرع : (a)

[4] $4x^2 + 24x + 36$

a) $(x+6)^2$ b) $(x-6)^2$

c) $4(x-3)^2$ d) $4(x+3)^2$

الحل :

$4x^2 + 24x + 36 = 4(x^2 + 6x + 9) = 4(x+3)^2$

الجواب فرع : (d)

[5] $16 - 8y + y^2$

a) $(4+2y)^2$ b) $(4-2y)^2$

c) $(4-y)^2$ d) $(4+y)^2$

الحل :

$16 - 8y + y^2 = (4-y)^2$

الجواب فرع : (c)

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعا كاملا :

[6] $4x^2 - 20x + 25$

a) $2(x)(5) = 10x$ مربع كامل لأن

b) $-2(2x)(5) = -20x$ مربع كامل لأن

c) $-4(x)(5) \neq 10x$ مربع كامل لأن

d) $-2(2x)(5) \neq 20x$ ليس مربع كامل لأن

الحل :

$bx = -2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = -2\sqrt{(4x^2)(25)} = -2(2x)(5)$

$= -20x$ مربع كامل

الجواب فرع : (b)

[7] $64 - 48y + 9y^2$

a) $2(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

b) $2(8)(4y) = 48y$ مربع كامل لأن

c) $-2(8)(3y) = -48y$ مربع كامل لأن

d) $-4(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربع كامل لأن

الحل :

$bx = -2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$by = -2\sqrt{(9y^2)(64)} = -2(3y)(8)$

$= -48y$ مربع كامل لأن

الجواب فرع : (c)

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري : $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعا كاملا :

[8] $Z^2 + \cdots\cdots + 49$

a) $14Z$ b) $-14Z$ c) $7Z$ d) $-7Z$

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bZ = 2\sqrt{(Z^2)(49)} = 2(Z)(7) = 14Z$

الجواب فرع : (a)

[9] $16y^2 + 40y + \cdots\cdots$

a) 9 b) 25 c) -9 d) -25

الحل :

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$40y = 2\sqrt{(16y^2)(c)}$ بتربيع الطرفين

$1600y^2 = 4(16y^2)(c)$

$1600y^2 = 64y^2(c)$

$c = \frac{1600y^2}{64y^2} = 25$

الجواب فرع : (b)

الدرس [2 – 4]	تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $x^2 + 7x + 12$

a) $(x-3)(x+4)$ b) $(x+3)(x+4)$

c) $(x-1)(x+7)$ d) $(x-3)(x-4)$

الحل :

$x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$

الجواب فرع : (b)

[2] $x^2 - 5x - 36$

a) $(x-6)(x+6)$ b) $(x+12)(x-3)$

c) $(x-9)(x+4)$ d) $(x+9)(x-4)$

الحل :

$x^2 - 5x - 36 = (x-9)(x+4)$

الجواب فرع : (c)

[3] $y^2 + 4y - 21$

a) $(y-7)(y+3)$ b) $(y+7)(y-3)$

c) $(y-7)(y-3)$ d) $(y+7)(y+3)$

الحل :

$y^2 + 4y - 21 = (y+7)(y-3)$

الجواب فرع : (b)

[4] $4x^2 + 10x + 6$

a) $(x-6)(4x+1)$ b) $(4x+2)(x-3)$

c) $(4x-6)(x-1)$ d) $(2x+3)(2x+2)$

الحل :

$4x^2 + 10x + 6 = (2x+3)(2x+2)$

الجواب فرع : (d)

[5] $24y^2 - 2y - 1$

a) $(4y-1)(6y+1)$ b) $(2y-1)(12y-1)$

c) $(4y+1)(6y-1)$ d) $(3y-1)(8y+1)$

الحل :

$24y^2 - 2y - 1 = (4y-1)(6y+1)$

الجواب فرع : (a)

[6] $10x^2 - 11x + 1$

a) $(5x-1)(2x+1)$ b) $(10x+1)(x-1)$

c) $(5x+1)(2x-1)$ d) $(10x-1)(x-1)$

الحل :

$10x^2 - 11x + 1 = (10x-1)(x-1)$

الجواب فرع : (d)

[9] $22 + 3Z - 4Z^2$

a) $(11+4Z)(2-Z)$ b) $(22-4Z)(1+Z)$

c) $(11-4Z)(2+Z)$ d) $(22+8Z)(1-Z)$

الحل :

$22 + 3Z - 4Z^2 = (11-4Z)(2+Z)$

الجواب فرع : (c)

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً :

[8] $x^2+15x+26=(x\cdots 2)(x\cdots 13)$

a) $(x-2)(x-13)$ b) $(x-2)(x+13)$

c) $(x+2)(x+13)$ d) $(x+2)(x-13)$

الجواب فرع : (c)

[9] $4y^2-2y-12=(2y\cdots 3)(2y\cdots 4)$

a) $(2y-3)(2y+4)$ b) $(2y+3)(2y+4)$

c) $(2y-3)(2y-4)$ d) $(2y+3)(2y-4)$

الجواب فرع : (d)

[10] $48-30Z+3Z^2=(6\cdots 3Z)(8\cdots Z)$

a) $(6-3Z)(8-Z)$ b) $(6+3Z)(8+Z)$

c) $(6-3Z)(8+Z)$ d) $(6+3Z)(8-Z)$

الجواب فرع : (a)

الدرس [2 – 5]	تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية الى ابسط صورة :

[1] $8+x^3$

a) $(2-x)(4+2x+x^2)$ b) $(2+x)(4-2x+x^2)$

c) $(2-x)(4-2x+x^2)$ d) $(2+x)(4+2x+x^2)$

الجواب فرع : (b)

[2] $8y^3+27$

a) $(2y+3)(4y^2+6y+9)$

b) $(2y-3)(4y^2+6y+9)$

c) $(2y+3)(4y^2-6y+9)$

d) $(2y-3)(4y^2-6y+9)$

الجواب فرع : (c)

[3] $\frac{1}{Z^3}+\frac{1}{64}$

a) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

b) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

c) $\left(\frac{1}{Z}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}+\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

d) $\left(\frac{1}{Z}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{Z^2}-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{16}\right)$

الجواب فرع : (d)

[4] $\frac{27}{125}+\frac{8}{x^3}$

a) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}+\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

b) $\left(\frac{3}{5}-\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

c) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}+\frac{4}{x^2}\right)$

a) $\left(\frac{3}{5}+\frac{2}{x}\right)\left(\frac{9}{25}-\frac{6}{5x}-\frac{4}{x^2}\right)$

الجواب فرع : (c)

[5] $0.027+Z^3$

a) $(0.03+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

b) $(0.03+Z)(0.009-0.03Z+Z^2)$

c) $(0.3+Z)(0.9-0.3Z+Z^2)$

d) $(0.3+Z)(0.09-0.3Z+Z^2)$

الجواب فرع : (c)

[6] $\frac{8}{y^3}-\frac{1}{27}$

a) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

b) $\left(\frac{2}{y}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}-\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

c) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}+\frac{1}{9}\right)$

d) $\left(\frac{2}{y}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{y^2}+\frac{2}{3y}-\frac{1}{9}\right)$

الجواب فرع : (c)

[5] $\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2}$ a) $1-Z$ b) $1+Z$ c) $1+Z+Z^2$ d) $1-Z+Z^2$

الحل :

$$\frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \div \frac{(1-Z)^2}{1-Z^2} = \frac{1-Z^3}{1+Z+Z^2} \times \frac{1-Z^2}{(1-Z)^2} == \frac{(1-Z)(1+Z+Z^2)}{1+Z+Z^2} \times \frac{(1+Z)(1-Z)}{(1-Z)^2} = 1+Z$$

الجواب فرع : (b)

[7] $9-\frac{1}{3}Z^3$

a) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z-Z^2)$

b) $\frac{1}{3}(3-Z)(9+3Z+Z^2)$

c) $\frac{1}{3}(3+Z)(9+3Z+Z^2)$

d) $\frac{1}{3}(3-Z)(9-3Z+Z^2)$

الجواب فرع : (b)

[8] $0.008x^3-1$

a) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.002x+1)$

b) $(0.02x-1)(0.04x^2+0.02x+1)$

c) $(0.2x+1)(0.4x^2-0.2x+1)$

d) $(0.2x-1)(0.04x^2+0.2x+1)$

الجواب فرع : (d)

الدرس [6 – 2] تبسيط المقادير الجبرية

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[1] $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$

الحل :

$$\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9} = \frac{\cancel{x+3}}{\cancel{4x}} \times \frac{\cancel{4}(x-3)}{\cancel{(x+3)}(x-3)} = \frac{1}{x}$$

الجواب فرع : (d)

[2] $\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4}$ a) $\frac{1}{y-2}$ b) 1 c) $\frac{1}{y+2}$ d) -1

الحل :

$$\frac{y+2}{y^2+2y+4} \times \frac{y^3-8}{y^2-4} = \frac{\cancel{y+2}}{\cancel{y^2+2y+4}} \times \frac{\cancel{(y-2)}\cancel{(y^2+2y+4)}}{\cancel{(y+2)}(y-2)} = 1$$

الجواب فرع : (b)

[3] $\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z} \times \frac{5}{Z^2-25}$ a) $\frac{5}{Z+5}$ b) $\frac{3}{5(Z+5)}$ c) $\frac{5}{3(Z+5)}$ d) $\frac{3}{Z+5}$

الحل :

$$\frac{Z^2-2Z-15}{9+3Z} \times \frac{5}{Z^2-25} = \frac{\cancel{(Z-5)}(Z+3)}{3\cancel{(3+Z)}} \times \frac{5}{(Z+5)\cancel{(Z-5)}} = \frac{5}{3(Z+5)}$$

الجواب فرع : (b)

[4] $\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25}$ a) $x-7$ b) $2x-5$ c) $x+7$ d) $2x+5$

الحل :

$$\frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \div \frac{x-7}{4x^2-25} = \frac{x^2-49}{2x^2+9x-35} \times \frac{4x^2-25}{x-7} = \frac{\cancel{(x+7)}\cancel{(x-7)}}{\cancel{(x+7)}\cancel{(2x-5)}} \times \frac{(2x+5)\cancel{(2x-5)}}{\cancel{x-7}} = 2x+5$$

الجواب فرع : (d)

اكتب كل مقدار من المقادير الآتية بأبسط صورة :

[7] $\frac{2y^2+1}{y^3-1}-\frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

الحل :

$$\frac{2y^2+1}{y^3-1}-\frac{y}{y^2+y+1}=\frac{2y^2+1}{(y-1)(y^2+y+1)}-\frac{y}{y^2+y+1}=\frac{2y^2+1-y(y-1)}{(y-1)(y^2+y+1)}$$

$$=\frac{2y^2+1-y^2+y}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{y^2+y+1}{(y-1)(y^2+y+1)}=\frac{1}{y-1}$$

الجواب فرع : (c)

[8] $\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}$ a) $\frac{2Z-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ b) $\frac{2Z+1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ c) $\frac{2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$ d) $\frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$

الحل :

$$\frac{5-4Z^2}{8Z^3+1}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}=\frac{5-4Z^2}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}+\frac{2Z-1}{4Z^2-2Z+1}=\frac{5-4Z^2+(2Z-1)(2Z+1)}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$

$$=\frac{5-4Z^2+4Z^2-1}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}=\frac{4}{(2Z+1)(4Z^2-2Z+1)}$$

الجواب فرع : (d)

[9] $\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$ a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$ c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

الحل :

$$\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}=\frac{3y+1}{y+4}-\frac{y-4}{3y-1}-\frac{10+8y^2}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{(3y+1)(3y-1)-(y-4)(y+4)-(10+8y^2)}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{9y^2-1-(y^2-16)-10-8y^2}{(y+4)(3y-1)}=\frac{y^2-11-y^2+16}{(y+4)(3y-1)}$$

$$=\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$$

الجواب فرع : (a)

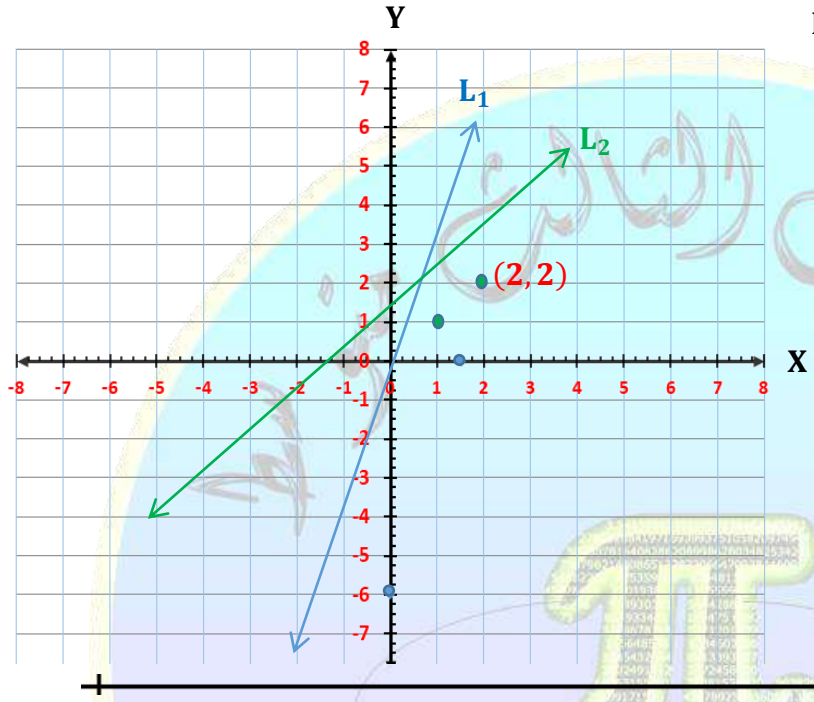
الفصل 3 المعادلات

حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة حل المعادلتين بيانيا في $\mathbb{R}$

[1] $\begin{cases} y = 4x - 6 \\ y = x \end{cases}$ a) $\{(-2,-2)\}$ b) $\{(-2,2)\}$ c) $\{(2,-2)\}$ d) $\{(2,2)\}$



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y = 4x - 6$ بالرمز L_1

x	y	(x, y)
0	−6	(0, −6)
$\frac{3}{2}$	0	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$y = 0 - 6 \Rightarrow y = -6$

$0 = 4x - 6 \Rightarrow 4x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

نرمز للمعادلة (2) $y = x$ بالرمز L_2

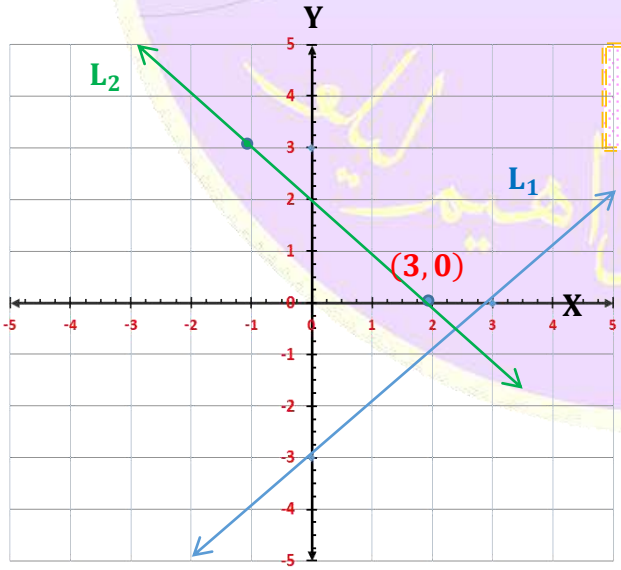
$x = 1 \Rightarrow y = 1$

$y = 2 \Rightarrow x = 2$

	y	(x, y)
	1	(1, 1)
	2	(2, 2)

مجموعة حل النظام : $\{(2,2)\}$ الجواب فرع (d)

[2] $\begin{cases} y = x - 3 \\ y = 3 - x \end{cases}$ a) $\{(-3,0)\}$ b) $\{(3,0)\}$ c) $\{(0,-3)\}$ d) $\{(0,3)\}$



الحل : نرمز للمعادلة (1) $y = x - 3$ بالرمز L_1

$y = 0 - 3 \Rightarrow y = -3$

$0 = x - 3 \Rightarrow x = 3$

x	y	(x, y)
0	−3	(0, −3)
3	0	(3, 0)

نرمز للمعادلة (1) $y = 3 - x$ بالرمز L_2

$y = 3 - 0 \Rightarrow y = 3$

$0 = 3 - x \Rightarrow x = 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
3	0	(3, 0)

مجموعة حل النظام :$\{(3,0)\}$

الجواب فرع (b)

جد مجموعة الحل للمعادلتين في R باستعمال التعويض لكل مما يأتي :

[3] $3x+4y=26$ ——— (1)
$5x-2y=0$ ——— (2)
a) $\{(2,5)\}$ b) $\{(-2,-5)\}$
c) $\{(2,-5)\}$ d) $\{(-2,5)\}$

الحل : من معادلة (2) نحصل على :

$5x=2y \Rightarrow x=\frac{2}{5}y$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3\left(\frac{2}{5}y\right)+4y=26 \Rightarrow \frac{6}{5}y+4y=26 \} \times 5$

$6y+20y=130 \Rightarrow 26y=130$

$y=\frac{130}{26}=5$

نعوض قيمة $y=5$ في معادلة (3)

$x=\frac{2}{5}\times 5=2$

مجموعة حل النظام : $\{(2,5)\}$

الجواب فرع (a)

[4] $y=6x+12$ ——— (1)
$3y=2x-8$ ——— (2)
a) $\left\{\left(-\frac{11}{4},\frac{9}{2}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(\frac{11}{4},-\frac{9}{2}\right)\right\}$
c) $\left\{\left(-\frac{11}{4},-\frac{9}{2}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(\frac{11}{4},\frac{9}{2}\right)\right\}$

الحل : بضرب معادلة (2) في العدد 4

$7x-4y=12$ ——— (1)
$\mp 12x \pm 4y=\mp 20$ ——— (2) بالطرح
$-5x=-8 \Rightarrow x=\frac{-8}{-5}=\frac{8}{5}$

نعوض قيمة $x=\frac{8}{5}$ في معادلة (2)

$3\left(\frac{8}{5}\right)-y=5 \Rightarrow \frac{24}{5}-y=5$

$y=\frac{24}{5}-5=\frac{24-25}{5}=-\frac{1}{5}$

مجموعة حل النظام : $\left\{\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{3x}{4}-\frac{y}{2}=4$ ——— (1)
$y-\frac{x}{4}=2$ ——— (2)
a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(-8,-4)\}$
c) $\{(8,4)\}$ d) $\{(-8,4)\}$

الحل : نبسط المعادلتين بضرب معادلة (1) في العدد 4 والمعادلة (2) في العدد 4

$\frac{3x}{4}-\frac{y}{2}=4 \} \times 4 \Rightarrow 3x-2y=16$ ——— (1)

$y-\frac{x}{4}=2 \} \times 4 \Rightarrow 4y-x=8$ ——— (2)

من معادلة (2) نحصل على :

$x=4y-8$ ——— (3)

نعوض معادلة (3) في معادلة (1)

$3(4y-8)-2y=16 \Rightarrow 12y-24-2y=16$

$10y=16+24 \Rightarrow 10y=40 \Rightarrow y=4$

نعوض قيمة $y=4$ في معادلة (3)

$x=4(4)-8=16-8=8$

مجموعة حل النظام : $\{(8,4)\}$

الجواب فرع (c)

جد مجموعة حل المعادلتين في R باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي :

[6] $7x-4y=12$ ——— (1)
$3x-y=5$ ——— (2)
a) $\left\{\left(-\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$ b) $\left\{\left(-\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$
c) $\left\{\left(\frac{8}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$ d) $\left\{\left(\frac{8}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$

نضرب معادلة (1) في 2

$8x-2y=28$ ——— (1)
$\mp x \pm 2y=\mp 14$ ——— (2) بالطرح
$7x=14 \Rightarrow x=\frac{14}{7}=2$

نعوض قيمة $x=2$ في (1)

$4(2)-y=14 \Rightarrow 8-y=14$

$y=8-14=-6$

مجموعة حل النظام : $\{(2,-6)\}$

الجواب فرع (c)

[7] $6y-2x-8=0$ ——(1)

$y+x-12=0$ ——(2)

a) $\{(8,-4)\}$ b) $\{(8,4)\}$

c) $\{(-8,4)\}$ d) $\{(-8,-4)\}$

الحل: بضرب معادلة (2) في العدد 2

$6y-2x-8=0$ ——(1)

$2y+2x-24=0$ ——(2) بالجمع

$8y-32=0 \Rightarrow 8y=32 \Rightarrow y=\frac{32}{8}=4$

نعوض قيمة $y=4$ في معادلة (2)

$4+x-12=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$

مجموعة حل النظام : $\{(8,4)\}$

الجواب فرع (b)

[8] $\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=2\frac{1}{3}$ ——(1)

$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y=3\frac{1}{2}$ ——(2)

a) $\{(-2,-6)\}$ b) $\{(-2,6)\}$

c) $\{(2.-6)\}$ d) $\{(2,6)\}$

الحل: نبسط معادلة (1) ومعادلة (2)

$\frac{2}{3}x-\frac{1}{6}y=\frac{7}{3}$ $\}\times 6$

$4x-y=14$ ——(1) $\}\times 2$

$\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}y=\frac{7}{2}$ $\}\times 4$

$x-2y=14$ ——(2)

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلة التالية في R باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين :

[1] $3x^2-12x=0$

a) $S=\{4,-4\}$ b) $S=\{3,-3\}$

c) $S=\{0,4\}$ d) $S\{0,3\}$

الحل:

$3x^2-12x=0 \Rightarrow 3x(x-4)=0$

أما $3x=0 \Rightarrow x=0$

أو $x-4=0 \Rightarrow x=4 \Rightarrow S=\{0,4\}$

الجواب فرع (c)

[2] $7Z^2-21=0$

a) $S=\{7,-7\}$ b) $S=\{3,-3\}$

c) $S=\{\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\}$ d) $S=\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

الحل:

$7(Z^2-3)=0$ $\}\div 7 \Rightarrow Z^2-3=0$

$(Z+\sqrt{3})(Z-\sqrt{3})=0$

أما $Z+\sqrt{3}=0 \Rightarrow Z=-\sqrt{3}$

$Z-\sqrt{3}=0 \Rightarrow Z=\sqrt{3} \Rightarrow S=$ أو$\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (d)

[3] $4(x^2-1)-5=0$

a) $S=\left\{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$

الحل :

$4x^2-4-5=0 \Rightarrow 4x^2-9=0$

$(2x+3)(2x-3)=0$

أما $2x+3=0 \Rightarrow 2x=-3 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

أو $2x-3=0 \Rightarrow 2x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$

$S=\left\{\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\}$

الجواب فرع (a)

[4] $(y+7)^2-81=0$

a) $S=\{2,-2\}$ b) $S=\{16,-16\}$

c) $S=\{2,-16\}$ d) $S=\{-2,16\}$

الحل :

$(y+7+9)(y+7-9)=0$

$(y+16)(y-2)=0$

أما $y+16=0 \Rightarrow y=-16$

أو $y-2=0 \Rightarrow y=2 \Rightarrow S=\{2,-16\}$

الجواب فرع (c)

[5] $3x^2-6=0$

a) $S=\{\sqrt{3},-\sqrt{3}\}$ b) $S=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

c) $S=\{6,-6\}$ d) $S=\{2,-2\}$

الحل :

$3(x^2-2)=0 \ \}\div 3 \Rightarrow x^2-2=0$

$(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})=0$

أما $x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=-\sqrt{2}$

$x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow S=$

أو$\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$

الجواب فرع (b)

حل المعادلات التالية في R باستعمال قاعدة الجذر التربيعي :

[6] $x^2=144$

a) $S=\{7,-7\}$ b) $S=\{14,-14\}$

c) $S=\{12,-12\}$ d) $S=\{12,12\}$

الحل :

$x=\pm\sqrt{144} \Rightarrow x=\pm 12 \Rightarrow S=\{12,-12\}$

الجواب فرع (c)

[7] $32-2y^2=0$

a) $S=\{6,6\}$ b) $S=\{4,-4\}$

c) $S=\{6,-6\}$ d) $S=\{4,4\}$

الحل :

$2y^2=32 \Rightarrow y^2=\frac{32}{2} \Rightarrow y^2=16$

$y=\pm\sqrt{16} \Rightarrow y=\pm 4 \Rightarrow S=\{4,-4\}$

الجواب فرع (b)

a) $S=\left\{\frac{2}{5},-\frac{2}{5}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{5}{3},-\frac{5}{2}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{4}{5},-\frac{4}{5}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right\}$

الحل :

$x^2=\frac{25}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{4}} \Rightarrow x=\pm\frac{5}{4}$

$S=\left\{\frac{5}{4},-\frac{5}{4}\right\}$

الجواب فرع (d)

[8] $5Z^2 = 9$

a) $S = \left\{\frac{3}{5}, -\frac{3}{5}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الحل :

$Z^2 = \frac{9}{5} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{5}} \Rightarrow Z = \pm\frac{3}{\sqrt{5}}$

$S = \left\{\frac{3}{\sqrt{5}}, -\frac{3}{\sqrt{5}}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $4(y^2 - 1) = 45$

a) $S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{7}, -\frac{2}{7}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{7}{4}, -\frac{7}{4}\right\}$

الحل :

$4y^2 - 4 = 45 \Rightarrow 4y^2 = 45 + 4 \Rightarrow 4y^2 = 49$

$y^2 = \frac{49}{4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{49}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{7}{2}$

$S = \left\{\frac{7}{2}, -\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (c)

[10] $\frac{1}{2}Z^2 = \frac{1}{9}$

a) $S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}$

الحل :

$9Z^2 = 2 \Rightarrow Z^2 = \frac{9}{2} \Rightarrow Z = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}$

$Z = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \left\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right\}$

الجواب فرع (c)

[11] $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$

a) $S = \left\{\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\right\}$

c) $S = \{2, -2\}$ d) $S = \{1, -1\}$

الحل :

$x^2 = \frac{3}{16} + \frac{13}{16} \Rightarrow x^2 = \frac{16}{16} = 1 \Rightarrow x = \mp\sqrt{1}$

$x = \mp 1 \Rightarrow S = \{1, -1\}$

الجواب فرع (d)

حل المعادلات التربيعية بطريقة التجربة

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في R بالتحليل بالتجربة :

[1] $y^2 + 10y + 21 = 0$

a) $S = \{3, -7\}$ b) $S = \{-3, 7\}$

c) $S = \{-3, -7\}$ d) $S = \{3, 7\}$

الحل :

$(y + 3)(y + 7) = 0$

أما $y + 3 = 0 \Rightarrow y = -3$

$y + 7 = 0 \Rightarrow y = -7 \Rightarrow S =$

أو $\{-3, -7\}$

الجواب فرع (c)

[2] $x^2 - 5x - 36 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-4, 9\}$

c) $S = \{4, -9\}$ d) $S = \{-4, -9\}$

الحل :

$(x - 9)(x + 4) = 0$

أما $x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9$

أو $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{-4, 9\}$

الجواب فرع (b)

[3] $y^2 + y - 56 = 0$

a) $S = \{7, -8\}$ b) $S = \{-7, 8\}$

c) $S = \{7, 8\}$ d) $S = \{-7, -8\}$

الحل :

$(y + 8)(y - 7) = 0$

أما $y + 8 = 0 \Rightarrow y = -8$

أو $y - 7 = 0 \Rightarrow y = 7 \Rightarrow S = \{7, -8\}$

الجواب فرع (a)

[4] $4y^2 + 18y + 18 = 0$

a) $S = \left\{-3, \frac{3}{4}\right\}$ b) $S = \left\{3, \frac{3}{4}\right\}$

c) $S = \left\{3, \frac{3}{2}\right\}$ d) $S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الحل :

$(2y + 3)(2y + 6) = 0$

أما $2y + 3 = 0 \Rightarrow 2y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$

أو $2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = -6$

$y = -\frac{6}{2} = -3 \Rightarrow S = \left\{-3, -\frac{3}{2}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $6Z^2 + 36Z - 42 = 0$

a) $S = \{1, 7\}$ b) $S = \{-1, 7\}$

c) $S = \{-1, -7\}$ d) $S = \{1, -7\}$

الحل :

$6Z^2 + 36Z - 42 = 0 \ \} \div 6 \Rightarrow Z^2 + 6Z - 7 = 0$

$(Z + 7)(Z - 1) = 0$

أما $Z + 7 = 0 \Rightarrow Z = -7$

أو $Z - 1 = 0 \Rightarrow Z = 1 \Rightarrow S = \{1, -7\}$

الجواب فرع (d)

[6] $22 - 20y - 2y^2 = 0$

a) $S = \{11, 1\}$ b) $S = \{1, -11\}$

c) $S = \{11, -1\}$ d) $S = \{-1, -11\}$

الحل :

$22 - 20y - 2y^2 = 0 \ \} \div 2$

$11 - 10y - y^2 = 0$

$(1 - y)(11 + y) = 0$

أما $1 - y = 0 \Rightarrow y = 1$

$11 + y = 0 \Rightarrow y = -11 \Rightarrow S =$

أو $\{1, -11\}$

الجواب فرع (b)

[10] $32 + 12x - 9x^2 = 0$

a) $S = \left\{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الحل :

$(4 + 3x)(8 - 3x) = 0$

أما $4 + 3x = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

أو

$S = \left\{-\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[10] عددان حاصل ضربهما 48 أحدهما يقل عن الآخر بمقدار 8

فما العددان ؟

a) $S = \{8, 6\}$ b) $S = \{12, -4\}$

c) $S = \{10, 4\}$ d) $S = \{-12, -4\}$

الحل : نفرض العدد الاول x , العدد الثاني $x - 8$

$x(x - 8) = 48 \Rightarrow x^2 - 8x - 48 = 0$

$(x - 12)(x + 4) = 0$

أما $x - 12 = 0 \Rightarrow x = 12$

$x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \Rightarrow S = \{12, -4\}$

الجواب فرع (b)

[8] ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) $S = \{7, 6\}$ b) $S = \{7, -6\}$

c) $S = \{-7, 6\}$ d) $S = \{-7, -6\}$

الحل : نفرض العدد x , مربع العدد x^2

$x^2 - x = 42 \Rightarrow x^2 - x - 42 = 0$

$(x - 7)(x + 6) = 0$

أما $x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7$

أو $x + 6 = 0 \Rightarrow x = -6 \Rightarrow S = \{7, -6\}$

الجواب فرع (b)

أو

[9] عددان حاصل ضربهما 54 أحدهما يزيد على الآخر بمقدار 3

فما العددان ؟

a) $S = \{6, 9\}$ b) $S = \{6, -9\}$

c) $S = \{-6, 9\}$ d) $S = \{-6, -9\}$

الحل : نفرض العدد الاول x , العدد الثاني $x + 3$

$x(x + 3) = 54 \Rightarrow x^2 + 3x - 54 = 0$

$(x + 9)(x - 6) = 0$

أما $x + 9 = 0 \Rightarrow x = -9$

أو $x - 6 = 0 \Rightarrow x = 6 \Rightarrow S = \{6, -9\}$

الجواب فرع (b)

أو

حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

حل المعادلات التالية في $\mathbb{R}$ بالمربع الكامل :

[1] $x^2 + 6x + 9 = 0$

a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = 4$ d) $x = 3$

الحل :

$(x + 3)^2 = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

الجواب فرع (b)

[2] $4Z^2 - 20Z + 25 = 0$

a) $Z = -\frac{5}{2}$ b) $Z = -\frac{2}{5}$ c) $Z = \frac{5}{2}$ d) $Z = \frac{2}{5}$

الحل :

$(2Z - 5)^2 = 0 \Rightarrow 2Z - 5 = 0$

$2Z = 5 \Rightarrow Z = \frac{5}{2}$

الجواب فرع (c)

[3] $\frac{1}{16}-\frac{1}{2}+x^2$

a) $x=\frac{1}{4}$ b) $x=-\frac{1}{4}$ c) $x=\frac{1}{2}$ d) $x=-\frac{1}{2}$

الحل :

$\left(\frac{1}{4}-x\right)^2=0 \Rightarrow \frac{1}{4}-x=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

الجواب فرع (a)

[4] $y^2-2y+3=0$

a) $y=-3$ b) $y=3$ c) $y=-\sqrt{3}$ d) $y=\sqrt{3}$

الحل :

$(y-\sqrt{3})^2=0 \Rightarrow y-\sqrt{3}=0 \Rightarrow y=\sqrt{3}$

الجواب فرع (d)

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع :

[5] $x^2-12x=13$

a) $S=\{13,1\}$ b) $S=\{13,-1\}$
c) $S=\{-13,1\}$ d) $S=\{-13,-1\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2}\times 12\right)^2=(6)^2=36$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2-12x+36=13+36$

$(x-6)^2=49$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x-6=\pm 7$

أما $x-6=7 \Rightarrow x=7+6=13$

أو $x-6=-7 \Rightarrow x=-7+6=-1$

$S=\{13,-1\}$

الجواب فرع (b)

[6] $4y^2-32y=17$

a) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{17}{2}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{-1}{2},\frac{2}{17}\right\}$
c) $S=\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{17}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{-1}{2},\frac{17}{2}\right\}$

الحل :

$4y^2-32y=17 \ \} \div 4 \Rightarrow y^2-8y=\frac{17}{4}$

$\left(\frac{1}{2}\times 8\right)^2=(4)^2=66$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2-8y+16=\frac{17}{4}+16$

[7] $16Z^2-40Z-11=0$

a) $S=\left\{\frac{11}{4},\frac{1}{4}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{-11}{4},\frac{-1}{4}\right\}$
c) $S=\left\{\frac{11}{4},\frac{-1}{4}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{-11}{4},\frac{1}{4}\right\}$

الحل :

$16Z^2-40Z=11 \ \} \div 16 \Rightarrow Z^2-\frac{5}{2}Z=\frac{11}{16}$

$\left(\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{4}\right)^2=\frac{25}{16}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2-\frac{5}{2}Z+\frac{25}{16}=\frac{11}{16}+\frac{25}{16}$

$\left(Z-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{36}{16}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z-\frac{5}{4}=\pm\frac{6}{4}$

أما $Z-\frac{5}{4}=\frac{6}{4} \Rightarrow Z=\frac{6}{4}+\frac{5}{4}=\frac{11}{4}$

أو $Z-\frac{5}{4}=-\frac{6}{4} \Rightarrow Z=\frac{5}{4}-\frac{6}{4}=-\frac{1}{4}$

$S=\left\{\frac{11}{4},-\frac{1}{4}\right\}$

الجواب فرع (c)

[8] $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$

a) $S = \left\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ b) $S = \left\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right\}$ d) $S = \left\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$ نضيف الى طرفي المعادلة

$y^2 - \frac{1}{3}y + \frac{1}{36} = \frac{2}{9} + \frac{1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{8+1}{36}$

$\left(y - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{9}{36}$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$y - \frac{1}{6} = \pm\frac{3}{6}$

أما $y - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} \Rightarrow y = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

أو $y - \frac{1}{6} = -\frac{3}{6} \Rightarrow y = \frac{1}{6} - \frac{3}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$

$S = \left\{\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (c)

[9] $Z^2 + 2\sqrt{5}Z = 4$

a) $S = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$

b) $S = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$

c) $S = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$

d) $S = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{5}\right)^2 = (\sqrt{5})^2$

$= 5$ نضيف الى طرفي المعادلة

$Z^2 + 2\sqrt{5}Z + 5 = 4 + 5$

$(Z + \sqrt{5})^2 = 9$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$Z + \sqrt{5} = \pm 3$

أما $Z + \sqrt{5} = 3 \Rightarrow Z = 3 - \sqrt{5}$

أو $Z + \sqrt{5} = -3 \Rightarrow Z = -3 - \sqrt{5}$

$S = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$

الجواب فرع (c)

حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح :

[13] $x^2 - 8x = 8$

a) $S \approx \{9, 1\}$ b) $S \approx \{9, -1\}$

c) $S \approx \{-9, 1\}$ d) $S \approx \{-9, -1\}$

الحل :

$\left(\frac{1}{2} \times 8\right)^2 = (4)^2 = 16$ نضيف الى طرفي المعادلة

$x^2 - 8x + 16 = 8 + 16$

$(x - 4)^2 = 24$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$x - 4 \approx \pm 5$

أما $x - 4 \approx 5 \Rightarrow x \approx 5 + 4 \approx 9$

أو $x - 4 \approx -5 \Rightarrow x \approx -5 + 4 \approx -1$

$S \approx \{9, -1\}$

الجواب فرع (b)

حل المعادلات بالقانون العام

ختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة الحل للمعادلات باستعمال القانون العام في R :

[1] $x^2 - 3x - 4 = 0$

a) $S = \{4, 1\}$ b) $S = \{4, -1\}$

c) $S = \{-4, 1\}$ d) $S = \{-4, -1\}$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -4$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2}$$

أما $x = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$ أو $x = \frac{3-5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$S = \{4, -1\}$

الجواب فرع (b)

[3] $2x^2 - 8x = -3$

a) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$ b) S

$= \left\{\frac{2 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 + \sqrt{10}}{2}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{4 + \sqrt{5}}{4} , \frac{4 - \sqrt{5}}{4}\right\}$ d) S

$= \left\{\frac{2 + \sqrt{5}}{2} , \frac{2 - \sqrt{5}}{2}\right\}$

الحل :

$2x^2 - 8x + 3 = 0 \Rightarrow a = 2 \ , \ b = -8 \ , \ c = 3$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{4}$$

$$x = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2(4 \pm \sqrt{10})}{4} = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2}$$

أما $x = \frac{4 + \sqrt{10}}{2}$ أو $x = \frac{4 - \sqrt{10}}{2}$

$S = \left\{\frac{4 + \sqrt{10}}{2} , \frac{4 - \sqrt{10}}{2}\right\}$

الجواب فرع (a)

[2] $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $S = \left\{\frac{3 + 5\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{2}\right\}$ b) S

$= \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{4} , \frac{3 - 5\sqrt{5}}{4}\right\}$

c) $S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$ d) S

$= \left\{\frac{5 + 3\sqrt{3}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2}\right\}$

الحل :

$$a = 1 \ , \ b = -5 \ , \ c = -5$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2}$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{45}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

أما $y = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2}$ أو $y = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2}$

$S = \left\{\frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} , \frac{3 - 3\sqrt{5}}{2}\right\}$

الجواب فرع (c)

[4] $3x^2 - 6(2x + 1) = 0$

a) $S = \{2 + \sqrt{3} , 2 - \sqrt{3}\}$ b) S

$= \{2 + \sqrt{2} , 2 - \sqrt{2}\}$

c) $S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$ d) S

$= \{6 + \sqrt{6} , 6 - \sqrt{6}\}$

الحل :

$3x^2 - 12x - 6 = 0 \ \} \div 3 \implies x^2 - 4x - 2 = 0$

$a = 1 \ , \ b = -4 \ , \ c = -2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{6}}{2} = 2 \pm \sqrt{6}$$

أما $x = 2 + \sqrt{6}$ أو $x = 2 - \sqrt{6}$

$S = \{2 + \sqrt{6} , 2 - \sqrt{6}\}$

الجواب فرع (c)

حدد جذور المعادلة باستعمال المميز :

[5] $x^2 - 6x - 7 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان . b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 1 \quad , \quad b = -6 \quad , \quad c = -7$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(-7) = 36 + 28 = 64$

مقدار المميز موجب ومربع كامل والجذران حقيقيان نسبيان .

الجواب فرع (a)

[6] $2y^2 - 3y - 8 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان . b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 2 \quad , \quad b = -3 \quad , \quad c = -8$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-3)^2 - 4(2)(-8) = 9 + 64 = 73$

المميز موجب ليس مربع كامل الجذران حقيقيان غير نسبيين

الجواب فرع (b)

[7] $8x^2 - 8x + 2 = 0$

a) جذران حقيقيان متساويان $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

b) جذران حقيقيان غير نسبيين .

c) جذر حقيقي واحد $\left(\frac{-b}{2a}\right)$

d) جذرين غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \emptyset$)

الحل :

$a = 8 \quad , \quad b = -8 \quad , \quad c = 2$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = (-8)^2 - 4(8)(2) = 64 - 64 = 0$

المميز يساوي صفر والجذران حقيقيان متساويان لها جذر حقيقي واحد .

الجواب فرع (a)

[8] ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k + 10)y + 16 = 0$ متساويين ؟

a) $k = 2 , -18$ b) $k = -2 , -18$

c) $k = 6 , 14$ d) $k = -6 , -14$

الحل : يكون جذري المعادلة متساويين اذا كان المميز $= 0$

$a = 1 \quad , \quad b = -(k + 10) \quad , \quad c = 16$

$b^2 - 4ac = 0$

$[-(k + 10)]^2 - 4(1)(16) = 0$

$(k + 10)^2 - 16 = 0$

$(k + 10)^2 = 16$ باخذ الجذر التربيعي للطرفين

$k + 10 = \pm 4$

أما $k + 10 = 4 \implies k = 4 - 10 = -6$

أو $k + 10 = -4 \implies k = -4 - 10 = -14$

الجواب فرع (d)

يمكنك البحث عن دروسي من خلال

كتابة

إبراهيم ليلو على اليوتيوب

حل المعادلات الكسرية

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي :

جد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية في R :

[1] $\frac{2}{12x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x}$

a) $S=\left\{2,\frac{1}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

c) $S=\left\{2,-\frac{1}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-2,-\frac{1}{2}\right\}$

الحل :

$\frac{1}{6x^2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4x}\quad\}\times 12x^2$

$2-2x^2=3x \Rightarrow 2x^2+3x-2=0$

$(x+2)(2x-1)=0$

أما $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

أو $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{2}\right\}$

الجواب فرع (b)

[2] $\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0$

a) $S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$ b) $S=\left\{-1,-\frac{7}{2}\right\}$

c) $S=\left\{1,\frac{7}{2}\right\}$ d) $S=\left\{-1,\frac{7}{2}\right\}$

الحل :

$\frac{5}{6}-\frac{7}{6y}+\frac{y}{3}=0\quad\}\times 6y$

$5y-7+2y^2=0 \Rightarrow 2y^2+5y-7=0$

$(2y+7)(y-1)=0$

أما $2y+7=0 \Rightarrow 2y=-7 \Rightarrow y=-\frac{7}{2}$

او $y-1=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow S=\left\{1,-\frac{7}{2}\right\}$

الجواب فرع (a)

[3] $\frac{8x}{5}=\frac{5}{8x}$

a) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{8}{5}\right\}$ b) $S=\left\{\frac{5}{8},\frac{8}{5}\right\}$

c) $S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$ d) $S=\left\{\frac{8}{5},-\frac{8}{5}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$64x^2=25 \Rightarrow x^2=\frac{25}{64} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{25}{64}}$

$x=\pm\frac{5}{8} \Rightarrow S=\left\{\frac{5}{8},-\frac{5}{8}\right\}$

الجواب فرع (d)

[4] $\frac{1+2y}{3y+9}=\frac{y}{2}$

a) $S=\left\{1,\frac{1}{3}\right\}$ b) $S=\left\{-1,\frac{1}{3}\right\}$

c) $S=\left\{2,\frac{1}{3}\right\}$ d) $S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الحل : الطرفين في الوسطين

$y(3y+9)=2(1+2y) \Rightarrow 3y^2+9y=2+4y$

$3y^2+9y-2-4y=0 \Rightarrow 3y^2+5y-2=0$

$(y+2)(3y-1)=0$

أما $y+2=0 \Rightarrow y=-2$

أو $3y-1=0 \Rightarrow 3y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{3}$

$S=\left\{-2,\frac{1}{3}\right\}$

الجواب فرع (d)

[5] $\frac{16x-64}{x^2}=1$

a) $x=-8$ b) $x=8$ c) $x=-6$ d) $x=6$

الحل : الطرفين في الوسطين

$x^2=16x-64 \Rightarrow x^2-16x+64=0$

$(x-8)^2=0 \Rightarrow x-8=0 \Rightarrow x=8$

الجواب فرع (b)

جد مجموعة حل لكل معادلة من المعادلات التالية في R :

[6] $\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1$

a) $S=\{2+\sqrt{7},2-\sqrt{7}\}$ b) $S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

c) $S=\{1+\sqrt{7},1-\sqrt{7}\}$ d) $S=\{2+\sqrt{3},2-\sqrt{3}\}$

الحل :

$\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x-1}=1\ \}\times(x-2)(x-1)$

$2(x-1)-3(x-2)=(x-2)(x-1)$

$2x-2-3x+6=x^2-x-2x+2$

$-x+4=x^2-3x+2$

$x^2-3x+2+x-4=0 \Rightarrow x^2-2x-2=0$

$a=1\ ,\quad b=-2\ ,\quad c=-2$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-2)}}{2(1)}$

$x=\frac{2\pm\sqrt{4+8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2}=1\pm\sqrt{3}$

أما $x=1+\sqrt{3}$ أو $x=1-\sqrt{3}$

$S=\{1+\sqrt{3},1-\sqrt{3}\}$

الجواب فرع (b)

[7] $\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}=\frac{24y^2+6}{y^2-36}$

a) $y=-\frac{1}{3}$ b) $y=-\frac{1}{2}$ c) $y=\frac{1}{3}$ d) $y=\frac{1}{2}$

الحل :

$\frac{y-6}{y+6}-\frac{y+6}{y-6}=\frac{24y^2+6}{(y+6)(y-6)}\ \}\times(y+6)(y-6)$

$(y-6)^2-(y+6)^2=24y^2+6$

$y^2-12y+36-(y^2+12y+36)=24y^2+6$

$y^2-12y+36-y^2-12y-36=24y^2+6$

$-24y=24y^2+6$

$24y^2+24y+6=0\}\div6 \Rightarrow 4y^2+4y+1=0$

$(2y+1)^2=0 \Rightarrow 2y+1=0$

$2y=-1 \Rightarrow y=-\frac{1}{2}$

الجواب فرع (b)

[8] $\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{x^2-9}$ a) $x=-9$ b) $x=9$ c) $x=-8$ d) $x=8$

الحل :

$\frac{x}{x+3}-\frac{x}{x-3}=\frac{x^2+12x+81}{(x+3)(x-3)}\ \}\times(x+3)(x-3)$

$x(x-3)-x(x+3)=x^2+12x+81$

$x^2-3x-x^2-3x=x^2+12x+81 \Rightarrow -6x=x^2+12x+81$

$x^2+12x+81+6x=0 \Rightarrow x^2+18x+81=0$

$(x+9)^2=0 \Rightarrow x+9=0 \Rightarrow x=-9$

الجواب فرع (a)

[9] $\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{y^2-6y+8}$ a) $S=\{4,-2\}$ b) $S=\{-4,-2\}$ c) $S=\{-4,2\}$ d) $S=\{4,2\}$

الحل :

$\frac{3y}{y-4}+\frac{y}{y-2}=\frac{5y^2-4y+8}{(y-4)(y-2)}$ $\}\times(y-4)(y-2)$

$3y(y-2)+y(y-4)=5y^2-4y+8$

$3y^2-6y+y^2-4y=5y^2-4y+8$

$4y^2-10y=5y^2-4y+8 \Rightarrow 5y^2-4y+8-4y^2+10y=0$

$y^2+6y+8=0 \Rightarrow (y+4)(y+2)=0$

أما $y+4=0 \Rightarrow y=-4$

أو $y+2=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow S=\{-4,-2\}$

الجواب فرع (b)

تم بحمد الله

يمكنك البحث عن دروسي من خلال كتابة

إبراهيم ليلو على اليوتيوب